4. Numeričke metode u linearnoj algebri

4.1. Matrice

Matrica je matematički objekt koji se sastoji od (relanih ili kompleksnih) brojeva koji su raspoređeni u retke i stupce. Zapisuje se u obliku pravokutne sheme, a brojeve od kojih se sastoji zovemo elementima matrice. Matrica A sa m redaka, n stupaca i s elementima a_{ij} zapisuje se kao

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = (a_{ij}).$$

Takvu matricu zovemo $m \times n$ (čitaj: m puta n) matrica ili matrica tipa (reda, dimenzije) $m \times n$. Pritom niz brojeva $a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}, \ldots, a_{in}$ zovemo i-ti redak, a niz brojeva $a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{mj}$ poredanih jedan ispod drugog, j-ti stupac matrice A. Ako vrijedi $m = n$, kažemo da je A kvadratna matrica reda n.

Matricu sa samo jednim retkom zovemo jednoretčana matrica, a matricu sa samo jednim stupcem zovemo jednostupčana matrica. Matrica A je jednaka matrici B ako imaju isti broj redaka i isti broj stupaca i za njihove elemente vrijedi $a_{ij} = b_{ij}$, za sve i i j. S $M_{m,n}$ označavat ćemo skup svih $m \times n$ matrica.

4.1.1. Matrične operacije

Neka su $A, B \in M_{m,n}$. Matricu $C \in M_{m,n}$ s elementima

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \quad 1 \leq i \leq m, \quad 1 \leq j \leq n$$

zovemo zbrojem ili sumom matrica A i B i pišemo $C = A + B$.

Ako je $A \in M_{m,n}$ i $c \in \mathbf{R}$, matricu $B \in M_{m,n}$ s elementima

$$b_{ij} = c a_{ij}, \quad 1 \leq i \leq m, \quad 1 \leq j \leq n$$

zovemo umnožak ili produkt matrice sa skalarom c i označavamo $B = cA$.

Neka je $A \in M_{m,n}$ i $B \in M_{n,p}$. Umnožak ili produkt matrica A i B je matrica $C = A \cdot B \in M_{m,p}$ kojoj su elementi određeni formulom

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \quad \text{za sve} \quad 1 \leq i \leq m, \quad 1 \leq j \leq p.$$

Važnu klasu matrica čine dijagonalne matrice. Najpoznatiji primjer dijagonalne matrice je jedinična matrica

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \in M_{n,n}.$$

Malo općenitija, dijagonalna matrica je ona kvadratna matrica kod koje su svi izvandijagonalni elementi jednaki nuli. Dijagonalnu matricu kojoj su dijagonalni elementi $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ označavamo s $\text{diag}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, tj.

$$\text{diag}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \ddots & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & \ddots & \alpha_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha_n \end{bmatrix}.$$

Nul-matrica je matrica kojoj su svi elementi nula i kraće se označava s O i, također pripada klasi dijagonalnih matrica.

Potencije kvadratne matrice A definiraju se induktivno:

$$A^0 = I, \quad A^{r+1} = AA^r \quad \text{za} \quad r \geq 0.$$

Lako se pokaže da vrijedi $A^p A^q = A^q A^p = A^{p+q}$ za sve nenegativne cijele brojeve p i q. Stoga je dobro definiran matrični polinom

$$p(A) = \alpha_k A^k + \alpha_{k-1} A^{k-1} + \ldots + \alpha_1 A + \alpha_0 I,$$

pri čemu su $\alpha_0, \ldots, \alpha_k$ realni brojevi.

Postoji još jedna vrlo korisna operacija na matricama. Naziva se operacijom transponiranja.

Neka je $A \in M_{m,n}$. Matrica $A^T \in M_{m,n}$ naziva se transponirana matrica matrici A, ako je svaki redak od A^T jednak odgovarajućem stupcu matrice A. Prema tome, transponiranu matricu dobivamo tako da stupce (retke) matrice zamijenimo njenim retcima (stupcima). Ako je

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \text{onda je} \quad A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Glavna svojstva operacije transponiranja su

(a) $(A^T)^T = A$,

(b) $(A + B)^T = A^T + B^T$,

(c) $(AB)^T = B^T A^T$.

4.1.2. Determinanta

Determinanta kvadratne matrice je funkcija det : $M_{n,n} \to \mathbf{C}$ i označavamo je s $\det A, |A|$ ili

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Definiramo je induktivno po redu matrice:

$$n = 1, \quad A = [a_{11}] \Rightarrow \det A = a_{11}$$

$$n = 2, \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \Rightarrow \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_1$$

Za matrice višeg reda determinata se definira (a može se izračunati i njena vrijednost) koristeći tzv. razvoj determinante po retku ili stupcu, koji se još naziva i Laplaceov razvoj determinante.

Neka je $A \in M_{n,n}$. S $M_{ij} \in M_{n-1,n-1}$ označit ćemo podmatricu od A koja nastaje izbacivanjemnjenog i-tog retka i j-tog stupca. Npr. ako je

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,j-1} & a_{1j} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,j-1} & a_{ij} & a_{i,j+1} & \cdots & a_{i,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{nj} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

onda je

$$M_{ij} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Minora elementa a_{ij} matrice $A \in M_{n,n}$ je detreminanta matrice M_{ij}. **Algebarski komplement** elementa a_{ij} je skalar $A_{ij} = (-1)^{i+j} \det M_{ij}$.

Sada, za $A \in M_{n,n}$ vrijedi

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij}, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Ovu formulu nazivamo razvoj determinante po i-tom retku. Isto tako vrijedi formula Sada, za $A = (a_{ij}) \in M_{n,n}$ vrijedi

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij}, \quad 1 \leq j \leq n$$

koju nazivamo razvoj determinante po j-tom stupcu.

Sada možemo definirati adjungiranu matricu kvadratne matrice A reda n, s

$$A^* = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}^T.$$

Adjungirana matrica ima svojstvo:

$$AA^* = A^*A = (\det A)I.$$

Stoga, ako je A nesingularna matrica ($\det A \neq 0$), vrijedi

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^{*}.$$

Programska realizacija

1. Neka su matrice $A \in M_{3,2}$, $B \in M_{3,2}$, $P \in M_{3,3}$ zadane na sljedeći način:

$$a_{ij} = \frac{1}{i+j}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad P = \mathrm{diag}(1, 2, 7).$$

Izračunajte determinantu matrice $(AB^T P)^T - (2P)^{-1}$.

```
A = Table[1/(i + j), {i, 3}, {j, 2}];
B = {{4, 2}, {1, 6}, {0, 1}};
P = DiagonalMatrix[{1, 2, 7}];
Det[Transpose[A.Transpose[B].P] - Inverse[2 * P]]

391/2520
```

Slika 4.1.

2. Neka su matrice $A \in M_{3,3}$ i $B \in M_{3,3}$ zadane na sljedeći način:

$$a_{ij} = \frac{(i-j)^2}{j+1}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 7 & 1 \\ 4 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Izračunajte determinantu matrice $(10A^{-1}B^{-1})^T - AB^3$.

```
A = Table[(i - j)^2/(j + 1), {i, 3}, {j, 3}];
B = (1 2 4
     3 7 1
     4 2 2);
Det[Transpose[10 * Inverse[A].Inverse[B]] - A.MatrixPower[B, 3]]
```

$-\frac{4223181}{32}$

Slika 4.2.

3. Neka su matrice $A \in M_{2,3},\ B \in M_{3,2},\ P \in M_{2,2}$ zadane na sljedeći način:

$$a_{ij} = \frac{i+j}{2}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 7 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad P = \mathrm{diag}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

Izračunajte $((AB)^3 - (PAB)^{-1})^T$.

```
A = Table[(i + j)/2, {i, 2}, {j, 3}];
B = (1 0
     2 7
     1 3);
P = DiagonalMatrix[{1/2, 1/2}];
MatrixForm[Transpose[MatrixPower[A.B, 3] - Inverse[P.A.B]]]
```

$$\begin{pmatrix} \frac{13957}{3} & \frac{18206}{3} \\ \frac{100133}{8} & \frac{131283}{8} \end{pmatrix}$$

Slika 4.3.

4. Neka su matrice $A \in M_{4,2}$ i $B \in M_{2,4}$ zadane na sljedeći način:

$$a_{ij} = \frac{i+j}{2}, \quad b_{ij} = 2i - j.$$

Izračunajte $((2BA)^T - (A^T B^T)^{-1})^T$.

```
A = Table[(i + j)/2, {i, 4}, {j, 2}];
B = Table[2 i - j, {i, 2}, {j, 4}];
MatrixForm[Transpose[Transpose[2 * B.A] - Inverse[Transpose[A].Transpose[B]]]]
```

$$\begin{pmatrix} -\frac{109}{10} & -\frac{133}{10} \\ \frac{76}{5} & \frac{107}{5} \end{pmatrix}$$

Slika 4.4.

5. Niz (jednoretčana matrica) je definiran na sljedeći način:

$$V = [5, 17, -3, 8, 0, -1, 12, 15, 20, -6, 6, 4, -7, 16].$$

Napišite program koji udvostručuje vrijednost pozitivnih elemenata djeljivih s 3 ili 5, a podiže na treću potenciju vrijednost negativnih elemanata većih od -5.

```
V = {5, 17, -3, 8, 0, -1, 12, 15, 20, -6, 6, 4, -7, 16};
n = Length[V];
For[k = 1, k ≤ n, k = k + 1,
  If[V[[k]] > 0 && (IntegerQ[V[[k]]/3] == True || IntegerQ[V[[k]]/5] == True),
   V[[k]] = 2 * V[[k]],
   If[V[[k]] < 0 && V[[k]] > -5,
    V[[k]] = V[[k]]^3
   ]
  ]
]
Print[V]

{10, 17, -27, 8, 0, -1, 24, 30, 40, -6, 12, 4, -7, 16}
```

Slika 4.5.

6. Napišite program koji formira matricu tipa $m \times n$ s elementima koje imaju sljedeće vrijednosti: u prvom retku vrijednosti elemenata su redni brojevi stupaca; vrijednost svakog elementa u prvom stupcu jednaka je rednom broju retka. Vrijednosti svih ostalih elemenata izračunavaju se tako da se zbroje vrijednosti elemenata iznad i lijevo od njega.

```
m = 4;
n = 5;
A = Table[0, {i, m}, {j, n}];
For[k = 1, k ≤ m, k = k + 1,
 For[h = 1, h ≤ n, h = h + 1,
  If[k == 1,
   A[[k, h]] = h,
   If[h == 1,
    A[[k, h]] = k,
    A[[k, h]] = A[[k, h - 1]] + A[[k - 1, h]]
   ]
  ]
 ]
]
MatrixForm[A]
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 7 & 11 & 16 \\ 3 & 7 & 14 & 25 & 41 \\ 4 & 11 & 25 & 50 & 91 \end{pmatrix}$$

Slika 4.6.

4.2. Direktne metode

Jedan od najvažnijih problema linearne algebre jest rješavanje sustava linearnih algebarskih jednadžbi

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m. \end{array} \tag{4.1}$$

Uvođenjem matrice sustava $A \in M_{m,n}$, jednostupčane matrice rješenja $x \in M_{n,1}$ i jednostupčane matrice desne strane sustava $b \in M_{m,1}$,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix},$$

sustav (4.1.) prelazi u matrični problem

$$Ax = b.$$

Najraširenija direktna metoda ili algoritam za rješavanje sustava linearnih jednadžbi je Gaussova metoda eliminacije. Ona se satoji u tome da se sustav (4.1.) elementarnim transformacijama svede na ekvivalentan, iz kojeg ćemo moći odrediti njegovo rješenje. Dva sustava nazivamo ekvivalentnim ukoliko imaju isti skup rješenja. Pri svođenju sustava na ekvivalentan koristimo se sa sljedećim elementarnim transformacijama:

- zamjena dvaju redaka,
- množenje retka skalarom različitim od nule,
- dodavanjem nekom retku drugog retka pomnoženog skalarom različitim od nule.

Primjer 4.1. *Sustav* $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x - 2y + z = 0 \\ 2x + z = 0 \end{cases}$ *riješite*

(a) invertiranjem matrice sustava,

(b) Gaussovom metodom.

Rješenje. (a) Iz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ imamo $A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -2 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & -3 \end{bmatrix}$, pa je $x = A^{-1}b = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -2 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$.

$$(b) \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & -1 & -6 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -4 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right].$$

Programska realizacija:

```
Solve[{x + y + z == 3, x - 2 y + z == 0, 2 x + z == 0}, {x, y, z}]

{{x → -2, y → 1, z → 4}}
```

Slika 4.7.

4.3. Iteracijske metode

Rješenje linearnog sustava $Ax = b$ općenito ne možemo izračunati apsolutno točno. Također, u nekim primjenama niti točno rješenje $x = A^{-1}b$ nije puno bolje od neke dovoljno dobre aproksimacije $\tilde{x}$. Dakle, Gaussove eliminacije, koje su jednostavno konačan niz formula koje vode rješenju sustava, ne garantiraju idealnu točnost.

Nadalje, u praksi moramo biti svjesni da je računalo omeđeno ne samo u pitanju numeričke točnosti nego i u još dva važna aspekta: raspoloživom memorijskom prostoru i vremenu izvršavanja. Kod rješavanja sustava velikih dimenzija proces Gaussovih eliminacija je često praktično neupotrbljiv.

Zbog svega navedenog postoji potreba za drugačije pristupe rješavanja linearnih sustava a to su iteracijske metode. Kod iteracijskih metoda polazimo od linearnog sustava jednadžbi

$$Ax = b, \quad \det A \neq 0$$

i nekog početnog vektora $x^{(0)}$ tako da iteracijom oblika

$$x^{(k+1)} = \phi\left(x^{(k)}\right), \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

generiramo niz

$$x^{(0)} \to x^{(1)} \to x^{(2)} \to \cdots$$

od koga tražimo da konvergira rješenju sustava

$$\lim_{k\to\infty} x^{(k)} = x = A^{-1}b.$$

4.3.1. Jacobijeva metoda

Ideju Jacobijeve metode ilustrirat ćemo na primjeru 2×2 sustava

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &=& b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &=& b_2 \end{array}, \quad a_{11} \neq 0, \; a_{22} \neq 0.$$

Uočimo da rješenje $x = [x_1, x_2]^T$ zadovoljava

$$\begin{array}{rcl} x_1 &=& \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2) \\ x_2 &=& \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1) \end{array}.$$

Te relacije motiviraju da neku približnu vrijednost rješenja $x^{(0)} = [x_1^{(0)}, x_2^{(0)}]^T$ korigiramo pomoću formula

$$\begin{array}{rcl} x_1^{(1)} &=& \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2^{(0)}) \\ x_2^{(1)} &=& \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1^{(0)}) \end{array}.$$

Na isti način možemo iskoristiti $x^{(1)}$ da dobijemo sljedeću aproksimaciju, $x^{(2)}$, zatim $x^{(3)}$, itd. Primijetimo da vrijedi

$$\begin{bmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a_{11}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_{22}} \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -a_{12} \\ -a_{21} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \end{bmatrix} \right).$$

Općenito, ako stavimo

$$A = D - N, \quad D = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad N = \begin{bmatrix} 0 & -a_{12} & -a_{13} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & 0 & -a_{23} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & -a_{n3} & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \tag{4.2}$$

onda možemo jednostavno pisati

$$x^{(k+1)} = D^{-1}(b + Nx^{(k)}) = D^{-1}Nx^{(k)} + D^{-1}b. \tag{4.3}$$

Relacijom (4.3) definirana je Jacobijeva iterativna metoda.

Korištenjem (4.3) i relacije

$$b = Ax = (D - N)x, \tag{4.4}$$

lako izračunamo ponašanje greške $e^{(k)} = x^{(k)} - x$. Vrijedi

$$e^{(k+1)} = x^{(k+1)} - x = D^{-1}N(x^{(k)} - x) = D^{-1}Ne^{(k)}. \tag{4.5}$$

Sada

$$e^{(k)} = D^{-1}Ne^{(k-1)} = (D^{-1}N)^2 e^{(k-2)} = (D^{-1}N)^k e^{(0)},$$

gdje je $e^{(0)} = x^{(0)} - x$ greška prve iteracije $x^{(0)}$.

Za konvergenciju metode imamo sljedeći teorem:

Teorem 4.1. *Ako je matrica A dijagonalno dominantna u smislu da je*

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}|, \quad i = 1, \ldots, n,$$

onda niz generiran Jacobijevom metodom s proizvoljnim $x^{(0)}$ konvergira prema rješenju sustava $Ax = b$.

Primjer 4.2. *Neka je $A = \begin{bmatrix} 2 & 0.1 \\ -0.1 & 2 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 19.9 \\ -3 \end{bmatrix}$, $x = A^{-1}b = \begin{bmatrix} 10 \\ -1 \end{bmatrix}$. Matricu A napišemo kao u relaciji (4.2). Za početnu iteraciju uzmimo jednostupčanu matricu*

$$x^{(0)} = D^{-1}b = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 19.9 \\ -3 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 9.949999 \\ -1.5 \end{bmatrix}.$$

Sada iteriramo kao u relaciji (4.3) i dobijemo

$$\begin{aligned} x^{(1)} &= \begin{bmatrix} 10.025 \\ -1.0025 \end{bmatrix} \\ x^{(2)} &= \begin{bmatrix} 10.000125 \\ -0.99875 \end{bmatrix} \\ x^{(3)} &= \begin{bmatrix} 9.999937 \\ -0.999994 \end{bmatrix} \\ x^{(4)} &= \begin{bmatrix} 9.999999 \\ -1.000003 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Greška je $\varepsilon_4 = \sqrt{(9.999999-10)^2 + (-1.000003+1)^2} = 0.3162 \cdot 10^{-5}$.

Programska realizacija

```
A = ( 2.    0.1 );
    ( -0.1  2.  )
b = ( 19.9 );
    ( -3.  )
n = Length[b];
DJ = Table[0, {i, n}, {j, n}];
NJ = Table[0, {i, n}, {j, n}];
For[i = 1, i ≤ n, i = i + 1,
  For[j = 1, j ≤ n, j = j + 1,
    If[i == j,
      DJ[[i, j]] = A[[i, j]],
      NJ[[i, j]] = -A[[i, j]]
     ];
   ];
 ];
m = 100;
x[0] = Inverse[DJ].b;
For[k = 1, k ≤ m, k = k + 1,
  x[k] = Inverse[DJ].b + Inverse[DJ].NJ.x[k - 1]
 ];
Print["x=", MatrixForm[x[m]]]

x=( 10. )
  ( -1. )
```

Slika 4.8.

4.3.2. Gauss-Seidelova metoda

Gauss-Seidelova metoda je metoda iteracije u kojoj se aproksimacija elementa jednostupčane matrice rješenja izračunata u novom koraku iteracije odmah koristi za računanje aproksimacije sljedeće koordinate. Polazimo od sustava jednadžbi

$$Ax = b, \quad \det A \neq 0$$

i rastavu $A = L - U$ gdje je

$$L = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad U = -\begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

Gauss-Seidelovu metodu iteracije zapisujemo kao

$$x^{(k+1)} = L^{-1}(b + Ux^{(k)}), \quad k = 0, 1, \ldots \tag{4.6}$$

Kao i u analizi Jacobijeve metode, dobivamo da je

$$e^{(k)} = (L^{-1}U)^k e^{(0)}, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{4.7}$$

Primjetimo da smo kod Jacobijeve metode $x_1^{(1)}$ i $x_2^{(1)}$ računali nevisno, pomoću $x_1^{(0)}$ i $x_2^{(0)}$. Kod Gauss-Seidelove iterativne metode u formuli za $x_2^{(1)}$ umjesto $x_1^{(0)}$ koristimo novu, upravo izračunatu vrijednost $x_1^{(1)}$. Općenito, formulu za $x^{(k+1)}$ modificiramo tako da u svakoj komponenti koristimo najsvježije izračunate vrijednosti:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \right), \quad i = 1, \ldots, n.$$

Primjer 4.3. *Guss-Seidelovom metodom riješite sustav*

$$\begin{cases} 7.6x_1 + 4.1x_2 + 1.1x_3 = 2.5 \\ 3.3x_1 + 10.8x_2 - 3.2x_3 = 1.2 \\ 1.3x_1 + 0.8x_2 + 4.3x_3 = 3.4 \end{cases}.$$

Rješenje. Gauss-Seidelovom metodom

$$L = \begin{bmatrix} 7.6 & 0 & 0 \\ 3.3 & 10.8 & 0 \\ 1.3 & 0.8 & 4.3 \end{bmatrix}, \quad U = -\begin{bmatrix} 0 & 4.1 & 1.1 \\ 0 & 0 & -3.2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 2.5 \\ 1.2 \\ 3.4 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad L^{-1} = \begin{bmatrix} 0.132 & 0 & 0 \\ -0.04 & 0.093 & 0 \\ -0.032 & -0.017 & 0.233 \end{bmatrix},$$

pa dobijemo formule:

$$\begin{aligned}
x_1^{(k+1)} &= \frac{1}{7.6}(2.5 - 4.1x_2^{(k)} - 1.1x_3^{(k)}) = 0.132(2.5 - 4.1x_2^{(k)} - 1.1x_3^{(k)}) \\
x_2^{(k+1)} &= \frac{1}{10.8}(1.2 - 3.3x_1^{(k+1)} + 3.2x_3^{(k)}) \\
&= 0.093(1.2 + 3.2x_3^{(k)}) - 0.04(2.5 - 4.1x_2^{(k)} - 1.1x_3^{(k)}) \\
x_3^{(k+1)} &= \frac{1}{4.3}(3.4 - 1.3x_1^{(k+1)} - 0.8x_2^{(k+1)}) \\
&= 0.791 - 0.017(1.2 + 3.2x_3^{(k)}) - 0.032(2.5 - 4.1x_2^{(k)} - 1.1x_3^{(k)}).
\end{aligned}$$

Ako za početnu vrijednost uzmemo $x^{(0)} = [0.111, 0.329, 0.790]^T$ u osmoj iteraciji dobijemo rješenje $x^{(8)} = [0.061, 0.304, 0.716]^T$.

Programska realizacija

```
A = (7.6   4.1   1.1 )        (2.5)
    (3.3   10.8  -3.2) ;  b = (1.2) ;
    (1.3   0.8   4.3 )        (3.4)
n = Length[b];
L = Table[0, {i, n}, {j, n}]; U = Table[0, {i, n}, {j, n}];
For[i = 1, i ≤ n, i = i + 1,
  For[j = 1, j ≤ n, j = j + 1,
    If[i >= j,
      L[[i, j]] = A[[i, j]],
      U[[i, j]] = -A[[i, j]]
     ];
   ];
 ];
m = 100;
x[0] = Inverse[L].b;
For[k = 1, k ≤ m, k = k + 1,
  x[k] = Inverse[L].b + Inverse[L].U.x[k - 1]
 ];
Print["x=", MatrixForm[x[m]]]

   (0.0611331)
x= (0.304453 )
   (0.715573 )
```

Slika 4.9.