5. Metoda najmanjih kvadrata

5.1. Diskretni slučaj

Neka je funkcija f zadana na diskretnom skupu točaka $x_0, \ldots, x_n$ i neka je za $n \geq m$ zadana aproksimacijska funkcija

$$\varphi(x, a_0, \ldots, a_m).$$

Funkcija φ određuje se iz uvjeta da suma kvadrata razlika između funkcije i aproksimacijske funkcije u čvorovima bude minimalna, tj. moramo minimizirati S,

$$S = \sum_{k=0}^{n} (f(x_k) - \varphi(x_k))^2 \to \min.$$

Ovu funkciju S interpretiramo kao funkciju nepoznatih parametara

$$S = S(a_0, \ldots, a_m).$$

Očito je uvijek $S \geq 0$, bez obzira kakvi su parametri. Dakle, zadatak je minimizirati funkciju S kao funkciju više varijabli $a_0, \ldots, a_m$. Nužni uvjet ekstrema je

$$\frac{\partial S}{\partial a_k} = 0, \quad k = 0, \ldots, m.$$

Dobili smo tzv. sustav normalnih jednadžbi.

Ilustrirajmo to sada na slučaju kada je aproksimacijska funkcija pravac:

Zadane su točke $(x_0, f(x_0)), \ldots, (x_n, f(x_n))$ koje po diskretnoj metodi najmanjih kvadrata aproksimiramo pravcem

$$\varphi(x) = a_0 + a_1 x.$$

Greška aproksimacije u čvorovima koju minimiziramo je

$$S = S(a_0, a_1) = \sum_{k=0}^{n} (f(x_k) - \varphi(x_k))^2 = \sum_{k=0}^{n} (f(x_k) - a_0 - a_1 x_k)^2 \to \min.$$

Nađimo parcijalne derivacije po prametrima a_0 i a_1:

$$0 = \frac{\partial S}{\partial a_0} = -2\sum_{k=0}^{n}(f(x_k) - a_0 - a_1 x_k),$$
$$0 = \frac{\partial S}{\partial a_1} = -2\sum_{k=0}^{n}(f(x_k) - a_0 - a_1 x_k)x_k.$$

Dijeljenjem s -2 i sređivanjem po nepoznanicama $a_0,\ a_1$, dobivamo linearni sustav

$$\begin{aligned} a_0(n+1) + a_1\sum_{k=0}^{n} x_k &= \sum_{k=0}^{n} f(x_k) \\ a_0\sum_{k=0}^{n} x_k + a_1\sum_{k=0}^{n} x_k^2 &= \sum_{k=0}^{n} f(x_k)x_k, \end{aligned}$$

pa je

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{\sum_{k=0}^{n} x_k^2 \sum_{k=0}^{n} f(x_k) - \sum_{k=0}^{n} x_k \sum_{k=0}^{n} f(x_k)x_k}{(n+1)\sum_{k=0}^{n} x_k^2 - \left(\sum_{k=0}^{n} x_k\right)^2}, \\ a_1 &= \frac{(n+1)\sum_{k=0}^{n} x_k f(x_k) - \sum_{k=0}^{n} x_k \sum_{k=0}^{n} f(x_k)}{(n+1)\sum_{k=0}^{n} x_k^2 - \left(\sum_{k=0}^{n} x_k\right)^2}. \end{aligned} \tag{5.1}$$

Za funkciju φ možemo uzeti i funkciju s općenitim baznim funkcijama $\varphi_0, \ldots . \varphi_m$

$$\varphi(x) = a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) + \cdots + a_m\varphi_m(x).$$

U tom slučaju

$$S = \sum_{k=0}^{n}\left(f(x_k) - \sum_{i=0}^{m} a_i\varphi_i(x_k)\right)^2 \ \Rightarrow\ \frac{\partial S}{\partial a_j} = -2\sum_{k=0}^{n}\left(f(x_k) - \sum_{i=0}^{m} a_i\varphi_i(x_k)\right)(\varphi_j(x_k)) = 0,$$

pa dobijemo sustav

$$\begin{array}{ccccccccc} a_0\langle\varphi_0,\varphi_0\rangle & + & a_1\langle\varphi_1,\varphi_0\rangle & + & \cdots & + & a_m\langle\varphi_m,\varphi_0\rangle & = & \langle f,\varphi_0\rangle \\ a_0\langle\varphi_0,\varphi_1\rangle & + & a_1\langle\varphi_1,\varphi_1\rangle & + & \cdots & + & a_m\langle\varphi_m,\varphi_1\rangle & = & \langle f,\varphi_1\rangle \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_0\langle\varphi_0,\varphi_m\rangle & + & a_1\langle\varphi_1,\varphi_m\rangle & + & \cdots & + & a_m\langle\varphi_m,\varphi_m\rangle & = & \langle f,\varphi_m\rangle \end{array}, \tag{5.2}$$

gdje je za funkcije g i h, $\langle g,h\rangle = \sum_{k=0}^{n} g(x_k)h(x_k)$.

Primjer 5.1. *Metodom najmanjih kvadrata odredite polinome prvog i drugog stupnja koji aproksimiraju podatke*

x_k	0	0.4	0.8	1.2	1.6	2.0
$f(x_k)$	0.21	1.25	2.31	2.70	2.65	3.20

.

Rješenje. 1) $P_1 : \varphi(x) = a_0 + a_1 x$

$$n = 5, \quad \sum_{k=0}^{5} x_k = 6, \quad \sum_{k=0}^{5} x_k^2 = 8.8, \quad \sum_{k=0}^{5} x_k f(x_k) = 16.228, \quad \sum_{k=0}^{5} f(x_k) = 12.32.$$

Iz (5.1) imamo

$$a_0 = \frac{8.8 \cdot 12.32 - 6 \cdot 16.228}{6 \cdot 8.8 - 36} = 0.6576, \quad a_1 = \frac{6 \cdot 16.228 - 6 \cdot 12.32}{6 \cdot 8.8 - 36} = 1.3957,$$

pa je $\varphi(x) = 0.6576 + 1.3957x$.

2) $P_2 : \varphi(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$

Ako u sustav (5.2) stavimo $m = 2$ i $\varphi_0(x) = 1, \ \varphi_1(x) = x, \ \varphi_2(x) = x^2$ imamo

$$\begin{array}{rcccccl} a_0(n+1) & + & a_1 \sum_{k=0}^5 x_k & + & a_2 \sum_{k=0}^5 x_k^2 & = & \sum_{k=0}^5 f(x_k) \\ a_0 \sum_{k=0}^5 x_k & + & a_1 \sum_{k=0}^5 x_k^2 & + & a_2 \sum_{k=0}^5 x_k^3 & = & \sum_{k=0}^5 f(x_k) x_k \,, \\ a_0 \sum_{k=0}^5 x_k^2 & + & a_1 \sum_{k=0}^5 x_k^3 & + & a_2 \sum_{k=0}^5 x_k^4 & = & \sum_{k=0}^5 f(x_k) x_k^2 \end{array}$$

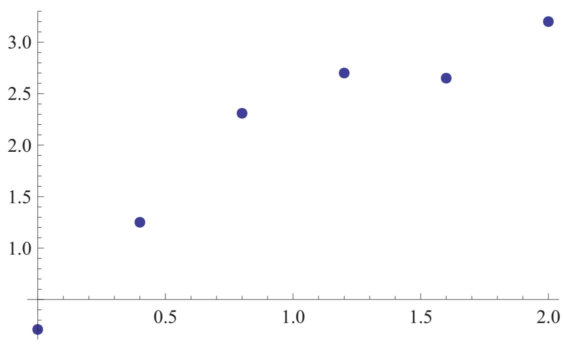
pa iz $\sum_{k=0}^5 x_k^3 = 14.4, \ \sum_{k=0}^5 x_k^4 = 25.0624, \ \sum_{k=0}^5 f(x_k) x_k^2 = 25.1504$ imamo

$$\begin{array}{rcccccl} 6a_0 & + & 6a_1 & + & 8.8a_2 & = & 12.32 \\ 6a_0 & + & 8.8a_1 & + & 14.4a_2 & = & 16.228 \ . \\ 8.8a_0 & + & 14.4a_1 & + & 25.0624a_2 & = & 25.1504 \end{array}$$

Rješenje sustava je $a_0 = 0.2475, \ a_1 = 2.9337, \ a_2 = -0.769$ pa je polinom $\varphi(x) = 0.2475 + 2.9337x - 0.769x^2$.

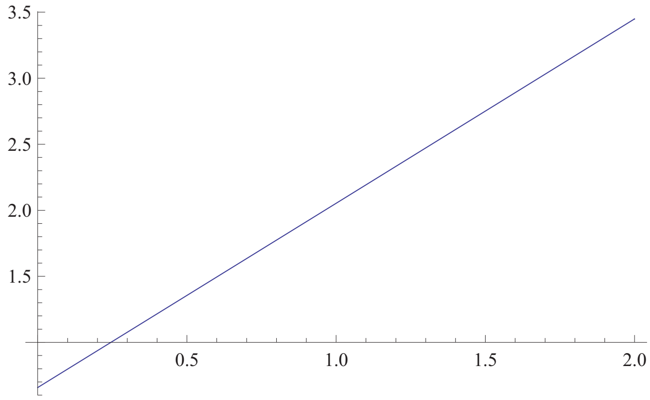
Programska realizacija

```
p1 = ListPlot[{{0, 0.21}, {0.4, 1.25}, {0.8, 2.31}, {1.2, 2.70}, {1.6, 2.65}, {2.0, 3.20}},
  PlotStyle → PointSize[0.02]]
```



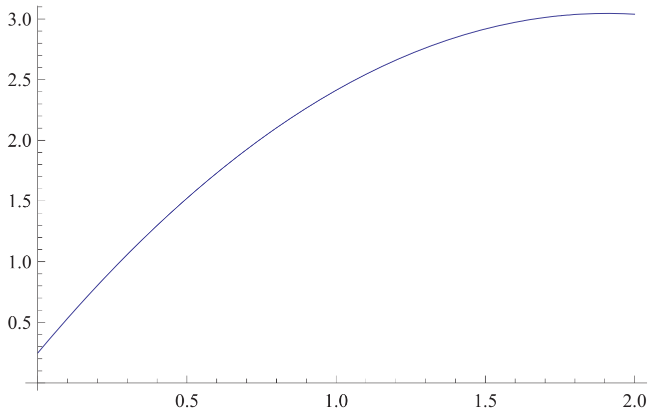
Slika 5.1.

```
Fit[{{0, 0.21}, {0.4, 1.25}, {0.8, 2.31}, {1.2, 2.70}, {1.6, 2.65}, {2.0, 3.20}}, {1, x}, x]
0.657619 + 1.39571 x
p2 = Plot[0.6576190476190477` + 1.3957142857142855` x, {x, 0, 2}]
```



Slika 5.2.

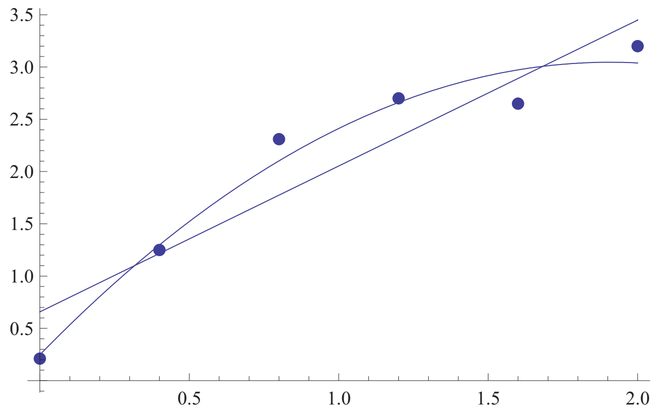
```
Fit[{{0, 0.21}, {0.4, 1.25}, {0.8, 2.31},
  {1.2, 2.70}, {1.6, 2.65}, {2.0, 3.20}}, {1, x, x^2}, x]
0.2475 + 2.93366 x - 0.768973 x^2
p3 = Plot[0.2475000000000004` + 2.9336607142857134` x - 0.768973214285714` x^2, {x, 0, 2}]
```



Slika 5.3.

```
In[31]:= Show[{p1, p2, p3}]
```

Out[31]=



Slika 5.4.

Funkcija φ može i nelinearno ovisiti o parametrima. U tom slučaju često možemo jednostavnim transformacijama problem transformirati u linearni problem najmanjih kvadrata:

(a) Funkcija

$$\varphi(x) = a_0 e^{a_1 x}$$

linearizira se logaritmiranjem

$$\psi(x) = \ln \varphi(x) = \ln a_0 + a_1 x, \quad y_k = \ln f(x_k), \quad k = 0, \ldots, n,$$

pa dobivamo linearni problem najmanjih kvadrata

$$\tilde{S} = \tilde{S}(b_0, b_1) = \sum_{k=0}^{n} (y_k - \psi(x_k))^2 = \sum_{k=0}^{n} (y_k - b_0 - b_1 x_k)^2 \to \min,$$

gdje je

$$b_0 = \ln a_0, \quad b_1 = a_1.$$

(b) Funkcija

$$\varphi(x) = a_0 x^{a_1}$$

linearizira se logaritmiranjem

$$\psi(x) = \log \varphi(x) = \log a_0 + a_1 \log x, \quad y_k = \log f(x_k), \quad k = 0, \ldots, n.$$

Drugim riječima, dobili smo linearni problem najmanjih kvadrata

$$\tilde{S} = \tilde{S}(b_0, b_1) = \sum_{k=0}^{n} (y_k - b_0 - b_1 \log x_k)^2 \to \min,$$

gdje je

$$b_0 = \log a_0, \quad b_1 = a_1.$$

(c) Funkcija

$$\varphi(x) = \frac{1}{a_0 + a_1 x}$$

linearizira se na sljedeći način

$$\psi(x) = \frac{1}{\varphi(x)} = a_0 + a_1 x, \quad y_k = \frac{1}{f(x_k)}, \quad k = 0, \ldots, n.$$

Pripadni linearni problem najmanjih kvadrata je

$$\tilde{S} = \tilde{S}(a_0, a_1) = \sum_{k=0}^{n} (y_k - a_0 - a_1 x_k)^2 \to \min.$$

(d) Funkciju

$$\varphi(x) = \frac{x}{a_0 + a_1 x}$$

možemo linearizirati na više načina. Prvo možemo staviti

$$\psi(x) = \frac{1}{\varphi(x)} = a_0 \frac{1}{x} + a_1, \quad y_k = \frac{1}{f(x_k)}, \quad k = 0, \ldots, n.$$

Pripadni linearni problem najmanjih kvadrata je

$$\tilde{S} = \tilde{S}(a_0, a_1) = \sum_{k=0}^{n} (y_k - a_0 \frac{1}{x_k} - a_1)^2 \to \min.$$

Može se koristiti i sljedeći način

$$\psi(x) = \frac{x}{\varphi(x)} = a_0 + a_1 x, \quad y_k = \frac{x_k}{f(x_k)}, \quad k = 0, \ldots, n.$$

Pripadni linearni problem najmanjih kvadrata je

$$\tilde{S} = \tilde{S}(a_0, a_1) = \sum_{k=0}^{n} (y_k - a_0 - a_1 x_k)^2 \to \min.$$

(e) Funkcija

$$\varphi(x) = \frac{1}{a_0 + a_1 e^{-x}}$$

linearizira se stavljanjem

$$\psi(x) = \frac{1}{\varphi(x)} = a_0 + a_1 e^{-x}, \quad y_k = \frac{1}{f(x_k)}, \quad k = 0, \ldots, n.$$

Pripadni linearni problem najmanjih kvadrata je

$$\tilde{S} = \tilde{S}(a_0, a_1) = \sum_{k=0}^{n} (y_k - a_0 - a_1 e^{-x_k})^2 \to \min.$$

Primjer 5.2. *Odredite vezu oblika* $(x-1)^a = 2(3y+5)^b$ *za podatke*

x_k	1.30	1.35	1.40	1.50	1.58
y_k	5.10	4.00	2.60	1.00	0.33

.

Rješenje. Linearizacijom dobijemo

$$a\ln(x-1) = \ln 2 + b\ln(3y+5) \;\Rightarrow\; \ln(3y+5) = -\frac{\ln 2}{b} + \frac{a}{b}\ln(x-1),$$

pa ako stavimo

$$\hat{y}_k = \ln(3y_k+5), \quad \hat{x}_k = \ln(x_k-1) \text{ i } a_0 = -\frac{\ln 2}{b}, \; a_1 = \frac{a}{b}$$

imamo linerani problem najmanjih kvadrata

$$\tilde{S} = \tilde{S}(a_0,a_1) = \sum_{k=0}^{4}(\hat{y}_k - a_0 - a_1\hat{x}_k)^2 \to \min.$$

Pripadna tablica za $\hat{x}_k$ i $\hat{y}_k$ je

$\hat{x}_k$	-1.204	-1.0498	-0.9163	-0.6931	-0.5447
$\hat{y}_k$	3.0106	2.8332	2.5494	2.0794	1.7901

pa je

$$n = 4, \quad \sum_{k=0}^{4}\hat{x}_k = -4.4079, \quad \sum_{k=0}^{4}\hat{x}_k^2 = 4.1684,$$

$$\sum_{k=0}^{4}\hat{x}_k\hat{y}_k = -11.3514, \quad \sum_{k=0}^{4}\hat{y}_k = 12.2627.$$

Iz (5.1) $a_0 = 0.7647, \; a_1 = -1.9146$ pa je tražena veza

$$(x-1)^{1.7354} = 2(3y+5)^{-0.9064}.$$

Zadaci za vježbu

1. Metodom najmanjih kvadrata odredite parametre p i q tako da funkcija $y = \frac{1}{px^2+q}$ najbolje aproksimira tablicu:

x_k	0	1	1.5	2
y_k	1	0.5	0.4	0.2

. (rj. $y = \frac{1}{0.96x^2+0.88}$)

2. Odredite funkcionalnu zavisnost oblika $\frac{x}{ax+b}$ koja najbolje aproksimira tablicu:

x_k	15	20	30	40
y_k	15.4	16.3	17.2	17.8

. (rj. $y = \frac{x}{0.05x+0.21}$.)

3. Odredite vezu oblika $(x-1)^a = 4(2y+1)^b$ ako je

x_k	1.30	1.35	1.40	1.50	1.58
y_k	5.10	4.00	2.60	1.00	0.33

. (rj. $(x-1)^{-4.115} = 4(2y+1)^{1.393}$.)

4. Odredite vezu oblika $y = \frac{1}{ax+b}$ ako je

x_k	4.48	4.98	5.60	6.11	6.62	7.42
y_k	4.15	1.95	1.31	1.03	0.75	0.63

. (rj. $y = \frac{1}{0.468x-1.843}$)

5. Metodom najmanjih kvadrata odredite vezu oblika $y = ae^{bx}$ za podatke

x_k	0.5	1	1.5	2	3
y_k	0.1	0.2	0.5	1.9	4.2

. (rj. $y = 0.05e^{1.58x}$)

6. Za funkciju $y = f(x)$ zadanu tablicom, pravac dobiven metodom najmanjih kvadrata ima jednadžbu $y = 3x + 4$. Izračunajte vrijednosti od a i b ako je tablica dana s

x_k	0	1	2	4	7	9
$f(x_k)$	0	4	3	a	30	b

. (rj. $a = 35.8,\ b = 20.2$)

7. Za funkciju zadanu tablicom polinom prvog stupnja dobiven metodom najmanjih kvadrata ima jednadžbu $10y - 17x + 11 = 0$. Izračunajte vrijednosti od a i b ako je tablica dana s

x_k	0	2	3	4	6
y_k	0	1	a	b	8

. (rj. $a = 0,\ b = 11$)

8. Zadane su točke $T_0(1,1),\ T_1(2,3),\ T_2(4,2)$ i $T_3(6,4)$. Nađite točku u kojoj se pravac $p_1(x)$ za kojeg je izraz $\sum_{i=0}^{3}(y_i - p_1(x_i))^2$ minimalan siječe s pravcem $q_1(y)$ za kojeg je izraz $\sum_{i=0}^{3}(x_i - q_1(y_i))^2$ minimalan. (rj. $T(1.24, 1.61)$)

9. Metodom najmanjih kvadrata odredite vezu oblika $x^a \cdot y = b$ ako su podaci dani tablicom

x_k	1	2	3	5	7
y_k	5.1	1.2	0.4	0.26	0.073

, te za tako dobiveni a i b izračunajte $\sum_{i=0}^{4}(b/x_i^a - y_i)^2$. (rj. $x^{2.0713} \cdot y = 4.9594$, $\sum_{i=0}^{4}(b/x_i^a - y_i)^2 = 0.0393$)

10. Koristeći metodu najmanjih kvadrata odredite vezu oblika $(a-x)y = bx$ ako su podaci dani tablicom

x_k	2.1	3.1	4.0	4.9	5.7
y_k	62	8.7	6.2	4.9	4.3

. (rj. $(2.03 - x)y = -2.88x$)

11. Odredite funkcionalnu zavisnost oblika $y = e^{\frac{a}{x+b}}$ koja najbolje aproksimira tablicu:

x_k	0	1	2	3
y_k	1.65	1.4	1.28	1.22

. (rj. $y = e^{\frac{0.983}{x+1.952}}$)

12. Odredite vezu oblika $a2^x + b3^y = 1$ ako je

x_k	−1	0	1	2	3
y_k	0.7	1	1.4	2	2.6

. (rj. $-2.33 \cdot 2^x + 1.13 \cdot 3^y = 1$)

13. Metodom najmanjih kvadrata odredite vezu oblika $ax + by = xy$ ako je

x_k	−1	1	2	3
y_k	1.1	−1.7	−4.8	−15.1

. (rj. $5.98x + 0.75y = xy$)

14. Metodom najmanjih kvadrata odredite vezu oblika $x^{y^a} = b$ ako je

x_k	10	100	1000	10000	10^5
y_k	2	1	0.6	0.5	0.4

. (rj. $x^{y^{0.99}} = 97.92$)

15. Metodom najmanjih kvadrata odredite vezu oblika $a^x b^y = 10$ ako je

x_k	-2	-1	0	1	2
y_k	1.6	1.3	1	0.7	0.4

. (rj. $1.99^x 10^y = 10$)

16. Odredite vezu oblika $x^a \cdot y^2 = b$, ako je

x_k	1	2	3	4	5
y_k	1.4	1	0.8	0.7	0.6

. (rj. $x^{1.04} y^2 = 2$)

5.2. Neprekidni slučaj

Ako je funkcija f zadana u svim točkama nekog intervala $[a, b]$, onda se funkcija kvadratne greške S definira pomoću integrala

$$S(a_0, a_1, \ldots, a_m) = \int_a^b [f(x) - \varphi(x)]^2 dx \to \min,$$

gdje je $\varphi(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m$.

Za linearnu funkciju $\varphi(x) = a_0 + a_1 x$ pa onda imamo

$$0 = \frac{\partial S}{\partial a_0} = -2 \int_a^b [f(x) - a_0 - a_1 x] dx,$$

$$0 = \frac{\partial S}{\partial a_1} = -2 \int_a^b [f(x) - a_0 - a_1 x] x dx.$$

Dijeljenjem s -2 i sređivanjem po nepoznanicama a_0, a_1, dobivamo sustav

$$\begin{aligned} a_0(b-a) + a_1 \int_a^b x dx &= \int_a^b f(x) dx \\ a_0 \int_a^b x dx + a_1 \int_a^b x^2 dx &= \int_a^b x f(x) dx, \end{aligned}$$

$$a_0 = \frac{\int_a^b x^2 dx \int_a^b f(x) dx - \int_a^b x dx \int_a^b x f(x) dx}{(b-a) \int_a^b x^2 dx - \left(\int_a^b x dx \right)^2},$$

$$a_1 = \frac{(b-a)\int\limits_a^b xf(x)dx - \int\limits_a^b xdx \int\limits_a^b f(x)dx}{(b-a)\int\limits_a^b x^2dx - \left(\int\limits_a^b xdx\right)^2}. \tag{5.3}$$

Za funkciju s općenitim baznim funkcijama dobijemo sustav kao i u (5.2) samo što je sada sklarani produkt za dvije funkcije g i h definiran s $\langle g,h\rangle = \int\limits_a^b g(x)h(x)dx$.

Primjer 5.3. *Metodom najmanjih kvadrata aproksimirajte funkciju* $f(x) = e^x$ *na intervalu* $[0,1]$ *polinomom prvog stupnja.*

Rješenje.

$$\int_0^1 xdx = \frac{1}{2}, \quad \int_0^1 x^2dx = \frac{1}{3}, \quad \int_0^1 e^x dx = e-1,$$

$$\int_0^1 xe^x dx = xe^x\Big|_0^1 - \int_0^1 e^x dx = e - e + 1 = 1,$$

pa iz (5.3) imamo

$$a_0 = \frac{\frac{1}{3}(e-1) - \frac{1}{2}}{\frac{1}{3} - \frac{1}{4}} = 0.87, \quad a_1 = \frac{1 - \frac{1}{2}(e-1)}{\frac{1}{3} - \frac{1}{4}} = 1.69,$$

iz čega dobivamo $\varphi(x) = 0.87 + 1.69x$.

Programska realizacija

```
f[x_] := Exp[x]; a = 0; b = 1;
Ix = ∫_a^b x dx; Ix2 = ∫_a^b x^2 dx;
Ifu = ∫_a^b f[x] dx; Ifx = ∫_a^b x * f[x] dx;
A0 = N[(Ix2 * Ifu - Ix * Ifx) / ((b - a) * Ix2 - (Ix)^2)];
A1 = N[((b - a) * Ifx - Ix * Ifu) / ((b - a) * Ix2 - (Ix)^2)];
Print["φ(x)=", A0, "+", A1, "x"]
φ(x)=0.873127+1.69031x
```

Slika 5.5.

Zadaci za vježbu

1. Metodom najmanjih kvadrata aproksimirajte funkciju $f(x) = \ln x$ za $x \in [1, e]$ polinomom prvog stupnja. (rj. $\varphi(x) = -0.47 + 0.56x$)
2. Funkciju $f(x) = x^{2/3}$ aproksimirajte metodom najmanjih kvadrata polinomom prvog stupnja za $x \in [0, 1]$. Na osnovu toga približno izračunajte $\sqrt[3]{0.16}$. (rj. $\varphi(x) = 0.15 + 0.9x$, $\sqrt[3]{0.16} \approx 0.51$)
3. Funkciju $y = x^{1/3}$ aproksimirajte metodom najmanjih kvadrata polinomom prvog stupnja za $x \in [0, 1]$. Nacrtajte graf funkcije i dobivenog polinoma. (rj. $\varphi(x) = 0.43 + 0.64x$)
4. Metodom najmanjih kvadrata aproksimirajte funkciju $f(x) = \sqrt{x-1}$ na intervalu $[2, 5]$ polinomom prvog stupnja. (rj. $\varphi(x) = 0.41 + 0.33x$)
5. Metodom najmanjih kvadrata aproksimirajte funkciju $f(x) = \cos x$ na intervalu $[1, \pi/2]$ polinomom prvog stupnja. (rj. $\varphi(x) = 1.5 - 0.95x$)
6. Metodom najmanjih kvadrata odredite polinom prvog stupnja za funkciju $f(x) = |x - 1|$ na intervalu $[0, 2]$. (rj. $\varphi(x) = 0.5$)
7. Metodom najmanjih kvadrata aproksimirajte funkciju $f(x) = \sqrt{x}$ za $x \in [0, 1]$ polinomom prvog stupnja. (rj. $\varphi(x) = 0.27 + 0.8x$)
8. Metodom najmanjih kvadrata aproksimirajte funkciju $f(x) = \sqrt{1+x}$ na intervalu $[0, 3]$ polinomom prvog stupnja. (rj. $\varphi(x) = 1.07 + 0.33x$)
9. Metodom najmanjih kvadrata odredite polinom prvog stupnja za funkciju $f(x) = \frac{10}{x^2+10}$ na segmentu $[-1, 1]$. (rj. $\varphi(x) = 0.97$)
10. Metodom najmanjih kvadrata aproksimirajte funkciju $f(x) = 3^x$ na intervalu $[-1, 1]$. (rj. $\varphi(x) = 1.21 + 1.24x$)
11. Metodom najmanjih kvadrata odredite polinom prvog stupnja za funkciju $f(x) = \sin |x|$ na intervalu $[-\pi/2, \pi/2]$. (rj. $\varphi(x) = \frac{2}{\pi}$)

5.3. Trigonometrijski polinom; Fourierov polinom

Ako na intervalu $[0, 2\pi]$ za bazne funkcije $\varphi_k(x)$ uzmemo trigonometrijske funkcije

$$\{1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \ldots, \cos mx, \sin mx\}$$

tada je aproksimacijska funkcija trigonometrijski polinom m-tog reda:

$$T_m(x) = A_0 + A_1 \cos x + B_1 \sin x + A_2 \cos 2x + B_2 \sin 2x + \ldots + A_m \cos mx + B_m \sin mx.$$

Za općeniti interval $[0, 2L]$ bazne su funkcije

$$\left\{1, \cos\frac{\pi x}{L}, \sin\frac{\pi x}{L}, \cos\frac{2\pi x}{L}, \sin\frac{2\pi x}{L}, \ldots, \cos\frac{m\pi x}{L}, \sin\frac{m\pi x}{L}\right\}, \tag{5.4}$$

a trigonometrijski polinom

$$\begin{aligned} T_m(x) \;=\; & A_0 + A_1 \cos\frac{\pi x}{L} + B_1 \sin\frac{\pi x}{L} + A_2 \cos\frac{2\pi x}{L} + B_2 \sin\frac{2\pi x}{L} + \ldots \\ & + \; A_m \cos\frac{m\pi x}{L} + B_m \sin\frac{m\pi x}{L}. \end{aligned}$$

Za $k, l \in \mathbf{N_0}$ vrijedi

$$\int_0^{2L} \sin\frac{k\pi x}{L} \sin\frac{l\pi x}{L} dx = -\frac{1}{2} \int_0^{2L} \left(\cos\frac{k+l}{L}\pi x - \cos\frac{k-l}{L}\pi x\right) dx.$$

U slučaju da je $k = l$, onda je prethodni integral jednak

$$-\frac{1}{2}\left[\frac{\sin\frac{k+l}{L}\pi x}{\frac{k+l}{L}\pi} - x\right]\Bigg|_0^{2L} = L.$$

Ako je $k \neq l$, onda je jednak

$$-\frac{1}{2}\left[\frac{\sin\frac{k+l}{L}\pi x}{\frac{k+l}{L}\pi} - \frac{\sin\frac{k-l}{L}\pi x}{\frac{k-l}{L}\pi}\right]\Bigg|_0^{2L} = 0.$$

Drugim riječima vrijedi

$$\int_0^{2L} \sin\frac{k\pi x}{L} \sin\frac{l\pi x}{L} dx = \begin{cases} 0, \; k \neq l, \\ L, \; k = l, \end{cases} \quad k, l = 1, \ldots, m,$$

Na sličan način, pretvaranjem produkta trigonometrijskih funkcija u zbroj, možemo pokazati da je

$$\int_0^{2L} \cos\frac{k\pi x}{L} \cos\frac{l\pi x}{L} dx = \begin{cases} 0, & k \neq l, \\ 2L, & k = l = 0, \\ L, & k = l > 0, \end{cases} \quad k, l = 0, \ldots, m,$$

te također, da je

$$\int_0^{2L} \sin\frac{k\pi x}{L} \cos\frac{l\pi x}{L} dx = 0, \quad k = 1, \ldots, m \;\; l = 0, \ldots, m.$$

Iz ovog se dobije da je matrica sustava (5.2) za bazne funkcije (5.4) dijagonalna pa njegovim rješavanjem za koeficijente polinoma dobijemo $A_0 = \frac{1}{2L}\int_0^{2L} f(x)dx$ i

$$A_k = \frac{1}{L}\int_0^{2L} f(x)\cos\frac{k\pi x}{L}dx, \quad B_k = \frac{1}{L}\int_0^{2L} f(x)\sin\frac{k\pi x}{L}dx, \quad k = 1, \ldots, m.$$

Trigonometrijski polinom u kome su koeficijenti određeni na ovaj način zovemo Fourierov polinom m-tog stupnja, a koeficijente Fourierovi koeficijenti.

Greška aproksimacije s Fourierovim polinomom je

$$\begin{aligned}\varepsilon_m &= \int_0^{2L}\left[f(x) - \sum_{i=0}^{m}\left(A_i\cos\frac{i\pi x}{L} + B_i\sin\frac{i\pi x}{L}\right)\right]^2 dx\\ &= \int_0^{2L} f(x)^2dx - 2L\left[A_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}(A_i^2 + B_i^2)\right].\end{aligned}$$

Primjer 5.4. *Aproksimirajte funkciju $f(x) = x,\ x \in [0, 2\pi]$ trigonometrijskim polinomom prvog stupnja.*

Rješenje.

$$T_1 = A_0 + A_1\cos x + B_1\sin x, \quad A_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} xdx = \pi,$$

$$A_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\cos xdx = \frac{1}{\pi}x\sin x\Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\sin xdx = 0,$$

$$B_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\sin xdx = -\frac{1}{\pi}x\cos x\Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\cos xdx = -2,$$

pa je

$$T_1(x) = \pi - 2\sin x.$$

Greška aproksimacije je

$$\varepsilon_1 = \int_0^{2\pi} x^2dx - 2\pi[\pi^2 + \frac{1}{2}\cdot 4] = \frac{2\pi^3}{3} - 4\pi \approx 8.$$

Programska realizacija

```
m = 1;
L = π;
f[x_] := x;
A = Table[0, {i, 0, m}];
B = Table[0, {i, 1, m}];
T = A[[0]] = 1/(2 L) ∫_0^(2*L) f[x] dx;
For[k = 1, k ≤ m, k = k + 1,
  {A[[k]] = 1/L ∫_0^(2*L) f[x] * Cos[(k * π * x)/L] dx, B[[k]] = 1/L ∫_0^(2*L) f[x] * Sin[(k * π * x)/L] dx,
   T = T + A[[k]] * Cos[(k * π * x)/L] + B[[k]] * Sin[(k * π * x)/L]}
 ];
Print["T", m, "(x)=", T]

T1(x)=π - 2 Sin[x]
```

Slika 5.6.

Zadaci za vježbu

1. U smislu srednjekvadratne aproksimacije odredite trigonometrijski polinom drugog stupnja $T_2(x)$ koji najbolje aproksimira funkciju $f(x) = x - 1$ za $x \in [0,2]$, te odredite grešku te aproksimacije. Izračunajte $f(0)-T_2(0)$, $f(1)-T_2(1)$, $f(1.5)-T_2(1.5)$. (rj. $T_2(x) = -\frac{2}{\pi}\sin\pi x - \frac{1}{\pi}\sin 2\pi x$, $\varepsilon_2 = 0.16$)
2. U smislu srednjekvadratne aproksimacije odredite trigonometrijski polinom drugog stupnja koji najbolje aproksimira funkciju $f(x) = \begin{cases} x, & x \in [0,1] \\ 2-x, & x \in [1,2] \end{cases}$, te odredite grešku te aproksimacije. (rj. $T_2(x) = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\cos\pi x$, $\varepsilon_2 = 0.33$)
3. Odredite trigonometrijski polinom prvog stupnja koji funkciju $f(x) = x^2$, $x \in [0, 2\pi]$ najbolje aproksimira u smislu metode najmanjih kvadrata. (rj. $T_1(x) = \frac{4}{3}\pi^2 + 4\cos x - 4\pi\sin x$)
4. Odredite trigonometrijski polinom prvog stupnja koji funkciju $f(x) = \sin x$, $x \in [0,2]$ najbolje aproksimira u smislu metode najmanjih kvadrata. (rj. $T_1(x) = \sin^2 1 - \frac{(-1+\cos 2)\cos\pi x}{\pi^2-1} - \frac{\pi\sin 2\sin\pi x}{\pi^2-1}$)
5. Odredite trigonometrijski polinom prvog stupnja koji u smislu metode najmanjih kvadrata najbolje aproksimira funkciju $f(x) = \begin{cases} -1, & x \in [-\pi, 0) \\ 1, & x \in (0, \pi] \end{cases}$.

(rj. $T_1(x) = \frac{4}{\pi}\sin x$)

6. Odredite trigonometrijski polinom prvog stupnja koji u smislu metode najmanjih kvadrata najbolje aproksimira funkciju $f(x) = |\sin x|$ na intervalu $(-\pi, \pi)$. (rj. $T_1(x) = \frac{2}{\pi}$)
7. Odredite trigonometrijski polinom prvog stupnja koji najbolje aproksimira funkciju $f(x) = |x|$ na intervalu $[-\pi, \pi]$ u smislu metode najmanjih kvadrata. (rj. $T_1(x) = \pi - 2\sin x$)
8. Odredite trigonometrijski polinom prvog stupnja koji u smislu metode najmanjih kvadrata najbolje aproksimira funkciju $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0,1] \\ -1, & x \in (1,2] \end{cases}$. Odredite kvadratnu grešku te aproksimirajte i nacrtajte grafove funkcije i polinoma. (rj. $T_1(x) = \frac{4}{\pi}\sin \pi x$)