1. Uvod u numeričku matematiku

1.1. Zadaća numeričke matematike

Moderna znanost i tehnika postavljaju niz matematičkih problema koji se klasičnim matematičkim metodama ne mogu uvijek riješiti ili bi njihovo rješavanje bilo suviše glomazno.

U općem slučaju, problem koji treba riješiti zovemo ulazna informacija, a odgovarajući rezultat izlazna informacija. Postupak transformacije ulazne informacije u izlaznu informaciju zovemo algoritam. Navedena transformacija može se predstaviti blok dijagramom:

Ulazna informacija	$\rightarrow$	Algoritam	$\rightarrow$	Izlazna informacija

.

Pri rješavanju nekog problema potrebno je izabrati pogodan algoritam koji najbrže dovodi do željenog rezultata. Ovo je naročito važno kod primjene računala s obzirom na cijenu strojnog vremena.

Razradom i realizacijom algoritama i analizom pogreške za dobivanje približnog rješenja takvih problema bavi se numerička matematika. Centralni dio numeričke matematike čine numeričke metode. Oni moraju biti pogodni i sa stajališta primjene računala. Kako računala najčešće izvode samo četiri osnovne računske operacije (zbrajanje, oduzimanje, množenje i dijeljenje), to numerički metodi moraju biti takvi da se svode na konačan niz takvih operacija.

Među numeričkim metodama posebno su zanimljive iterativne metode, s obzirom da su veoma pogodne za primjenu na računalima. Izučavanje numeričkih metoda uključuje analizu greške, stabilnost, konvergenciju (kod iterativnih metoda), kao i niz drugih svojstava. Zato se vrlo često ovaj dio numeričke matematike naziva numerička analiza.

Problemima praktične realizacije algoritama bavi se područje teorije programiranja. Jedan od njegovih osnovnih zadaća je priprema i sastavljanje programa za računala prema izabranom algoritmu.

1.2. Elementi teorije grešaka

U skoro svim numeričkim problemima, izlazna informacija, ili kako se češće kaže numeričko rješenje, praćeno je greškama čiji izvori mogu biti različiti.

Neka je ξ točna vrijednost nekog broja i $\tilde{x}$ njegova približna vrijednost. Kažemo da $\tilde{x}$ aproksimira ξ. Broj

$$|\tilde{x} - \xi|$$

zovemo apsolutnom greškom, a broj

$$\left|\frac{\xi - \tilde{x}}{\xi}\right|$$

relativnom greškom aproksimacije.

Kažemo da je $\tilde{x} \approx \xi$ s točnošću ε, ako je

$$|\tilde{x} - \xi| \leq \varepsilon.$$

Po jednoj od mogućih klasifikacija, greške se mogu podijeliti na

1. neotklonjive greške;
2. greške zaokruživanja;
3. greške metode.

U grupu neotklonjivih grešaka ulaze greške koje proizlaze iz netočnosti ulaznih podataka. Greške ulaznih podataka (ulazne informacije) mogu se u nekim slučajevima drastično manifestirati u izlaznoj informaciji i pri uvjetu da algoritam ne unosi grešku.

Primjer 1.1. *Sustav jednadžbi (ulazna informacija)*

$$\begin{cases} 2x + 6y & = 8 \\ 2x + 6.0001y & = 8.0001 \end{cases}$$

ima rješenje (izlazna informacija) $x = 1,\ y = 1$. *Ako se koeficijenti druge jednadžbe neznatno promjene, tj. ako se uzme jednadžba*

$$2x + 5.99999y = 8.00002,$$

rješenja su $x = 10,\ y = -2$.

Uslijed zaokruživanja međurezultata u procesu računanja nastaju greške zaokruživanja.

Greške metode se javljaju usred toga što se u numeričkoj matematici obično dani problem zamjenjuje drugim koji je lakši za računanje, a čije je rješenje u izvesnom smislu blisko rješenju danog problema.

1.3. Izračunavanje vrijednosti nekih elementarnih funkcija

Jedan od najvažnijih alata u numeričkoj matematici je Taylorov teorem jer daje jednostavnu metodu aproksimacije funkcije f pomoću polinoma.

Teorem 1.1. (Taylorov teorem) *Neka funkcija f ima neprekidne derivacije do reda $n+1$, $n+1>0$, na segmentu $[a,b]$. Ako su $x, x_0 \in [a,b]$, tada je*

$$f(x) = T_n(x) + R_{n+1}(x), \tag{1.1}$$

$$\begin{aligned} T_n(x) = f(x_0) &+ \frac{(x-x_0)}{1!}f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!}f''(x_0) + \cdots \\ &+ \frac{(x-x_0)^n}{n!}f^{(n)}(x_0), \end{aligned} \tag{1.2}$$

$$R_{n+1}(x) = \frac{1}{n!}\int\limits_{x_0}^{x}(x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt = \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\vartheta), \tag{1.3}$$

za neki ϑ između x_0 i x.

Polinom T_n naziva se Taylorov razvoj funkcije u točki x_0. Ako je f beskonačno puta derivabilna, polinom T_n prelazi u red potencija, s općim članom $(x-x_0)^n$, a zove se Taylorov red. Uz pomoć Taylorovog reda lako se dobivaju poznate formule ($x_0 = 0$):

1. $f(x) = e^x$

   $$T_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}, \quad R_{n+1}(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\vartheta x},$$

   za ϑ između 0 i 1. Ako je $0 \le x \le 1$ onda

   $$|R_{n+1}(x)| \le \frac{3x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

2. $f(x) = \sin x$

   $$T_{2n-1}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}, \; R_{2n+1}(x) = (-1)^{n+1}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\cos\vartheta x,$$

   za ϑ između 0 i 1. Ako je $0 \le x \le \frac{\pi}{4}$ onda

   $$|R_{2n+1}(x)| \le \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

3. $f(x) = \cos x$

$$T_{2n}(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \; R_{2n+2}(x) = (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \cos \vartheta x,$$

za ϑ između 0 i 1. Ako je $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ onda

$$|R_{2n+2}(x)| \leq \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}.$$

4. $f(x) = \ln(1+x), \quad |x| \leq 1,$

$$T_n(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}, \; R_{n+1}(x) = (-1)^{n+2} \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\vartheta x)^{n+1}}, \tag{1.4}$$

za ϑ između 0 i 1. Ako je $0 \leq x \leq 1$ onda

$$|R_{n+1}(x)| \leq \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

Da bi smo dobili razvoj funkcije $f(x) = \ln(1-x)$ oko 0, možemo se koristiti razvojem (1.4), u koji, umjesto x, uvstimo $-x$,

$$T_n(x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \cdots - \frac{x^n}{n}, \; |x| < 1. \tag{1.5}$$

Sada za $f(x) = \ln \frac{1-x}{1+x} = \ln(1-x) - \ln(1+x)$ iz (1.4) i (1.5) imamo

$$T_{2n-1}(x) = -2 \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{x^{2n-1}}{2n-1} \right), \; |x| < 1. \tag{1.6}$$

Ako želimo izračunati vrijednost funkcije $f(x) = \ln x$ za $x > 0$ koristimo transformaciju $x = 2^m z$, gdje su z i m takvi da je $\frac{1}{2} \leq z < 1$ i $m \in \mathbf{Z}$. Tada je

$$\ln x = m \ln 2 + \ln z, \quad \text{gdje je } \ln 2 \text{ vrijednost koja se uzima iz tablice.}$$

Ako stavimo $z = \frac{1-y}{1+y}$, mora biti $0 < y \leq \frac{1}{3}$, pa $\ln z$ računamo uz pomoć od (1.6) i za grešku imamo

$$|R_{2n+1}(y)| \leq \frac{9}{4} \cdot \frac{y^{2n+1}}{2n+1}.$$

Primjer 1.2. *Izračunajte* $\sqrt[3]{e}$ *s točnošću većom od* $\varepsilon = 10^{-5}$.

Rješenje. Trebamo izračunati vrijednost funkcije $f(x) = e^x$ za $x = \frac{1}{3}$. Ukupna greška je oblika

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3,$$

gdje je ε_1 greška metode, ε_2 greška zaokruživanja i ε_3 greška zaokruživanja konačnog rezultata. Iz $\varepsilon < 10^{-5}$ imamo da treba biti $\varepsilon_1 < 0.25 \cdot 10^{-5}$, pa tražimo n za koji vrijedi da je $\left|R_{n+1}\left(\frac{1}{3}\right)\right| < 0.25 \cdot 10^{-5}$. Za $n = 6$ imamo

$$R_7\left(\frac{1}{3}\right) \leq \frac{3}{7!}\left(\frac{1}{3}\right)^7 = 0.272 \cdot 10^{-6} < 0.25 \cdot 10^{-5}.$$

Sada imamo

$$\begin{aligned} e^{\frac{1}{3}} &\approx 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{2!}\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{3!}\left(\frac{1}{3}\right)^3 + \frac{1}{4!}\left(\frac{1}{3}\right)^4 + \frac{1}{5!}\left(\frac{1}{3}\right)^5 + \frac{1}{6!}\left(\frac{1}{3}\right)^6 \\ &= 1 + 0.333333 + 0.055556 + 0.006173 + 0.000514 + 0.000034 + 0.000002 \\ &= 1.395612, \end{aligned}$$

pa je $\varepsilon_2 = 6 \cdot 0.5 \cdot 10^{-6}$, a $\varepsilon_3 = 0$. Ukupna je greška onda

$$\varepsilon = 0.272 \cdot 10^{-6} + 3 \cdot 10^{-6} + 0 = 0.3272 \cdot 10^{-6} < 10^{-5}.$$

Primjer 1.3. *Izračunajte* $\sin 36^\circ$ *s točnošću većom od* $\varepsilon = 10^{-5}$.

Rješenje. Prebacimo u radijane: $36^\circ = \frac{\pi}{5}$, pa onda trebamo izračunati vrijednost funkcije $f(x) = \sin x$ za $x = \frac{\pi}{5}$. (rj.: 0.58778)

Primjer 1.4. *Izračunajte* $\cos 1$ *s točnošću većom od* $\varepsilon = 10^{-5}$.

Rješenje. Kako je $1 \notin \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ koristimo $\cos 1 = \sin\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$, pa onda trebamo izračunati vrijednost funkcije $f(x) = \sin x$ za $x = \frac{\pi}{2} - 1$. (rj. 0.54030)

Primjer 1.5. *Izračunajte* $\sin 252^\circ 30'$ *s točnošću većom od* $\varepsilon = 10^{-5}$.

Rješenje. Kako je $\sin 252^\circ 30' = \sin(180^\circ + 72^\circ 30') = -\sin 72^\circ 30' = -\sin(90^\circ - 17^\circ 30') = -\cos 17^\circ 30' = -\cos\frac{7\pi}{72}$, pa onda trebamo izračunati vrijednost funkcije $f(x) = -\cos x$ za $x = \frac{7\pi}{72}$. (rj. -0.95372)

Primjer 1.6. *Izračunajte* $\ln 5$ *s točnošću većom od* $\varepsilon = 10^{-5}$.

Rješenje. Iz $5 = 2^3 \cdot \frac{5}{8}$ imamo $\ln 5 = 3 \cdot \ln 2 + \ln\frac{5}{8}$. Tražimo x za koji je $\frac{5}{8} = \frac{1-x}{1+x}$, pa dobijemo $x = \frac{3}{13}$. Sada trebamo izračunati vrijednost funkcije $f(x) = \ln\frac{1-x}{1+x}$ za

$x = \frac{3}{13}$. Sada tražimo n za koji vrijedi da je $\left|R_{2n+1}\left(\frac{3}{13}\right)\right| < 0.25 \cdot 10^{-5}$. Za $n = 4$ imamo

$$R_9\left(\frac{3}{13}\right) \leq \frac{9}{36}\left(\frac{3}{13}\right)^9 = 0.464 \cdot 10^{-6} < 0.25 \cdot 10^{-5}.$$

Sada imamo

$$\begin{aligned}
\ln\frac{5}{8} &\approx -2\left[\frac{3}{13} + \frac{1}{3}\left(\frac{3}{13}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{3}{13}\right)^5 + \frac{1}{7}\left(\frac{3}{13}\right)^7\right] \\
&= -2[0.230769 + 0.004096 + 0.000131 + 0.000005] \\
&= -0.470002,
\end{aligned}$$

pa je $\varepsilon_2 = 4 \cdot 0.5 \cdot 10^{-6}$, a $\varepsilon_3 = 0$. Ukupna je greška onda

$$\varepsilon = 0.464 \cdot 10^{-6} + 2 \cdot 10^{-6} + 0 = 0.2464 \cdot 10^{-6} < 10^{-5},$$

a $\ln 5 = 3 \cdot 0.693147 - 0.470002 = 1.609439$.

Zadaci za vježbu

1. S točnošću većom od 10^{-6} odredite $\cos 980°$. (rj. -0.173648)
2. S točnošću većom od 10^{-6} odredite $\cos 620°$. (rj. -0.173648)
3. S točnošću većom od 10^{-5} odredite $\ln 53$. (rj. 3.97029)
4. S točnošću većom od 10^{-5} odredite $\ln 14$. (rj. 2.63906)
5. S točnošću većom od 10^{-5} odredite $\ln 28$. (rj. 3.33221)
6. S točnošću većom od 10^{-5} odredite $\ln 56$. (rj. 4.02535)

Programska realizacija

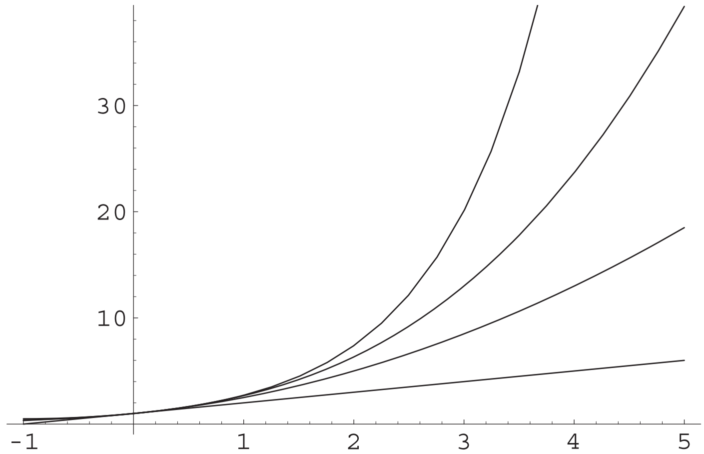
1. Za funkciju $f(x) = e^x$ nacrtajte $f(x)$, $T_1(x)$, $T_2(x)$, $T_3(x)$ na intervalu $[-1, 5]$. Za pet slučajno izabranih brojeva odredite prave greške.
2. Za funkciju $f(x) = \sin x$ nacrtajte $f(x)$, $T_1(x)$, $T_3(x)$, $T_5(x)$ na intervalu $[-3, 3]$. Za pet slučajno izabranih brojeva odredite prave greške.
3. Za funkciju $f(x) = \cos x$ nacrtajte $f(x)$, $T_2(x)$, $T_4(x)$, $T_6(x)$ na intervalu $[-3, 3]$. Za pet slučajno izabranih brojeva odredite prave greške.
4. Za funkciju $f(x) = \ln\frac{1-x}{1+x}$ nacrtajte $f(x)$, $T_1(x)$, $T_3(x)$, $T_5(x)$ na intervalu $[-1, 1]$. Za pet slučajno izabranih brojeva odredite prave greške.

```
f[x_] := Exp[x];
T1[x_] := 1 + x;
```

$$T2[x\_] := 1 + x + \frac{x^2}{2!};$$

$$T3[x\_] := 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!};$$

```
Plot[{f[x], T1[x], T2[x], T3[x]}, {x, -1, 5}]
```




```
- Graphics -

Table[Random[Real, {-1, 5}], {5}]
N[f[%] - T1[%]]

{1.78846, 0.964931, -0.551639, 4.24916, 4.3024}

{3.1918, 0.659676, 0.127644, 64.7976, 68.5748}

Table[Random[Real, {-1, 5}], {5}]
N[f[%] - T2[%]]

{3.41583, 1.66532, -0.0854065, 3.66874, 1.41046}

{20.1925, 1.23539, -0.00010165, 27.804, 0.692681}

Table[Random[Real, {-1, 5}], {5}]
N[f[%] - T3[%]]

{2.73722, 3.4791, 0.796537, 1.79811, 1.7695}

{4.54251, 14.8808, 0.0198446, 0.654566, 0.609429}
```

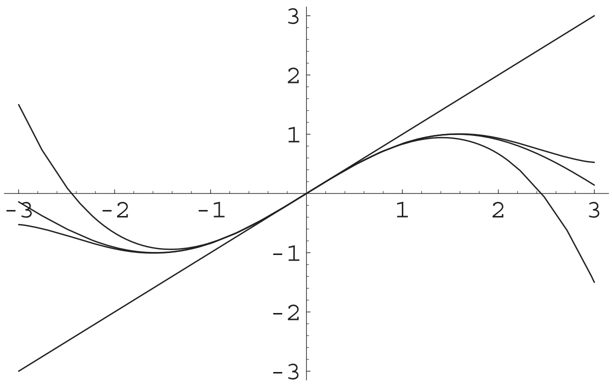
Slika 1.1.

```
f[x_] := Sin[x];
T1[x_] := x;
```

$$T3[x\_] := x - \frac{x^3}{3!};$$

$$T5[x\_] := x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!};$$

```
Plot[{f[x], T1[x], T3[x], T5[x]}, {x, -3, 3}]
```




```
- Graphics -

Table[Random[Real, {-3, 3}], {5}]
N[f[%] - T1[%]]

{-2.88667, -2.76351, -1.05201, 1.4122, 0.199089}

{2.63451, 2.39437, 0.18359, -0.424746, -0.0013126}

Table[Random[Real, {-3, 3}], {5}]
N[f[%] - T3[%]]

{-1.26487, 2.73448, 2.3972, 2.53937, 1.94666}

{-0.0259755, 1.06927, 0.576274, 0.756258, 0.213005}

Table[Random[Real, {-3, 3}], {5}]
N[f[%] - T5[%]]

{0.769546, 1.94884, -2.70979, 2.64426, 2.35371}

{-0.0000314516, -0.0201041, 0.192545, -0.16299, -0.0735915}
```

Slika 1.2.

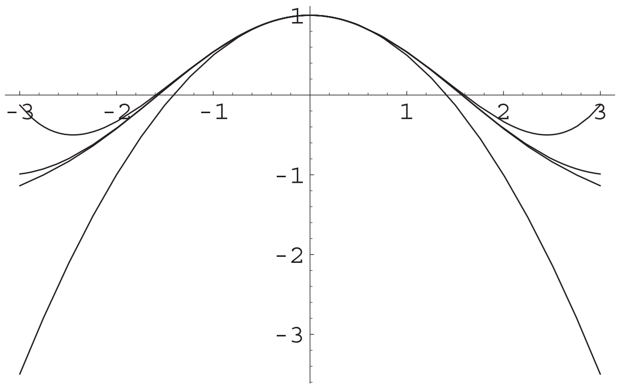
f[x_] := Cos[x];

T2[x_] := 1 - $\frac{x^2}{2!}$**;**

T4[x_] := 1 - $\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$**;**

T6[x_] := 1 - $\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!}$**;**

Plot[{f[x], T2[x], T4[x], T6[x]}, {x, -3, 3}]



- Graphics -

Table[Random[Real, {-3, 3}], {5}]
N[f[%] - T2[%]]

{-0.716474, 2.37562, -2.02448, -0.0567476, 1.54631}

{0.0107935, 1.10107, 0.610985, 4.32049×10^{-7}, 0.220021}

Table[Random[Real, {-3, 3}], {5}]
N[f[%] - T4[%]]

{-2.10348, 2.17898, -2.85485, -1.22319, -2.21681}

{-0.111256, -0.136695, -0.651809, -0.00452966, -0.151127}

Table[Random[Real, {-3, 3}], {5}]
N[f[%] - T6[%]]

{1.94249, 1.19716, 0.364615, 0.584101, 0.207362}

{0.00482256, 0.000102991, 7.73593×10^{-9}, 3.34762×10^{-7}, 8.47431×10^{-11}}

Slika 1.3.

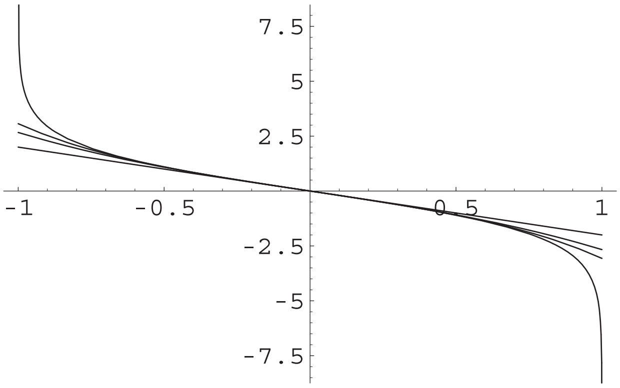
$$\mathbf{f[x\_] := Log\left[\frac{1-x}{1+x}\right];}$$

$$\mathbf{T1[x\_] := -2\,x;}$$

$$\mathbf{T3[x\_] := -2\left(x+\frac{x^3}{3}\right);}$$

$$\mathbf{T5[x\_] := -2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}\right);}$$

Plot[{f[x], T1[x], T3[x], T5[x]}, {x, -1, 1}]



- Graphics -

Table[Random[Real, {-1, 1}], {5}]
N[f[%] - T1[%]]

{0.105283, 0.811652, 0.852874, 0.775428, 0.64565}

{-0.000783214, -0.640398, -0.827453, -0.516746, -0.244306}

Table[Random[Real, {-1, 1}], {5}]
N[f[%] - T3[%]]

{-0.40199, -0.612517, -0.620816, -0.515143, 0.110694}

{0.00475383, 0.0476442, 0.0515181, 0.0179886, -6.70669×10^{-6}}

Table[Random[Real, {-1, 1}], {5}]
N[f[%] - T5[%]]

{-0.0295261, 0.575209, 0.585127, 0.270875, -0.0474815}

{5.59334×10^{-12}, -0.00806243, -0.00920333, -0.0000324276, 1.55727×10^{-10}}

Slika 1.4.