

Zadatak 1 U tablici se nalaze podaci izmjerene količina ozona u zraku:

0.08	0.10	0.09	0.07	0.09	0.06	0.15	0.09	0.11	0.10	0.08	0.13
0.13	0.10	0.15	0.09	0.09	0.17	0.05	0.11	0.07	0.09	0.11	0.08

- (a) Nacrtajte stem-and-leaf dijagram za te podatke.
 (b) Odredite karakterističnu petorku tih podataka, izračunajte raspon i interkvartil uzorka.
 (c) Izračunajte aritmetičku sredinu, uzoračku varijancu i standardnu devijaciju.
 (d) Grupirajte podatke u razrede i nacrtajte histogram uzorka.

Rješenje.

	stem	leaf
(a)	0.0*	-
	0.0*	8979698995798
	0.1*	01033011
	0.1*	557

(b)

$$x_{(1)} = 0.05, \quad x_{(24)} = 0.17, \quad d = 0.12, \quad m = \frac{x_{(12)} + x_{(13)}}{2} = \frac{0.09 + 0.09}{2} = 0.09,$$

$$q_L = x_{(\frac{25}{4})} = x_{(6)} + \frac{1}{4}(x_{(7)} - x_{(6)}) = 0.08,$$

$$q_U = x_{(\frac{75}{4})} = x_{(18)} + \frac{3}{4}(x_{(19)} - x_{(18)}) = 0.11, \quad d_q = 0.03,$$

Karakteristična petorka: (0.05, 0.08, 0.09, 0.11, 0.17).

(c)

$$\bar{x} = 0.09958,$$

$$s^2 = \frac{1}{23}(0.2577 - 24 \cdot 0.009916) = 0.000857, \quad s = 0.02927$$

(d) $k = 5, \quad c = \frac{0.12}{5} = 0.024$

razredi	f_i	relativna frekvencija razreda
[0.05, 0.074]	4	0.17
[0.074, 0.098]	9	0.38
[0.098, 0.122]	6	0.25
[0.122, 0.146]	2	0.08
[0.146, 0.17]	3	0.12

Zadatak 2 Ptićima pronađenima u divljini teško je odrediti dob. Stoga je napravljeno istraživanje na pticama rođenim u jednom ZOO-u - uzet je uzorak od 9 nedavno izleglih ptića te je zabilježena njihova starost i raspon krila.

duljina krila (u cm)	1.6	2.2	3.0	3.2	3.2	3.8	4.1	4.8	5.1
dob (u danima)	4	5	8	9	10	11	12	14	16

(a) Procijenite pravac regresije za dane podatke. Nacrtajte procijenjeni pravac. Kolika je duljina krila ptice ako je njena dob 13 godina?

(b) Izračunajte Pearsonov koeficijent korelacije od X i Y . Prokomentirajte njegovu vrijednost.

Rješenje.

(a)

$$\bar{x} = 3.44, \bar{y} = 9.89,$$

$$s_x^2 = 1.3, s_y^2 = 15.36, s_{xy} = 4.43,$$

$$\beta = \frac{4.43}{1.3} = 3.41, \alpha = 9.89 - 3.41 \cdot 3.44 = -1.84 \Rightarrow y = 3.41x - 1.84.$$

Slika 2:

(b)

$$r = \frac{4.43}{1.14 \cdot 3.92} = 0.99 > 0$$

\Rightarrow pozitivna korelacija (kad x raste, y raste)

Zadatak 3 Bačene su dvije kocke. Izračunajte vjerojatnost da se pojavila barem jedna jedinica ako su se pojavila dva različita broja.

Rješenje.

A = pojavila se barem jedna jedinica,

B = pojavila su se dva različita broja.

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{k(A \cap B)}{k(\Omega)}}{\frac{k(B)}{k(\Omega)}} = \frac{\frac{10}{36}}{\frac{30}{36}} = \frac{1}{3}.$$

Zadatak 4 Baterija ima 4 topa. Vjerojatnost pogotka prvog topa je 30%, a ostalih triju topova 20%. Za uništenje cilja dovoljan je jedan pogodak. Ako je cilj pogođen od prvog pokušaja nađi vjerojatnost da je gađao prvi top.

Rješenje. H_1 = prvi top, H_2 = drugi top, H_3 = treći top, H_4 = četvrti top,

$$\Rightarrow P(H_1) = P(H_2) = P(H_3) = P(H_4) = \frac{1}{4}$$

A = cilj pogođen od prvog pokušaja $\Rightarrow P(A|H_1) = 0.3, P(A|H_2) = P(A|H_3) = P(A|H_4) = 0.2$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{0.3 + 3 \cdot 0.2}{4} = 0.225 \Rightarrow P(H_1|A) = \frac{\frac{1}{4} \cdot 0.3}{0.225} = 0.33.$$

Zadatak 5 Tri sestre, Ivana, Tanja i Korana, subotom idu u shopping. Ivana si nešto kupi svaki put, Tanja svake pete subote ništa ne kupi, a Korana kupuje samo svake druge subote. Neka je X slučajna varijabla koja broji koliko sestara je nešto kupilo. Odredite njen zakon razdiobe te joj izračunajte očekivanje.

Rješenje.

$$P(X=0) = 0, \quad P(X=1) = 1 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2} + 0 \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{2} + 0 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{10},$$

$$P(X=2) = 1 \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2} + 0 \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}, \quad P(X=3) = 1 \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{5}.$$

$$E[X] = \frac{1}{10} + 2 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot \frac{2}{5} = 2.3.$$

Zadatak 6 Prema Mendelovoj teoriji o nasljednim osobinama, križanje srodnih vrsta biljaka s crvenim i bijelim cvjetovima daje potomke od kojih 25% ima crveni cvijet. Hortikulturist križa 5 pari biljaka s crvenim i bijelim cvijetom. Izračunajte vjerojatnost da od tako dobivenih novih biljaka a) nijedna nema crveni cvijet; b) 4 ili više imaju crveni cvijet. Odredite očekivanje, varijancu i standardnu devijaciju.

Rješenje. $X \sim B(5, 0.25)$

$$\text{a) } P(X=0) = \binom{5}{0} \cdot 0.25^0 \cdot 0.75^5 = 0.237$$

$$\text{b) } P(X \leq 4) = \binom{5}{4} \cdot 0.25^4 \cdot 0.75^1 + \binom{5}{5} \cdot 0.25^5 \cdot 0.75^0 = 0.016$$

$$E[X] = 1.25, \quad \text{Var}[X] = 0.9375, \quad \sigma[X] = 0.968.$$

Zadatak 7 Vjerojatnost da osoba ima alergijsku reakciju na neki serum je 0.003. Odredite vjerojatnost da od 1300 osoba: a) točno 4, b) barem 5 osoba ima alergijsku reakciju.

Rješenje. $X =$ broj osoba koje imaju alergijsku reakciju,

$$\Rightarrow X \sim B(1300, 0.003) \Rightarrow \lambda = 3.9$$

$$\text{a) } P(X=4) = \frac{3.9^4}{4!} e^{-3.9} = 0.195119$$

$$\text{b) } P(X \geq 5) = 1 - P(X=0) - P(X=1) - P(X=2) - P(X=3) - P(X=4) = 1 - \frac{3.9^0}{0!} e^{-3.9} - \frac{3.9^1}{1!} e^{-3.9} - \frac{3.9^2}{2!} e^{-3.9} - \frac{3.9^3}{3!} e^{-3.9} - \frac{3.9^4}{4!} e^{-3.9} = 0.351635$$

Zadatak 8 Za koje $a \in \mathbf{R}$ je funkcija $f(x) = \begin{cases} -x, & -1 \leq x \leq 0 \\ a(2-x), & 0 \leq x \leq 2 \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$, funkcija gustoće vjerojatnosti neke slučajne varijable? Izračunajte $P(X \geq -3)$.

Rješenje.

$$\int_{-\infty}^{-1} 0 dx + \int_{-1}^0 (-x) dx + \int_0^2 a(2-x) dx + \int_2^{+\infty} 0 dx = 1$$
$$\Rightarrow -\frac{x^2}{2} \Big|_{-1}^0 + 2ax \Big|_0^2 - a \frac{x^2}{2} \Big|_0^2 = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{4}$$

$$\begin{aligned} x \leq -1, & \quad F(x) = 0 \\ -1 \leq x \leq 0, & \quad F(x) = 0 + \int_{-1}^x (-t) dt = -\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} \\ 0 \leq x \leq 2, & \quad F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \int_0^x (2-t) dt = \frac{1}{2} + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} \\ x \geq 2, & \quad F(x) = 1 \end{aligned}$$
$$\Rightarrow P(X \geq -3) = 1 - P(X < -3) = 1 - 0 = 1.$$

Zadatak 9 Radi ispitivanja vremenskih prilika u jednom turističkom mjestu, na osnovi meteoroloških izvještaja za 12 slučajno izabranih godina dobiven je broj sunčanih dana u toku godine: 220, 230, 245, 253, 227, 182, 194, 228, 192, 260, 251. Možemo li, uz razinu značajnosti 0.01, na osnovi tih podataka zaključiti da je prosječan broj sunčanih dana u toku godine veći od 231?

Rješenje.

$$H_0 : \mu = 231$$

$$H_1 : \mu > 231$$

$$\bar{x}_{12} = 226.08, S_{12}^2 = 644.273 \Rightarrow T = \frac{226.08 - 231}{25.38} \sqrt{12} = -0.672$$

$$t_{0.01}(11) = 2.718 \Rightarrow Z < z_{0.01}(11)$$

$\Rightarrow H_0$ ne možemo odbaciti, tj. prosječni broj sunčanih dana nije veći od 231.

Zadatak 10 Prema nedavnom istraživanju stopa nezaposlenosti u SAD-u je 7.8%. Kasnije je provedeno istraživanje na 1600 na slučajan način izabranih (radno sposobnih) osoba u nekom okrugu te je utvrđeno da njih 96 nije zaposleno. Može li se na osnovi ovih podataka i na razini značajnosti 0.05, zaključiti da je stopa nezaposlenosti u tom okrugu značajno manja od one na državnoj razini?

Rješenje.

$$H_0 : p = 0.078$$

$$H_1 : p < 0.078$$

$$\hat{p} = 0.06$$

$$Z = \frac{0.06 - 0.078}{\sqrt{0.078(1 - 0.078)}} \sqrt{1600} = -2.6849$$

$$z_{0.05} = 1.645 \Rightarrow Z < -z_{0.05}$$

$\Rightarrow H_0$ odbacujemo, tj. možemo zaključiti da je stopa nezaposlenosti u tom okrugu značajno manja od one na državnoj razini.

Zadatak 11 Bilježena je frekvencija s kojom su se brojevi 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 pojavljivali u jednoj igri na sreću kroz određeno razdoblje. Može li se, na osnovi ovih podataka i uz razinu značajnosti 0.05, zaključiti da se svih 7 brojeva pojavljivalo s jednakom vjerojatnošću?

broj	1	2	3	4	5	6	7
puta	56	58	71	35	69	66	80

Rješenje.

$$p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = p_5 = p_6 = p_7 = \frac{1}{7}, n = 435$$

$$f'_1 = f'_2 = f'_3 = f'_4 = f'_5 = f'_6 = f'_7 = 62.14$$

$$\begin{aligned}
H &= \frac{(56 - 62.14)^2}{62.14} + \frac{(58 - 62.14)^2}{62.14} + \frac{(71 - 62.14)^2}{62.14} \\
&+ \frac{(35 - 62.14)^2}{62.14} + \frac{(69 - 62.14)^2}{62.14} + \frac{(66 - 62.14)^2}{62.14} + \frac{(80 - 62.14)^2}{62.14} = 20.1297 \\
&\chi_{0.05}^2(7 - 0 - 1) = 12.6, \quad H > \chi_{0.05}^2(6)
\end{aligned}$$

⇒ brojevi se nisu pojavljivali s jednakom vjerojatnošću.

Zadatak 12 Mjerena je brzina izgaranja 3 vrste tkanina tako da je zapaljena etiketa na haljini napravljenoj od pojedine tkanine, a zatim zabilježeno vrijeme (u sekundama) koje je bilo potrebno da haljina izgori; podaci su dani u tablici. Može li se, uz razinu značajnosti 0.05, zaključiti da se srednja brzina izgaranja ove 3 vrste tkanine značajno razlikuje?

tkanina 1	11.8	11.0	10.0	9.2
tkanina 2	14.9	10.8	12.8	10.7
tkanina 3	11.2	11.4	15.8	10.0

Rješenje.

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$$

$$\bar{x}_1 = 10.5, \quad \bar{x}_2 = 12.3, \quad \bar{x}_3 = 12.1, \quad \bar{x} = 11.63$$

$$SST = 8.7172, \quad SSE = 26.25, \quad MST = 4.36, \quad MSE = 2.92 \Rightarrow F = 1.49$$

$f_{0.05}(2, 9) = 4.26 \Rightarrow F < f_{0.05}(2, 6) \Rightarrow H_0$ ne odbacujemo, tj. ne možemo zaključiti da se ove 3 vrste tkanine razlikuju.

Zadatak 13 Kako bi uvjerio studente da je važno imati što bolje ocjene tijekom studija, dekan želi pokazati da postoji veza između prosjeka ocjena tijekom studija i početničkih plaća. U tablici su dani podaci o prosjeku ocjena i visini plaće za 5 studenata koji su diplomirali prošle godine i zaposlili se. Postoji li, uz razinu značajnosti $\alpha = 0.05$ pozitivna korelacija između prosjeka i plaće? Odredite 95% pouzdan interval za koeficijent smjera pravca.

prosjeck ocjena	2.58	3.27	3.85	2.89	2.23
plaća (u tisućama kuna)	3.8	7.8	8.3	6.5	4.0

Rješenje.

$$H_0 : \rho = 0$$

$$H_1 : \rho > 0$$

$$\bar{x} = 2.964, \quad \bar{y} = 6.08, \quad s_x^2 = 0.393, \quad s_y^2 = 4.397, \quad s_{xy} = 1.2161 \Rightarrow R = 0.9256$$

$$\Rightarrow Z = \frac{0.925 - 6}{\sqrt{1 - 0.9256^2}} \sqrt{3} = 4.24$$

$t_{0.05}(3) = 2.353 < Z \Rightarrow H_0$ odbacujemo, tj. korelacija je pozitivna.

$$\Rightarrow \hat{\alpha} = \frac{1.2161}{0.393} = 3.09, \quad \hat{\beta} = 6.08 - 3.09 \cdot 2.964 = -3.09$$

$$y = 3.09x - 3.08, \quad \hat{\sigma} = 0.92$$

$$\Rightarrow 3.09 - 3.18 \frac{0.92}{\sqrt{4 \cdot 0.393}} \leq \alpha \leq 3.09 + 3.18 \frac{0.92}{\sqrt{4 \cdot 0.393}}$$