6. Nelinearne jednadžbe i sustavi

6.1. Osnovne napomene

Neka je I interval u $\mathbf{R}$, $f : I \to \mathbf{R}$ neprekidna funkcija na I i neka je dana jednadžba

$$f(x) = 0. \tag{6.1}$$

Riješiti jednadžbu (6.1) znači naći one x za koje vrijedi jednakost (6.1). Svi takvi x čine skup rješenja (korijeni ili nultočke) jednadžbe (6.1). Uobičajena podjela jednadžbi je na:

1. Algebarske koje su oblika

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0, \quad a_n \neq 0. \tag{6.2}$$

2. Transcedentne, tj. one koje nisu algebarske.

Algebarske jednadžbe do uključivo četvrtog stupnja, $n \leq 4$, možemo riješiti direktno, kao npr. kvadratne jednadžbe. Ta rješenja su dana formulama, koje se zbog složenosti rijetko koriste. Za opće rješenje jednadžbe stupnja $n \geq 5$ to je neizvedivo, što znači da ne možemo napisati formulu s konačnim brojem operacija (zbrajanje, oduzimanje, množenje, dijeljenje, potenciranje i korijenovanje) nad koeficijentima jednadžbe i realnim brojevima.

Ipak i kod algebarskih jednadžbi do uključivo četvrtog stupnja, često egzaktno rješenje koje je izraženo simbolički ne zadovoljava potrebe, s obzirom da se traži numerički rezultat. Tako npr. kada je potrebno odrediti pozitivni korijen jednadžbe

$$x^k - c = 0 \quad (k > 1, \quad c > 0),$$

traženo egzaktno rješenje je $x = \sqrt[k]{c}$. Međutim simbol $\sqrt[k]{}$ ne rješava problem, jer ne daje postupak izračunavanja broja x.

Stoga i kod rješavanja algebarskih jednadžbi trebamo metode kojimo aproksimiramo rješenja.

Traženje nultočki na zadanu točnost u $\mathbf{R}$ (aproksimativna rješenja) bilo algebarskih bilo transcedentnih jednažbi sastoji se od dvije faze:

1. Izolacija jedne ili više nultočki, tj. nalaženje intervala I unutar kojeg se nalazi bar jedna nultočka.

2. Iterativno nalaženje nultočke na traženu točnost (iterativni postupak). To je postupak kojim nalazimo niz brojeva $x_n,\ n = 0, 1, 2, \ldots$ koji predstavljaju približne vrijednosti rješenja. Cilj je dobiti približno rješenje u granicama unaprijed zadane točnosti. Da bi se to ostvarilo približna rješenja x_n trebaju težiti k rješenju ξ. Ako se to događa, tj. ako niz (x_n) konvergira, i ako je

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \xi,$$

onda kažemo da iterativni ostupak konvergira k rješenju. Član x_n zove se n-ta aproksimacija rješenja ξ. Naravno, možemo naći samo konačno mnogo članova niza. Tako se moramo zadovoljiti s približnim rješenjem. Koja će aproksimacija biti dovoljno dobra ovisi o tome kolika je greška dozvoljena. Prema tome bit će nam važno znati ocijeniti grešku koju činimo kad pravo rješenje ξ zamjenimo s n-tom aproksimacijom.

Navedimo i nekoliko činjenica potrebnih kod rješavanja nelinearnih jednadžbi:

1. Ako je f neprekidna i na krajevima segmenta $[a, b]$ prima vrijednosti sa suprotnim predznacima, tj. $f(a)f(b) < 0$, onda unutar segmenta $[a, b]$ postoji barem jedno rješenje jednadžbe $f(x) = 0$.

2. Ako derivacija f' na $[a, b]$ ima isti predznak i vrijedi $f(a)f(b) < 0$, onda je rješenje jedinstveno (f je strogo monotona na $[a, b]$).

Za ocjenu greške aproksimacije vrijedi sljedeća činjenica:

Teorem 6.1. *Neka je ξ točna, a $\tilde{x}$ aproksimativna vrijednost rješenja jednadžbe $f(x) = 0$ koja pripada segmentu $[a, b]$ i neka je $0 < m_1 = \min_{x\in[a,b]} |f'(x)|$. Tada vrijedi sljedeća ocjena*

$$|\tilde{x} - \xi| \le \frac{|f(\tilde{x})|}{m_1}. \tag{6.3}$$

Dokaz. Iz Teorema srednje vrijednosti imamo

$$\frac{f(\tilde{x}) - f(\xi)}{\tilde{x} - \xi} = f'(c), \quad c \in (a, b),$$

pa kako je $f(\xi) = 0$

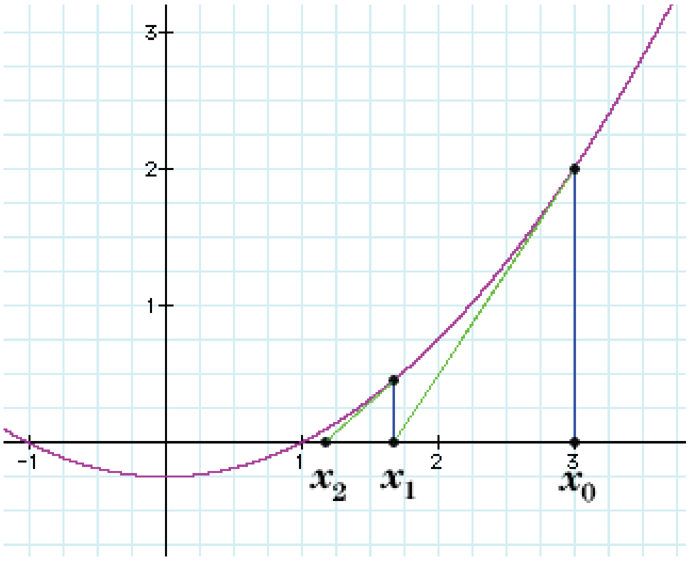
$$|\tilde{x} - \xi| = \frac{|f(\tilde{x})|}{|f'(c)|} \le \frac{|f(\tilde{x})|}{m_1}.$$

□

Postoji mnogo metoda za nalaženje nultočaka nelinearnih funkcija a mi ćemo razmotriti Newtonovu metodu (metoda tangente), metodu sekante i metodu jednostavnih iteracija.

6.2. Newtonova metoda (metoda tangente)

Pretpostavimo da je zadana početna točka x_0. Ideja Newtonove metode je povući tangentu na krivulju $y = f(x)$ u točki $(x_0, f(x_0))$ i definirati novu aproksimaciju x_1 u točki gdje ona siječe os x.



Slika 6.1.

Geometrijski izvod je jednostavan. U točki x_0 napiše se jednadžba tangente i pogleda se gdje siječe os x. Jednadžba tangente je

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0),$$

odakle izlazi da je nova aproksimacija $x_1 := x$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Na isti način dalje dobivamo točku x_2 (v. sl. 6.1.):

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}.$$

Iz ovog je opisa jasno zašto se Newtonova metoda još zove i metoda tangente.

Do Newtonove metode može se doći i na drugačiji način. Pretpostavimo li da je funkcija f dva puta derivabilna (na nekom području oko ξ, $f(\xi) = 0$), onda prema Taylorovoj formuli imamo

$$0 = f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0),$$

pa za $x_1 := x$ dobivamo novu aproksimaciju.

U sljedećem teoremu su dani dovoljni uvjeti pod kojima postupak konvergira.

Teorem 6.2. *Neka je $f(a)f(b) < 0$ i neka f' i f'' ne mijenjaju predznak na $[a, b]$. Ako pođemo od neke točke $x_0 \in [a, b]$ za koju vrijedi*

$$f(x_0)f''(x_0) > 0$$

i definiramo niz (x_n) s

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

onda niz (x_n) konvergira k jedinstvenom rješenju ξ jednadžbe $f(x) = 0$.

Dokaz. Pretpostavimo, na primjer, da je $f'(x) > 0$ i $f''(x) > 0$ na cijelom $[a, b]$. Tada f raste, pa mora biti $f(a) < 0$ i $f(b) > 0$. Zbog $f''(x) > 0$, za startnu iteraciju x_0 mora vrijediti $f(x_0) > 0$. U praksi možemo uzeti $x_0 = b$ jer je to jedina točka za koju sigurno znamo da vrijedi $f(x_0) > 0$.

Neka je $(x_n, n \in \mathbf{N_0})$ niz iteracija generiran Newtonovom metodom iz startne točke x_0 za koju je $f(x_0) > 0$. Znamo da je $x_0 > \xi$ i tvrdimo da je $\xi < x_n \leq x_0$ za svaki $n \in \mathbf{N_0}$. Dokaz koristi matematičku indukciju, pri čemu bazu već imamo. Pretpostavimo da pretpostavka vrijedi za $k = n$, tj. $\xi < x_k \leq x_0$. Prema Taylorovoj formuli

$$0 = f(\xi) = f(x_k) + f'(x_k)(\xi - x_k) + \frac{f''(c_n)}{2}(\xi - x_k)^2,$$

pri čemu je $c_n \in (\xi, x_k) \subset [a, b]$. Zbog $f''(c_n) > 0$ imamo

$$f(x_k) + f'(x_k)(\xi - x_k) < 0,$$

odakle slijedi

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} > \xi.$$

Time je dokazan korak indukcije, pa slijedi da je niz (x_n) omeđen. Kako je $f(x_k) > 0$ i $f'(x_k) > 0$ iz

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

imamo

$$x_{k+1} < x_k \leq x_0,$$

što pokazuje da niz (x_n) monotono pada. Kako je taj padajući niz omeđen s ξ odozdo, postoji limes

$$\bar{\xi} := \lim_{n\to\infty} x_n,$$

za koji vrijedi $\xi \le \bar{\xi} \le x_0$, tj. $\bar{\xi} \in [a, b]$. Prijelazom na limes u formuli za Newtonove iteracije dobivamo

$$\bar{\xi} = \bar{\xi} - \frac{f(\bar{\xi})}{f'(\bar{\xi})},$$

odakle koristeći $f'(\bar{\xi}) \neq 0$, slijedi $f(\bar{\xi}) = 0$. Kako je ξ jedina nultočka od f u intervalu $[a, b]$, mora vrijediti $\xi = \bar{\xi}$.

Preostala tri slučaja za predznake prve i druge derivacije dokazuju se potpuno analogno. □

Napomena 6.1. *Primjetimo da ako je $f(a)f(b) < 0$ i $f'(x) > 0$ za $x \in [a, b]$ tada $f(a) < 0$ i $f(b) > 0$. Analogno za $f'(x) < 0$, $f(a) > 0$ i $f(b) < 0$. Tada, ako je $f''(x) > 0$ i $f'(x) > 0$ da bi bio ispunjen uvjet $f(x_0)f''(x_0) > 0$ možemo uzeti $x_0 = b$, a kad je $f''(x) < 0$ i $f'(x) > 0$, $x_0 = a$. Analogno dobijemo da je za $f''(x) < 0$ i $f'(x) > 0$, $x_0 = a$ i za $f''(x) < 0$ i $f'(x) < 0$, $x_0 = b$.*

Izvedimo sada formulu za ocjenu pogreške. Iz Taylorove formule imamo

$$\begin{aligned} f(x_n) &= f[x_{n-1} + (x_n - x_{n-1})] \\ &= f(x_{n-1}) + f'(x_{n-1})(x_n - x_{n-1}) + \frac{1}{2} f''(c_n)(x_n - x_{n-1})^2, \end{aligned} \tag{6.4}$$

gdje je $c_n \in (x_{n-1}, x_n)$. Po definiciji iteracija u Newtonovoj metodi vrijedi i

$$f(x_{n-1}) + f'(x_{n-1})(x_n - x_{n-1}) = 0,$$

što uvršteno u (6.4) daje

$$f(x_n) = \frac{1}{2} f''(c_n)(x_n - x_{n-1})^2.$$

Dakle,

$$|f(x_n)| \le \frac{1}{2} M_2 (x_n - x_{n-1})^2$$

gdje je $M_2 = \max_{x \in [a,b]} |f''(x)|$.

Kombinacijom ove ocjene i (6.3) dobivamo

$$|\xi - x_n| \le \frac{M_2}{2m_1}(x_n - x_{n-1})^2,$$

što se može iskoristiti u praksi. Ako je ε tražena točnost za apsolutnu grešku, onda test

$$\frac{M_2}{2m_1}(x_n - x_{n-1})^2 \le \varepsilon$$

garantira da je $|\xi - x_n| \le \varepsilon$.

Primjer 6.1. *Neka je $k > 1$ prirodan broj, i neka je $c > 0$. Nađimo, pomoću Newtonove metode, približnu vrijednost pozitivnog k-tog korijena iz c.*

Rješenje. Izračunati k-ti korijen iz broja c znači riješiti po x jednadžbu

$$x^k - c = 0.$$

Ovdje je $f(x) = x^k - c$, $f'(x) = kx^{k-1}$, pa Newtonova metoda daje

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^k - c}{kx_n^{k-1}},$$

odnosno

$$x_{n+1} = \frac{1}{k}\left((k-1)x_n + \frac{c}{x_n^{k-1}}\right).$$

Što se tiče izbora početne aproksimacije x_0 i konvergencije, primijetimo sljedeće. Za $0 < a < \sqrt[k]{c} < b$ imamo $f(a)f(b) < 0$. Zatim, zbog $f'(x) = kx^{k-1}$, $f''(x) = k(k-1)x^{k-2}$, za svaki $x \in [a, b]$ je $f'(x) > 0$, i $f''(x) > 0$ iz čega imamo da je $x_0 = b$.

Specijalno kada je $k = 2$, imamo jednostavnu i vrlo efikasnu formulu za približno računanje drugog korijena

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{c}{x_n}\right).$$

Za $c = 10$ imamo jednadžbu $x^2 = 10$. Rješenje je unutar intervala $[3, 4]$ jer je za $f(x) = x^2 - 10$, $f(3) = -1$ a $f(4) = 6$ pa je $f(3)f(4) < 0$. Kako je $x_0 = 4$ imamo

$$x_1 = \frac{1}{2}\left(4 + \frac{10}{4}\right) = 3.25, \quad x_2 = \frac{1}{2}\left(3.25 + \frac{10}{3.25}\right) = 3.1634615$$
$$x_3 = \frac{1}{2}\left(3.1634615 + \frac{10}{3.1634615}\right) = 3.1622779,$$

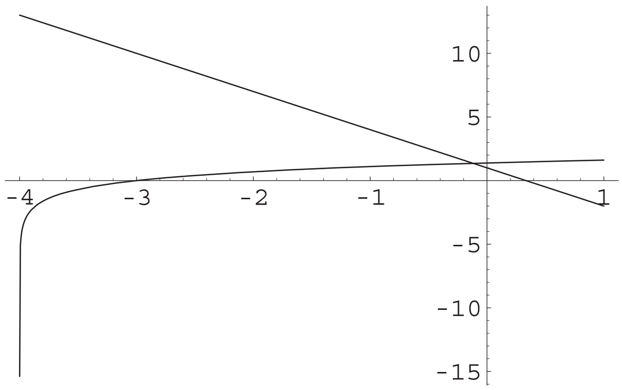
pa kako je

$$m_1 = \min_{x\in[3,4]} |f'(x)| = \min_{x\in[3,4]} |2x| = 6, \quad M_2 = \max_{x\in[3,4]} |f''(x)| = 2,$$

greška aproksimacije je

$$\varepsilon_3 = \frac{2}{12}(3.1622779 - 3.1634615)^2 = 0.233 \cdot 10^{-6} < 10^{-6}.$$

Primjer 6.2. *Newtonovom metodom s točnošću većom od 10^{-6} nađite nultočku jednadžbe $3x + \ln(x + 4) = 1$.*



Slika 6.2.

Rješenje. Prvo trebamo odrediti interval izoliranosti pa crtamo grafove funkcija $y = \ln(x + 4)$ i $y = 1 - 3x$ i tražimo njihovu presječnu točku:

Iz Slike 6.2. vidimo da je nultočka unutar intervala $[-1, 0]$ što je istina jer ako stavimo $f(x) = 3x + \ln(x + 4) - 1$ imamo da je $f(-1) = -4 + \ln 3 < 0$ i $f(0) = \ln 4 - 1 > 0$ pa je $f(-1)f(0) < 0$.

Računamo $f'(x) = 3 + \frac{1}{x+4} > 0$ i $f''(x) = -\frac{1}{(x+4)^2} < 0$ na $[-1, 0]$ pa iz toga slijedi da je $x_0 = -1$ (vidi Napomenu 6.1.). Odavde još imamo da je $M_2 = \max_{x\in[-1,0]} |f''(x)| = \frac{1}{9}$ i $m_1 = \min_{x\in[-1,0]} |f'(x)| = \frac{13}{4}$, pa je test za traženu točnost u obliku

$$\varepsilon_n = |x_n - x_{n-1}| \leq \sqrt{\frac{117 \cdot 10^{-6}}{2}} = 0.764853 \cdot 10^{-2}.$$

Sada,

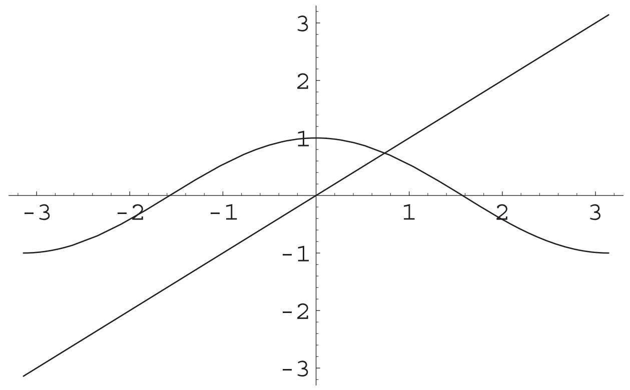
$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{3x_n + \ln(x_n + 4) - 1}{\frac{3x_n+13}{x_n+4}} = \frac{2x_n - x_n \ln(x_n + 4) - 4\ln(x_n + 4) - 4}{3x_n + 13}.$$

Izborom $x_0 = -1$ dobivamo sljedeće aproksimacije:

$$x_1 = -0.1295836, \qquad \varepsilon_1 = 0.870416,$$
$$x_2 = -0.1187227, \qquad \varepsilon_2 = 0.0108609,$$
$$x_3 = -0.1187215, \qquad \varepsilon_3 = 0.120635 \cdot 10^{-5}.$$

Kako je $\varepsilon_3 < 0.764853 \cdot 10^{-2}$ približno rješenje jednadžbe je $\tilde{x} = -0.1187215$.

Primjer 6.3. *Newtonovom metodom s točnošću većom od 10^{-6} nađite nultočku jednadžbe $x - \cos x = 0$.*



Slika 6.3.

Rješenje. Prvo trebamo odrediti interval izoliranosti pa crtamo grafove funkcija $y = x$ i $y = \cos x$ i tražimo njihovu presječnu točku:

Iz Slike 6.3. vidimo da je nultočka unutar intervala $[0, 1]$ što je istina jer ako stavimo $f(x) = x - \cos x$ imamo da je $f(0) = -1 < 0$ i $f(1) = 1 - \cos 1 > 0$ pa je $f(0)f(1) < 0$.

Računamo $f'(x) = 1+\sin x > 0$ i $f''(x) = \cos x > 0$ na $[0, 1]$ pa iz toga slijedi da je $x_0 = 1$ (vidi Napomenu 6.1.). Odavde još imamo da je $M_2 = \max_{x\in[0,1]} |f''(x)| = 1$ i $m_1 = \min_{x\in[0,1]} |f'(x)| = 1$, pa je test za traženu točnost u obliku

$$\varepsilon_n = |x_n - x_{n-1}| \leq \sqrt{2 \cdot 10^{-6}} = 0.141421 \cdot 10^{-2}.$$

Sada,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n - \cos x_n}{1 + \sin x_n} = \frac{x_n \sin x_n + \cos x_n}{1 + \sin x_n}.$$

Izborom $x_0 = 1$ dobivamo sljedeće aproksimacije:

$$x_1 = 0.7503639, \qquad \varepsilon_1 = 0.2496361,$$

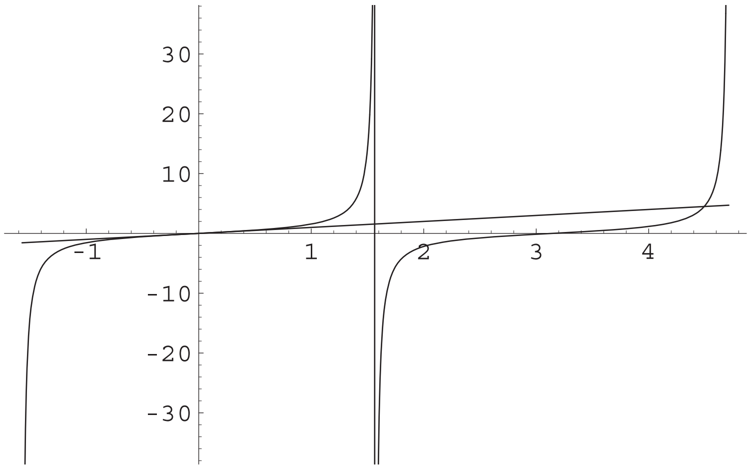
$$x_2 = 0.7391128, \qquad \varepsilon_2 = 0.0112511,$$

$$x_3 = 0.7390851, \qquad \varepsilon_3 = 0.277 \cdot 10^{-4}.$$

Kako je $\varepsilon_3 < 0.141421 \cdot 10^{-2}$ približno rješenje jednadžbe je $\tilde{x} = 0.7390851$.

Primjer 6.4. *Newtonovom metodom s točnošću većom od* 10^{-6} *odredite najmanje pozitivno rješenje jednadžbe* $\operatorname{tg} x = x$.

Rješenje. Prvo trebamo odrediti interval izoliranosti pa crtamo grafove funkcija $y = x$ i $y = \operatorname{tg} x$ i tražimo njihovu presječnu točku:



Slika 6.4.

Iz Slike 6.4. vidimo da je nultočka unutar intervala $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$. Kako $\operatorname{tg} x$ nije definiran u $\frac{3\pi}{2}$ jednažbu $\operatorname{tg} x = x$ zapisujemo u obliku $\sin x = x\cos x$ pa je $f(x) = x\cos x - \sin x$. $f(\pi) = -\pi < 0$, $f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 1 > 0$, pa je $f(\pi)f\left(\frac{3\pi}{2}\right) < 0$.

Računamo $f'(x) = -x\sin x$ pa imamo $f'(\pi) = 0$ što znači da se moramo maknuti u desno pa dobivamo interval $\left[4, \frac{3\pi}{2}\right]$. Kako je $f(4) = 4\cos 4 - \sin 4 = -1.86 < 0$ nultočka je unutar tog intervala. Sada imamo da je $f'(x) > 0$ i $f''(x) = -\sin x - x\cos x > 0$ na $\left[4, \frac{3\pi}{2}\right]$, pa iz toga slijedi da je $x_0 = \frac{3\pi}{2}$. (rj. $\tilde{x} = 4.4934095$)

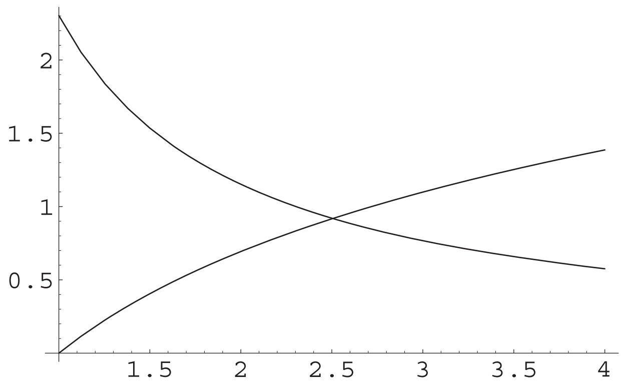
Primjer 6.5. *Newtonovom metodom s točnošću većom od* 10^{-6} *nađite nultočku jednadžbe* $x^x = 10$.

Rješenje. Jednadžbu $x^x = 10$ pišemo u obliku $x\ln x = \ln 10$ pa prvo trebamo odrediti interval izoliranosti. Crtamo grafove funkcija $y = \ln x$ i $y = \frac{\ln 10}{x}$ i tražimo njihovu presječnu točku.

Iz Slike 6.5. vidimo da je nultočka unutar intervala $[2, 3]$ što je istina jer ako stavimo $f(x) = x\ln x - \ln 10$ imamo da je $f(2) = 2\ln 2 - \ln 10 = -0.92 < 0$ i $f(3) = 3\ln 3 - \ln 10 = 0.99 > 0$ pa je $f(2)f(3) < 0$.

Računamo $f'(x) = \ln x + 1 > 0$ i $f''(x) = \frac{1}{x} > 0$ na $[2, 3]$ pa iz toga slijedi da je $x_0 = 3$ (vidi Napomenu 6.1.). Odavde još imamo da je $M_2 = \max_{x\in[2,3]} |f''(x)| = \frac{1}{2}$ i $m_1 = \min_{x\in[2,3]} |f'(x)| = 1 + \ln 2$, pa je test za traženu točnost u obliku

$$\varepsilon_n = |x_n - x_{n-1}| \leq \sqrt{4(1 + \ln 2) \cdot 10^{-6}} = 0.260242 \cdot 10^{-2}.$$



Slika 6.5.

Sada,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n \ln x_n - \ln 10}{1 + \ln x_n} = \frac{x_n + \ln 10}{1 + \ln x_n}.$$

Izborom $x_0 = 3$ dobivamo sljedeće aproksimacije:

$$x_1 = 2.5267102, \qquad \varepsilon_1 = 0.4732898,$$
$$x_2 = 2.5062275, \qquad \varepsilon_2 = 0.0204827,$$
$$x_3 = 2.5061841, \qquad \varepsilon_3 = 0.434 \cdot 10^{-4}.$$

Kako je $\varepsilon_3 < 0.260242 \cdot 10^{-2}$ približno rješenje jednadžbe je $\tilde{x} = 2.5061841$.

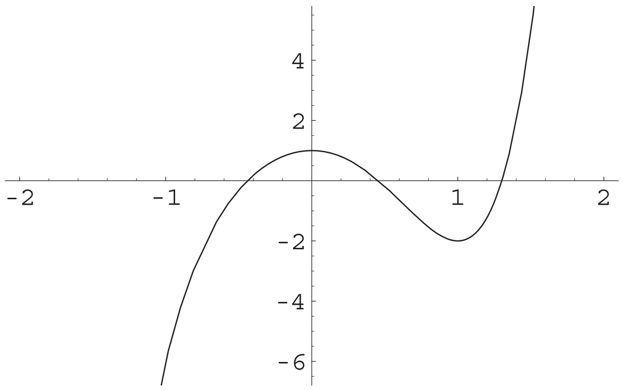
Primjer 6.6. *Newtonovom metodom s točnošću većom od* 10^{-6} *nađite nultočke jednadžbe* $2\sqrt[3]{x^5} - 5\sqrt[3]{x^2} + 1 = 0$.

Rješenje. Suspstitucijom $t = \sqrt[3]{x}$ dobivamo jednadžbu $2t^5 - 5t^2 + 1 = 0$ pa prvo trebamo odrediti intervale izoliranosti. Crtamo graf funkcije $y = 2t^5 - 5t^2 + 1$ (ekstremi su u točkama 0 i 1) i tražimo njegove presječne točke s x-osi.

Iz Slike 6.6. vidimo da su nultočke unutar intervala $[-1, 0], [0, 1], [1, 2]$ što je istina jer ako stavimo $f(t) = 2t^5 - 5t^2 + 1$ imamo da je $f(-1) = -6 < 0, f(0) = 1 > 0, f(1) = -2 < 0$ i $f(2) = 45 > 0$ pa je $f(-1)f(0) < 0, f(0)f(1) < 0$ i $f(1)f(2) < 0$.

Prvo tražimo nultočku unutar intervala $[1, 2]$. Računamo $f'(t) = 10t^4 - 10t > 0$ i $f''(t) = 40t^3 - 10 > 0$ na $(1, 2]$, a $f'(1) = 0$ pa smanjimo interval na $[1.1, 2], (f(1.1) = -1.83 < 0)$ pa iz toga slijedi da je $t_0 = 2$ (vidi Napomenu 6.1.). Odavde još imamo da je $M_2 = \max_{x\in[1.1,2]} |f''(t)| = 310$ i $m_1 = \min_{x\in[1.1,2]} |f'(t)| = 3.641$. Zog Teorema o srednjoj vrijednosti za ocjenu pogreške imamo

$$|\xi_x - x_n| = |x'(t)||\xi_t - t_n| = |3t^2||\xi_t - t_n| \leq \max_{t\in[1.1,2]} |3t^2||\xi_t - t_n| = 12|\xi_t - t_n|,$$



Slika 6.6.

pa kako treba biti $|\xi_x - x_n| < 10^{-6}$ imamo da mora biti $|\xi_t - t_n| < \frac{10^{-6}}{12}$. Test za traženu točnost je onda u obliku

$$\varepsilon_n = |t_n - t_{n-1}| \leq \sqrt{0.001957 \cdot 10^{-6}} = 0.44243 \cdot 10^{-4}.$$

Sada,

$$t_{n+1} = t_n - \frac{f(t_n)}{f'(t_n)} = t_n - \frac{2t_n^5 - 5t_n^2 + 1}{10t_n^4 - 10t_n} = \frac{8t_n^5 - 5t_n^2 - 1}{10t_n^4 - 10t_n}.$$

Izborom $t_0 = 2$ dobivamo sljedeće aproksimacije:

$$\begin{aligned}
t_1 &= 1.6785714, & \varepsilon_1 &= 0.3214286,\\
t_2 &= 1.4619056, & \varepsilon_2 &= 0.2166658,\\
t_3 &= 1.3437754, & \varepsilon_3 &= 0.1181302,\\
t_4 &= 1.3054555, & \varepsilon_4 &= 0.0383199,\\
t_5 &= 1.3015830, & \varepsilon_5 &= 0.38725 \cdot 10^{-2},\\
t_6 &= 1.3015453, & \varepsilon_6 &= 0.377 \cdot 10^{-4},.
\end{aligned}$$

Kako je $\varepsilon_6 < 0.44243 \cdot 10^{-4}$ približno rješenje jednadžbe je $\tilde{t}_1 = 1.3015453$ pa je $\tilde{x}_1 = 2.204844$.

Rješenja za ostale intervale su $\tilde{x}_2 = -0.0850644$ i $\tilde{x}_3 = 0.0947814$.

Zadaci za vježbu

1. Newtonovom metodom s točnošću većom od 10^{-4} približno riješite jednadžbu $x^2 - \ln(x+1) = 0$. (rj. $\tilde{x} = 0.74688$)

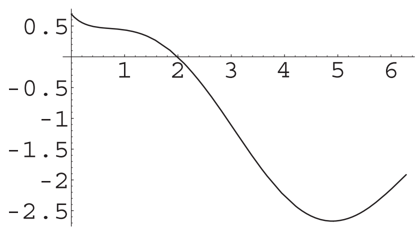
2. Newtonovom metodom s točnošću većom od 10^{-4} približno riješite jednadžbu $\cos x = x^2 - 2$. (rj. $\tilde{x} = 1.45462$)
3. Newtonovom metodom nađite najveću nultočku jednadžbe $\ln(x+1) - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^2}{3} - x = 0$ s točnošću većom od 10^{-3}. (rj. $\tilde{x} = 1.1178$)
4. Newtonovom metodom s točnošću većom od 10^{-4} odredite približno bar dva strogo pozitivna rješenja jednadžbe $e^{-x} = \cos x$. (rj. $\tilde{x}_1 = 1.29269$, $\tilde{x}_2 = 4.72129$)
5. Odredite točku na krivulji $y = \sin\frac{x}{2}$ koja je najmanje udaljena od točke $(1, 0)$, Newtonovom metodom sa greškom koja nije veća od 10^{-2}. (rj. $\tilde{x} = 0.815$)
6. Newtonovom metodom s točnošću većom od 10^{-4} približno riješite jednadžbu $\ln x = 2x(x-1)$. (rj. $\tilde{x} = 0.62614$)
7. Newtonovom metodom s točnošću od 10^{-2} odredite najveću negativnu nultočku jednadžbe $\operatorname{tg} x - x + \frac{1}{2} = 0$. (rj. $\tilde{x} = -0.975$)
8. Newtonovom metodom nađite barem jedno pozitivno rješenje jednadžbe $x \sin x = 1$ s točnošću većom od 10^{-3}. (rj. $\tilde{x} = 1.1142$)
9. Newtonovom metodom nađite realno rješenje jednadžbe $x^3 - 2x^2 - 1 = 0$ s točnošću većom od 10^{-4}. (rj. $\tilde{x} = 2.20557$)
10. Newtonovom metodom nađite sva rješenja jednadžbe $6\sin x = x^3$ s točnošću većom od 10^{-3}. (rj. $\tilde{x}_1 = -1.801$, $\tilde{x}_2 = 1.801$)
11. Newtonovom metodom s točnošću $\varepsilon = 10^{-4}$ odredite najveću nultočku funkcije $f(x) = 2^x - 3\cos x - 1$. (rj. $\tilde{x} = 1.15148$)
12. Newtonovom metodom s točnošću većom od 10^{-3} približno izračunajte najveću realnu nultočku polinoma $x^4 - x^3 + x^2 + x - 6 = 0$. (rj. $\tilde{x} = 1.5501$)
13. Newtonovom metodom s točnošću od 10^{-4} riješite jednadžbu $3^x + x = 0$. (rj. $\tilde{x} = -0.54781$)
14. Newtonovom metodom s točnošću od 10^{-2} nađite korijen jednadžbe $\ln|x| = \operatorname{tg}\frac{x}{3}$ koji je najmanje udaljen od nule. (rj. $\tilde{x} = -0.769$)
15. Newtonovom metodom s točnošću od 10^{-4} odredite nultočku funkcije $x \ln x = 18$. (rj. $\tilde{x} = 8.43924$)
16. Newtonovom metodom s točnošću $\varepsilon = 10^{-4}$ odredite približno rješenje jednadžbe $\ln x + x^2 = 0$. (rj. $\tilde{x} = 0.65292$)
17. Newtonovom metodom s točnošću $\varepsilon = 10^{-3}$ približno riješite jednadžbu $\sin x = \log_{1/2} x$. (rj. $\tilde{x} = 0.6554$)
18. Newtonovom metodom, s točnošću od 10^{-4}, približno riješite jednadžbu $\arcsin(x/2) = 1 - x$. (rj. $\tilde{x} = 0.66242$)

19. Newtonovom metodom, s točnošću od 10^{-3}, približno riješite jednadžbu $\arccos x = x + 1$. (rj. $\tilde{x} = 0.2834$)

Programska realizacija

1. Riješite jedndžbu $\sin x = \ln\left(x + \frac{1}{2}\right)$ na intervalu $[0, 2\pi]$.
2. Riješite jedndžbu $\arcsin x = -\frac{1}{2}x^2 + 1$ na intervalu $[-1, 1]$.
3. Nađite manju nultočku jedndžbe $-e^{-2x} = 4\sin 3x$ na intervalu $[-2, 0]$.
4. Riješite jedndžbu $e^x = x^2$ na intervalu $[-1, 1]$.

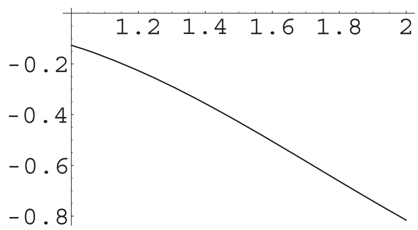
```
f[x_] := Sin[x] - Log[x + 1/2]

Plot[f[x], {x, 0, 2 Pi}]
```




```
- Graphics -

fd[x_] = D[f[x], x]
```

$$-\frac{1}{\frac{1}{2}+x}+\mathrm{Cos}[x]$$

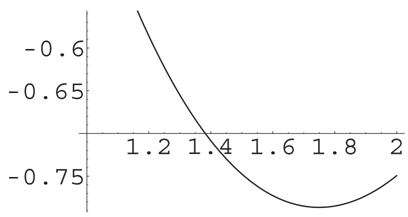
```
Plot[fd[x], {x, 1, 2}]
```




```
- Graphics -

fd2[x_] = D[f[x], {x, 2}]
```

$$\frac{1}{(\frac{1}{2}+x)^2}-\mathrm{Sin}[x]$$

```
Plot[fd2[x], {x, 1, 2}]
```

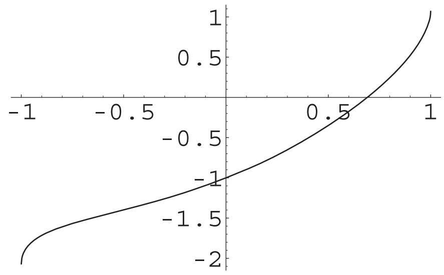



```
- Graphics -

FindRoot[Sin[x] == Log[x + 1/2], {x, 2}]

{x → 1.9914}
```

Slika 6.7.

$$\mathbf{f[x\_] := ArcSin[x] + \frac{1}{2}\,x^2 - 1}$$

```
Plot[f[x], {x, -1, 1}]
```

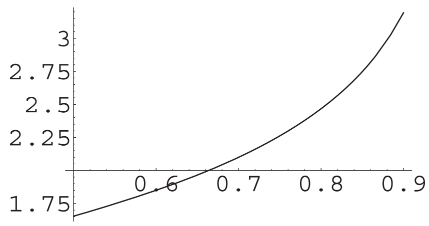


```
- Graphics -
```

```
fd[x_] = D[f[x], x]
```

$$x + \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

```
Plot[fd[x], {x, 0.5, 0.9}]
```

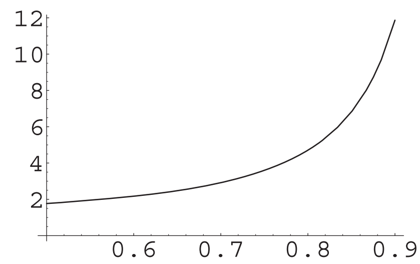


```
- Graphics -
```

```
fd2[x_] = D[f[x], {x, 2}]
```

$$1 + \frac{x}{(1 - x^2)^{3/2}}$$

```
Plot[fd2[x], {x, 0.5, 0.9}]
```



```
- Graphics -
```

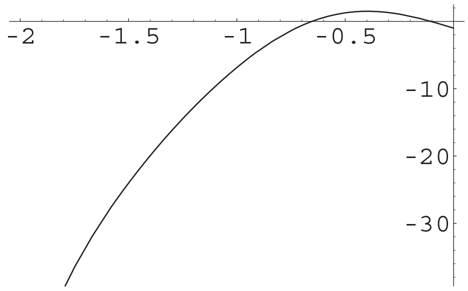
$$\mathbf{FindRoot\Big[ArcSin[x] == -\frac{1}{2}\,x^2 + 1,\ \{x,\ 0.9\}\Big]}$$

$$\{x \to 0.690222\}$$

Slika 6.8.

```
f[x_] := -Exp[-2 x] - 4 Sin[3 x]
```

```
Plot[f[x], {x, -2, 0}]
```

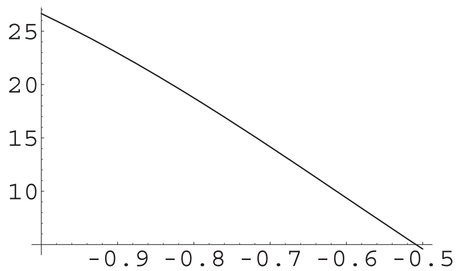


- Graphics -

```
fd[x_] = D[f[x], x]
```

$2\, e^{-2x} - 12 \,\mathrm{Cos}[3\, x]$

```
Plot[fd[x], {x, -1, -0.5}]
```

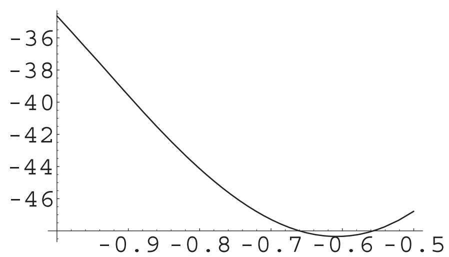


- Graphics -

```
fd2[x_] = D[f[x], {x, 2}]
```

$-4\, e^{-2x} + 36 \,\mathrm{Sin}[3\, x]$

```
Plot[fd2[x], {x, -1, -0.5}]
```



- Graphics -

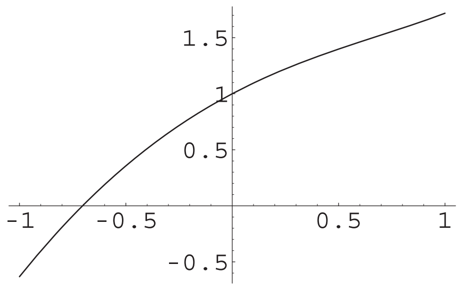
```
FindRoot[-Exp[-2 x] == 4 Sin[3 x], {x, -1}]
```

$\{x \to -0.653919\}$

Slika 6.9.

f[x_] := Exp[x] - x^2

Plot[f[x], {x, -1, 1}]

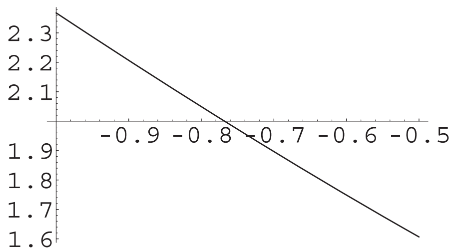


- Graphics -

fd[x_] = D[f[x], x]

$e^x - 2\,x$

Plot[fd[x], {x, -1, -0.5}]

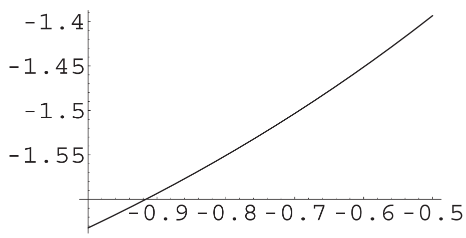


- Graphics -

fd2[x_] = D[f[x], {x, 2}]

$-2 + e^x$

Plot[fd2[x], {x, -1, -0.5}]



- Graphics -

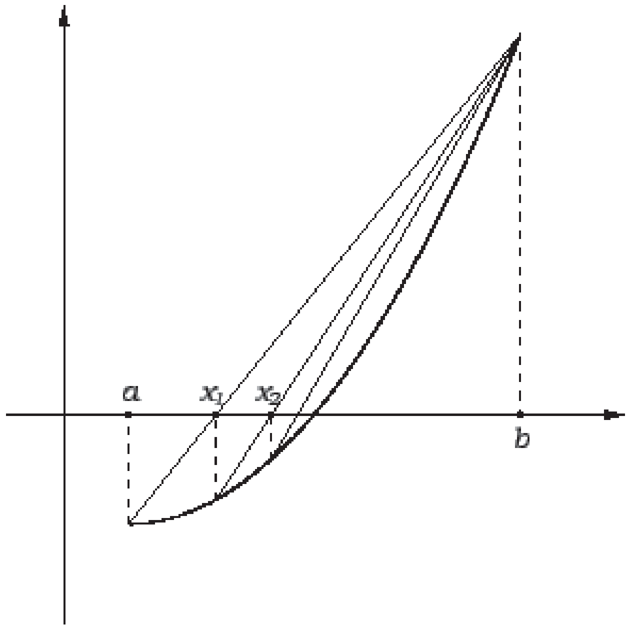
FindRoot[Exp[x] == x^2, {x, -1}]

{x → -0.703467}

Slika 6.10.

6.3. Metoda sekante

Ako graf funkcije f umjesto tangentom, aproksimiramo sekantom, dobili smo metodu sekante.



Slika 6.11.

Jednadžba sekante kroz krajnje točke luka glasi:

$$\frac{x-a}{b-a} = \frac{y-f(a)}{f(b)-f(a)}.$$

Za $y = 0$ dobivamo sjecište sekante s x-osi

$$x_1 = a - \frac{f(a)}{f(b)-f(a)}(b-a).$$

Ponovimo sada postupak na segmentu $[x_1, b] \subset [a, b]$ kao što je ilustrirano na Slici 6.11.. Taj postupak možemo nastaviti pri čemu općenito niz $\{x_i\}$ može divergirati. Da osiguramo konvergenciju postupka pretpostavimo da f'' ne mijenja predznak na $[a, b]$. Time je f konveksna (konkavna) funkcija na $[a, b]$ pa sekanta siječe graf od f nad $[a, b]$ samo u krajnjim točkama. Neka je npr. $f''(x) > 0$ na $[a, b]$. Slučaj $f''(x) < 0$ svodi se na rješavanje jednadžbe $-f(x) = 0$. Uz $f''(x) > 0$ imamo dva podslučaja:

1. Za $f(a) > 0$ uzimamo $x_0 = b$ za prvu aproksimaciju. Tada imamo

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(x_n) - f(a)}(x_n - a), \qquad n = 0, 1, 2, \dots \tag{6.5}$$

što zbog konveksnosti od f daje jedan ograđen monotono padajući niz aproksimacija $\{x_n\}$ pa prema tome niz $\{x_n\}$ konvergira k nekom $\xi = \lim_{n\to\infty} x_n$.

2. Za $f(a) < 0$ uzimamo $x_0 = a$. Tada imamo

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(b) - f(x_n)}(b - x_n), \qquad n = 0, 1, 2, \dots$$

Zbog konveksnosti od f dobivamo ograđen monotono rastući niz aproksimacija $\{x_n\}$ koji konvergira k nekom $\xi = \lim_{n\to\infty} x_n$.

Za ocjenu pogreške aproksimacije imamo: Neka je f' ograđena na $[a, b]$, tj.

$$m \leq |f'(x)| \leq M, x \in [a, b].$$

Razmotrimo samo prvi slučaj, tj. kada je u postupku $x_0 = b$ (analogno u drugom slučaju). Iz (6.5) lako dobivamo

$$-f(x_{n-1}) = \frac{f(x_{n-1}) - f(a)}{x_{n-1} - a}(x_n - x_{n-1})$$

pa dodavanjem $f(\xi) = 0$ imamo

$$f(\xi) - f(x_{n-1}) = \frac{f(x_{n-1}) - f(a)}{x_{n-1} - a}(x_n - x_{n-1}). \tag{6.6}$$

Po teoremu o srednjoj vrijednosti primijenjom na obje strane jednakosti (6.6) dobivamo

$$(\xi - x_{n-1})f'(\xi_{n-1}) = (x_n - x_{n-1})f'(\bar{x}_{n-1}), \tag{6.7}$$

$\xi_{n-1} \in (x_{n-1}, \xi), \bar{x}_{n-1} \in (a, x_{n-1})$. Umetanjem $0 = x_n - x_n$ u prvi faktor lijeve strane od (6.7) lako dobivamo

$$|\xi - x_n| = \frac{|f'(\bar{x}_{n-1}) - f'(\xi_{n-1})|}{|f'(\xi_{n-1})|}|x_n - x_{n-1}| \leq \frac{M - m}{|f'(\xi_{n-1})|}|x_n - x_{n-1}| \leq \frac{M - m}{m}|x_n - x_{n-1}|,$$

što za zadanu točnost ε daje

$$|x_n - x_{n-1}| \leq \frac{m \cdot \varepsilon}{M - m}.$$

Primjer 6.7. *Metodom sekante s točnošću većom od 10^{-3} nađite nultočku jednadžbe $x^x = 10$.*

Rješenje. Iz Primjera 6.5. imamo $f(x) = x \ln x - \ln 10$ i nultočka je unutar intervala $[2,3]$. Kako je $f''(x) = \frac{1}{x}$ vidimo da je f konveksna na $(0,\infty)$. Iz $m = \min_{x\in[2,3]} |\ln x + 1| = \ln 2 + 1$ i $M = \max_{x\in[2,3]} |\ln x + 1| = \ln 3 + 1$ imamo da je test za traženu točnost u obliku

$$\varepsilon_n = |x_n - x_{n-1}| \leq \frac{(\ln 2 + 1)10^{-3}}{\ln 3 - \ln 2} = 0.004176.$$

Sada,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n \ln x_n - \ln 10}{0.9932 - x_n \ln x_n + \ln 10}(3 - x_n) = \frac{0.9932 x_n - 3x_n \ln x_n + 3\ln 10}{0.9932 - x_n \ln x_n + \ln 10}.$$

Kako je $f(2) < 0$ imamo $x_0 = 2$ i

$$\begin{aligned} x_1 &= 2.4798, & \varepsilon_1 &= 0.4798,\\ x_2 &= 2.5049, & \varepsilon_2 &= 0.0251,\\ x_3 &= 2.5061, & \varepsilon_3 &= 0.0012. \end{aligned}$$

Kako je $\varepsilon_3 < 0.004176$ približno rješenje jednadžbe je $\tilde{x} = 2.5061$.

U dosadašnjem opisu metode sekante držali smo jedan kraj segmenta $[a,b]$ čvrstim. Postoji i modifikacija metode sekante kod koje mijenjamo oba kraja sekante.

Sada se polazi od dviju aproksimacija x_{n-1} i x_n pa imamo formulu

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(x_n) - f(x_{n-1})}(x_n - x_{n-1}) = \frac{x_{n-1} f(x_n) - x_n f(x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}, \tag{6.8}$$

gdje je $x_0 = a$ i $x_1 = b$.

U ovom slučaju za ocjenu pogreške iz (6.8) imamo

$$-f(x_n) = (x_{n+1} - x_n)\frac{f(x_{n-1}) - f(x_n)}{x_{n-1} - x_n}$$

tako da dodavanjem $f(\xi) = 0$ imamo

$$f(\xi) - f(x_n) = (x_{n+1} - x_n)\frac{f(x_{n-1}) - f(x_n)}{x_{n-1} - x_n}.$$

Prmjenom teorema srednje vrijednosti na obje strane dobivamo

$$(\xi - x_n) f'(\xi_n) = \frac{f'(\bar{x}_{n-1})(x_{n-1} - x_n)}{x_{n-1} - x_n}(x_{n+1} - x_n)$$

gdje je $\xi_n \in (\xi, x_n), \bar{x}_{n-1} \in (x_n, x_{n-1})$, tako da vrijedi

$$\xi - x_n = \frac{f'(\bar{x}_{n-1})}{f'(\xi_n)}(x_{n+1} - x_n),$$

pa za ocjenu dobivamo

$$|\xi - x_n| \leq \frac{M}{m}|x_{n+1} - x_n|,$$

što za zadanu točnost ε daje

$$|x_{n+1} - x_n| \leq \frac{m \cdot \varepsilon}{M}.$$

Primjer 6.8. *Metodom sekante s točnošću većom od* 10^{-3} *nađite nultočku jednadžbe* $x = \cos x$.

Rješenje. Iz Primjera 6.3. imamo $f(x) = x - \cos x$ i nultočka je unutar intervala $[0, 1]$. Iz $m = \min_{x \in [0,1]} |1 + \sin x| = 1$ i $M = \max_{x \in [0,1]} |1 + \sin x| = 1.8415$ imamo da je test za traženu točnost u obliku

$$\varepsilon_n = |x_n - x_{n-1}| \leq \frac{10^{-3}}{1.8415} = 0.543 \cdot 10^{-3}.$$

Sada,

$$x_{n+1} = \frac{x_{n-1}(x_n - \cos x_n) - x_n(x_{n-1} - \cos x_{n-1})}{x_n - \cos x_n - x_{n-1} + \cos x_{n-1}} = \frac{x_n \cos x_{n-1} - x_{n-1} \cos x_n}{x_n - \cos x_n - x_{n-1} + \cos x_{n-1}}.$$

Za $x_0 = 0$ i $x_1 = 1$ imamo

$$\begin{aligned}
x_2 &= 0.685073, & \varepsilon_2 &= 0.314927,\\
x_3 &= 0.736299, & \varepsilon_3 &= 0.051226,\\
x_4 &= 0.739119, & \varepsilon_4 &= 0.00282,\\
x_5 &= 0.739085, & \varepsilon_5 &= 0.34 \cdot 10^{-4}.
\end{aligned}$$

Kako je $\varepsilon_4 < 0.543 \cdot 10^{-3}$ približno rješenje jednadžbe je $\tilde{x} = 0.739085$.

6.4. Metoda iteracije

Napišimo jednadžbu (6.1) u obliku

$$x = \varphi(x). \tag{6.9}$$

Na rješavanje ove jednadžbe možemo primjeniti sljedeći postupak. Izaberimo na bilo koji način aproksimativnu vrijednost x_0 rješenja jednadžbe (6.9). Uvrstimo li x_0 u desnu stranu od (6.9) dobivamo

$$x_1 = \varphi(x_0).$$

Nastavimo li postupak dobivamo

$$x_n = \varphi(x_{n-1}), \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Ako dobiveni niz (x_n) konvergira, onda prelaskom na limes dobivamo

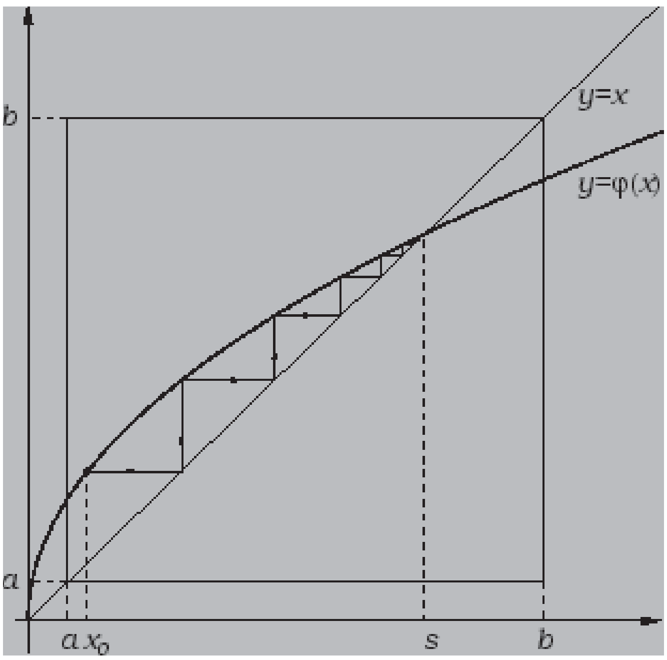
$$\xi = \lim_{n\to\infty} x_n = \varphi(\lim_{n\to\infty} x_{n-1}) = \varphi(\xi),$$

odnosno

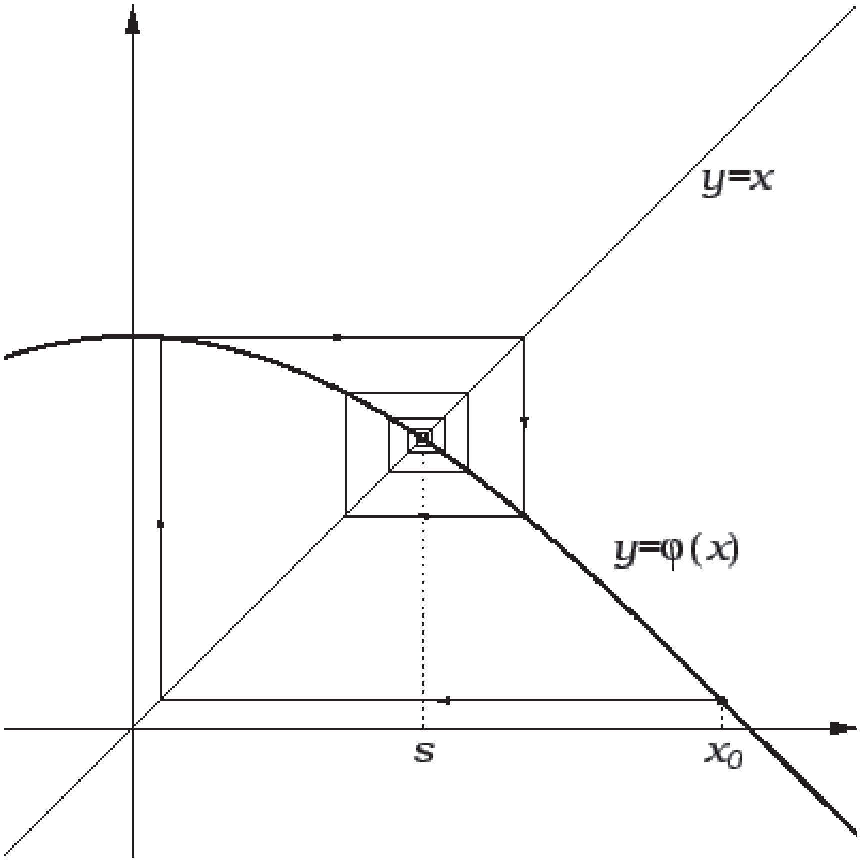
$$f(\xi) = 0,$$

pa smo našli rješenje polazne jednadžbe.

Ako je φ rastuća funkcija metoda iteracije opisana je Slikom (6.12.), a kad je φ padajuća Slikom (6.13.).



Slika 6.12.



Slika 6.13.

Sljedeći teorem kaže pod kojim uvjetima postupak konvergira.

Teorem 6.3. *Neka je* $\varphi : [a, b] \to [a, b]$ *diferencijabilna na* $[a, b]$*. Ako je*

$$|\varphi'(x)| \leq q < 1 \quad za \quad a < x < b,$$

onda postupak iteracije

$$x_n = \varphi(x_{n-1}), \quad n = 1, 2, \ldots$$

konvergira i to neovisno o početnoj vrijednosti $x_0 \in [a, b]$*, a*

$$\xi = \lim_{n\to\infty} x_n$$

je jedinstveno rješenje jednadžbe (6.9) na segmentu $[a, b]$*.*

Primjenom teorema o srednjoj vrijednosti dobivamo

$$x_{n+1} - x_n = (x_n - x_{n-1})\varphi'(\bar{x}), \quad \bar{x} \in (x_{n-1}, x_n),$$

pa je zbog $|\varphi'(x)| \leq q$

$$|x_{n+1} - x_n| \leq q|x_n - x_{n-1}|. \tag{6.10}$$

Sada za ocjenu pogreške aproksimacije polazimo od funkcije

$$g(x) = x - \varphi(x)$$

pa imamo

$$g'(x) = 1 - \varphi'(x) \geq 1 - q.$$

Kako je $g(\xi) = 0$ imamo

$$|x_n - \varphi(x_n)| = |g(x_n) - g(\xi)| = |x_n - \xi||g'(\bar{x})| \geq (1-q)|x_n - \xi|,$$

gdje je $\bar{x} \in (x_n, \xi)$, i prema tome

$$|\xi - x_n| \leq \frac{|x_n - \varphi(x_n)|}{1-q}$$

odnosno

$$|\xi - x_n| \leq \frac{|x_{n+1} - x_n|}{1-q},$$

što kombinirajući s (6.10) daje

$$|\xi - x_n| \leq \frac{q}{1-q}|x_n - x_{n-1}|.$$

Ova formula omogućava ocijeniti pogrešku aproksimacije iz razlike uzastopnih aproksimativnih rješenja. Ako je zadana točnost $\varepsilon > 0$, postupak iteracije treba voditi dok ne bude

$$|x_n - x_{n-1}| < \frac{1-q}{q}\varepsilon. \tag{6.11}$$

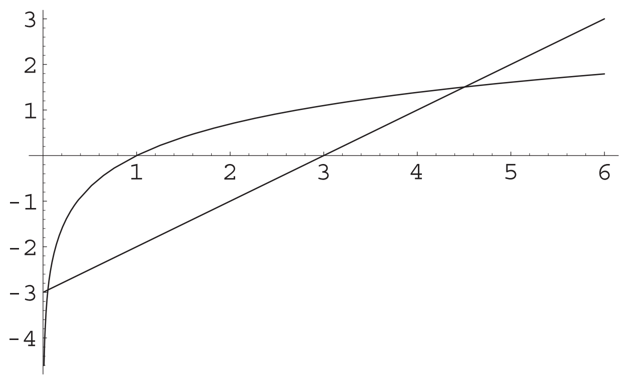
Najjednostavniji i najefikasniji način je da se iterativni postupak provodi dok ne postignemo

$$|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon.$$

Primjer 6.9. *Metodom iteracije s točnošću većom od* 10^{-3} *nađite nultočke jednadžbe* $x = 3 + \ln x$.

Rješenje. Prvo trebamo odrediti interval izoliranosti pa crtamo grafove funkcija $y = x - 3$ i $y = \ln x$ i tražimo njihove presječne točke.

Iz Slike 6.14. vidimo da su nultočke unutar intervala $[0, 1]$ i $[4, 5]$, ali kako $\ln x$ nije definarina u 0 za prvi interval možemo uzeti $[e^{-3}, e^{-2}]$. To su dobro izabrani intervali jer ako stavimo $f(x) = x - 3 - \ln x$ imamo da je $f(e^{-3}) = e^{-3} > 0$,



Slika 6.14.

$f(e^{-2}) = e^{-2} - 1 < 0$, $f(4) = 1 - \ln 4 < 0$ i $f(5) = 2 - \ln 5 > 0$ pa je $f(e^{-3})f(e^{-2}) < 0$ i $f(4)f(5) < 0$.

Za interval $[4, 5]$ definiramo $\varphi(x) = 3 + \ln x$ što je dobro definirana funkcija (vidi Teorem 6.3.) jer je $\varphi'(x) = \frac{1}{x}$ i vrijedi $|\varphi'(x)| \leq \frac{1}{4} = q < 1$ na intervalu $[4, 5]$.

Izborom $x_0 = 4$ dobivamo sljedeće aproksimacije:

$$x_1 = 4.38629, \quad x_2 = 4.47848, \quad x_3 = 4.49928,$$
$$x_4 = 4.50392, \quad x_5 = 4.50495, \quad x_6 = 4.50518, \quad x_7 = 4.50523$$

Kako je $\varepsilon_7 = |x_7 - x_6| = 0.5 \cdot 10^{-4} < 10^{-3}$ (možemo gledati i na koliko se decimalnih mjesta znamenke poduddaraju) približno rješenje jednadžbe je $\tilde{x} = 4.50523$.

Ako grešku računamo preko ocjene (6.11) imamo

$$\varepsilon_7 = |x_7 - x_6| = 0.5 \cdot 10^{-4} < \frac{1 - \frac{1}{4}}{\frac{1}{4}} \cdot 10^{-3} = 0.3 \cdot 10^{-2}.$$

Za interval $[e^{-3}, e^{-2}]$ ne možemo koristiti funkciju $\varphi(x) = 3 + \ln x$ jer je $|\varphi'(x)| > 1$. Probamo izraziti drugi x iz zadane jednadžbe pa dobijemo $\varphi(x) = e^{x-3}$. Tada je $\varphi'(x) = e^{x-3}$ i vrijedi $|\varphi'(x)| \leq e^{e^{-2}-3} \approx 0.06 = q < 1$ na intervalu $[e^{-3}, e^{-2}]$.

Izborom $x_0 = e^{-3} = 0.04979$ dobivamo sljedeće aproksimacije:

$$x_1 = 0.05233, \quad x_2 = 0.05246.$$

Kako je $\varepsilon_2 = |x_2 - x_1| = 0.13 \cdot 10^{-3} < 10^{-3}$ približno rješenje jednadžbe je $\tilde{x} = 0.05246$.

Ako u zadanoj jednadžbi koristeči elementarne operacije i standardne procedure ne možemo naći funkciju $\varphi(x)$ koja zadovoljava pretpostavke Teorema 6.3. koristimo se tzv. λ-trikom:

Gledamo jednadžbu $f(x) = 0$ za koju je $f'(x) > 0$ na intervalu $[a, b]$. Ako je $f'(x) < 0$ onda umjesto $f(x)$ uzimamo $-f(x)$.

Ako jednadžbu $-f(x) = 0$ pomnožimo s $\lambda > 0, \lambda \in \mathbf{R}$ dobivamo

$$-\lambda f(x) = 0 \Rightarrow x - \lambda f(x) = x,$$

pa definiramo $\varphi(x) = x - \lambda f(x)$. Da bi vako zadana funkcija φ ispunjavala pretpostavke Teorema 6.3. mora biti

$$|\varphi'(x)| = |1 - \lambda f'(x)| < 1,$$

iz čega je

$$0 < \lambda f'(x) < 2.$$

Lijeva strana nejednakosti je ispunjena iz pozitivnisti od λ i $f'(x)$ a iz desne strane dobivamo da mora biti:

$$\lambda < \frac{2}{f'(x)}.$$

Ako je $M_1 = \max_{x\in[a,b]} f'(x)$ broj λ određujemo iz uvjeta

$$\lambda < \frac{2}{M_1} < \frac{2}{f'(x)}.$$

Primjer 6.10. *Metodom iteracije s točnošću većom od* 10^{-3} *nađite nultočke jednadžbe* $x^2 = \ln(x + 2)$*.*

Rješenje. Prvo trebamo odrediti interval izoliranosti pa crtamo grafove funkcija $y = x^2$ i $y = \ln(x + 2)$ i tražimo njihove presječne točke.

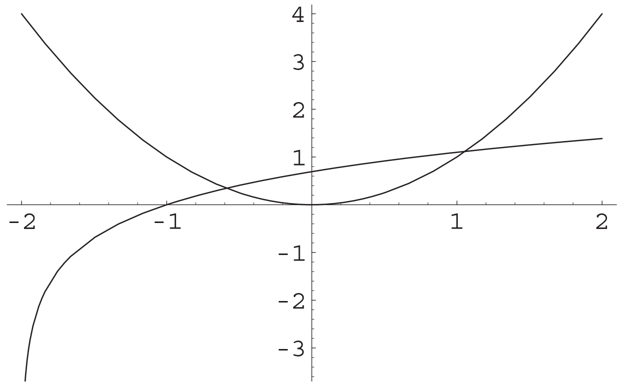
Iz Slike 6.15. vidimo da su nultočke unutar intervala $[-1, 0]$ i $[1, 2]$, a to su dobro izabrani intervali jer ako stavimo $f(x) = x^2 - \ln(x+2)$ imamo da je $f(-1) = 1 - \ln 1 = 1 > 0$, $f(0) = -\ln 2 < 0$, $f(1) = 1 - \ln 3 < 0$ i $f(2) = 4 - \ln 4 > 0$ pa je $f(-1)f(0) < 0$ i $f(1)f(2) < 0$.

Za interval $[1, 2]$ definiramo $\varphi(x) = \sqrt{\ln(x + 2)}$ što je dobro definirana funkcija (vidi Teorem 6.3.) jer je $\varphi'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\ln(x+2)}} \cdot \frac{1}{x+2}$ i vrijedi $|\varphi'(x)| \le 0.16 = q < 1$ na intervalu $[1, 2]$.

Izborom $x_0 = 2$ dobivamo sljedeće aproksimacije:

$$x_1 = 1.17741, \quad x_2 = 1.0752, \quad x_3 = 1.05989,$$

$$x_4 = 1.05753, \quad x_5 = 1.05717.$$



Slika 6.15.

Kako je $\varepsilon_5 = |x_5 - x_4| = 0.36 \cdot 10^{-3} < 10^{-3}$ približno rješenje jednadžbe je $\tilde{x} = 1.05717$.

Za interval $[-1, 0]$ koristimo λ-trik: $f'(x) = 2x - \frac{1}{x+2}$ pa zbog $f'(x) < 0$ na intervalu $[-1, 0]$ gledamo funkciju $g(x) = -f(x) = \ln(x+2) - x^2$. Dobivamo da je $g'(x) = \frac{1}{x+2} - 2x > 0$ na $[-1, 0]$. Sada, $M_1 = \max_{x\in[-1,0]} |g'(x)| = 3$ pa kako mora biti $0 < \lambda < \frac{2}{M_1} = \frac{2}{3}$, možemo uzeti $\lambda = \frac{1}{3}$.

Izborom $x_0 = -1$ i $\varphi(x) = x - \frac{1}{3}(\ln(x+2) - x^2)$ dobivamo sljedeće aproksimacije:

$$x_1 = -0.66667, \quad x_2 = -0.61441, \quad x_3 = -0.59729,$$
$$x_4 = -0.59117, \quad x_5 = -0.58893, \quad x_6 = -0.5881.$$

Kako je $\varepsilon_6 = |x_6 - x_5| = 0.83 \cdot 10^{-3} < 10^{-3}$ približno rješenje jednadžbe je $\tilde{x} = -0.5881$.

Primjer 6.11. *Metodom iteracije s točnošću većom od* 10^{-3} *nađite najmanju pozitivnu nultočku jednadžbe* $\operatorname{tg} x = x$.

Rješenje. Iz Slike 6.4. vidimo da je nultočka unutar intervala $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$. Ako uzmemo da je $x = \varphi(x) = \operatorname{arctg} x$ to nije dobro definirana funkcija jer slika od φ nije unutar intervala $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, nego je $\varphi(x) \subseteq \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Zbog periodičnosti od funkcije $\operatorname{tg} x$ imamo

$$\operatorname{arctg} x = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}(x - \pi + \pi)) = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}(x - \pi)) = x - \pi,$$

pa možemo uzeti $x = \varphi(x) = \operatorname{arctg} x + \pi$ i sada je $\varphi(x) \subseteq \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$.

Zadaci za vježbu

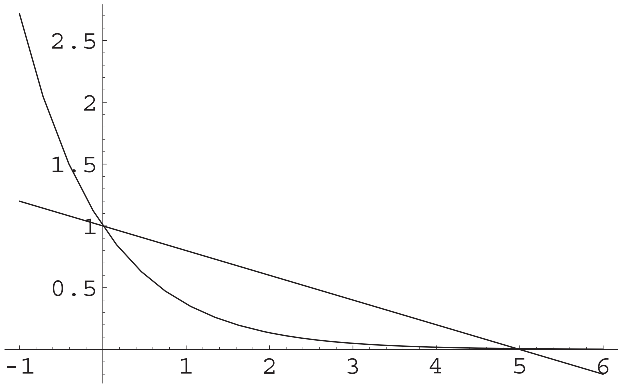
1. Metodom iteracije s točnošću većom od 10^{-3} približno riješite jednadžbu $e^x + x - 5 = 0$. (rj. $\tilde{x} = 1.3066$)
2. Metodom iteracije s točnošću većom od 10^{-3} približno riješite jednadžbu $x \ln x - 0.25 = 0$. (rj. $\tilde{x} = 1.2262$)
3. Metodom iteracije s točnošću većom od 10^{-4} odredite približnu vrijednost bar jednog pozitivnog rješenja jednadžbe $e^{-x^2} = \sin x$. (rj. $\tilde{x} = \pi$)
4. Metodom iteracije s točnošću većom od 10^{-3} riješite jednadžbu $\sin(x+1) = 2 - x^3$. (rj. $\tilde{x} = 1.0341$)
5. Metodom iteracije s točnošću većom od 10^{-3} riješite jednadžbu $e^x(\sqrt{x}-1) = 1$. (rj. $\tilde{x} = 1.4974$)
6. Metodom iteracije s točnošću većom od 10^{-4} odredite barem jednu realnu nultočku jednadžbe $e^{x^3} = x + 2$. (rj. $\tilde{x} = 1.32472$)
7. Metodom iteracije s točnošću većom od 10^{-3} odredite manju nultočku jednadžbe $\ln^2 x - 3 + x = 0$. (rj. $\tilde{x} = 0.1869$)
8. Metodom iteracije nađite barem jedno realno rješenje jednadžbe $x^5 - 5x^3 + 5 = 0$ s točnošću većom od 10^{-4}. (rj. $\tilde{x} = 1.09589$)
9. Metodom iteracije nađite barem jedno realno rješenje jednadžbe $x - \ln x - 2 = 0$ s točnošću većom od 10^{-3}. (rj. $\tilde{x} = 3.1463$)
10. Metodom iteracije nađite negativno rješenje jednadžbe $e^x - x^2 + 1 = 0$ s točnošću većom od 10^{-3}. (rj. $\tilde{x} = -1.1478$)
11. Metodom iteracije odredite pozitivnu nultočku funkcije $f(x) = x^2 + 4\sin x - 1$ s točnošću većom od 10^{-3}. (rj. $\tilde{x} = 0.238$)
12. Metodom iteracije s točnošću $\varepsilon = 10^{-3}$ odredite manju nultočku funkcije $f(x) = 4 - x^2 - \ln^2 x$. (rj. $\tilde{x} = 0.13597$)
13. Metodom iteracije s točnošću većom od 10^{-4} približno riješite jednadžbu $x = (x+2)^3$. (rj. $\tilde{x} = -3.52137$)
14. Metodom iteracije s točnošću barem 10^{-4} odredite približne vrijednosti rješenja jednadžbe $e^x = x^3$. (rj. $\tilde{x} = 1.85718$)
15. Metodom iteracije s točnošću većom od 10^{-3} nađite oba rješenja jednadžbe $2x - 4\ln x - 3 = 0$. (rj. $\tilde{x}_1 = 0.6557,\ \tilde{x}_2 = 4.5145$)
16. Metodom iteracije s točnošću od 10^{-4} riješite jednadžbu $\ln\left(\frac{x}{2}\right) = |\cos x|$. (rj. $\tilde{x} = 3.9603$)
17. Metodom iteracije s točnošću od 10^{-3} riješite jednadžbu $4 - x^3 - \ln^2 x = 0$. (rj. $\tilde{x} = 1.5607$)

18. Metodom iteracije, s točnošću većom od 10^{-3}, odredite približnu vrijednost najmanjeg rješenja jednadžbe $e^{-x} = -x^5$. (rj. $\tilde{x} = -1.2958$)
19. Metodom iteracije riješite jednadžbu $\ln\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2}|\sin 2x|$ s točnošću od 10^{-3}. (rj. $\tilde{x} = 2.7814$)
20. Metodom iteracije riješite jednadžbu $4e^x - x - 10 = 0$ s točnošću od 10^{-4}. (rj. $\tilde{x} = 1.01276$)
21. Metodom iteracija s točnošću većom od 10^{-3} riješite jednadžbu $e^x = |x|$. (rj. $\tilde{x} = -0.5671$)
22. Metodom iteracije s točnošću $\varepsilon = 10^{-3}$ odredite rješenja jednadžbe $e^x = -x^2 + 1$. (rj. $\tilde{x} = -0.7147$)
23. Metodom iteracije s točnošću $\varepsilon = 10^{-3}$, približno riješite jednadžbu $x^3 = \ln|x|$. (rj. $\tilde{x} = -0.7047$)
24. Metodom iteracije s točnošću od 10^{-3} približno riješite jednadžbu $x^2 = \cos x$. (rj. $\tilde{x} = 0.8241$)
25. Metodom iteracije, s točnošću $\varepsilon = 10^{-2}$ približno riješite jednadžbu $e^{|x|} = -\frac{1}{x}$. (rj. $\tilde{x} = -0.567$)

Programska realizacija

1. Odredite približno realno rješenje, različito od nule, jednadžbe $e^{-x} + \frac{x}{5} - 1 = 0$ s točnošću većom od $\varepsilon = 10^{-4}$.
2. Odredite približno realno rješenje jednadžbe $\sqrt{x+1} = \frac{1}{x}$ s točnošću većom od $\varepsilon = 10^{-4}$.
3. Odredite približno realno rješenje jednadžbe $x - \sin x - \frac{1}{4} = 0$ s točnošću većom od $\varepsilon = 10^{-3}$.
4. Odredite približno realno rješenje jednadžbe $x^3 - x - 2 = 0$ s točnošću većom od $\varepsilon = 10^{-3}$.

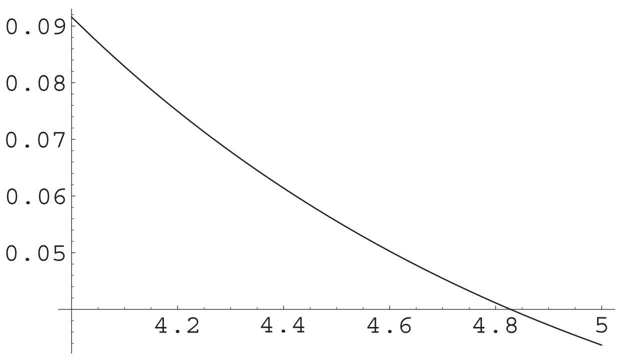
```
Plot[{y = Exp[-x], y = -x/5 + 1}, {x, -1, 6}]
```




```
- Graphics -

fi[x_] := 5 (1 - Exp[-x])

fid[x_] = D[fi[x], x]
```

$5\, e^{-x}$

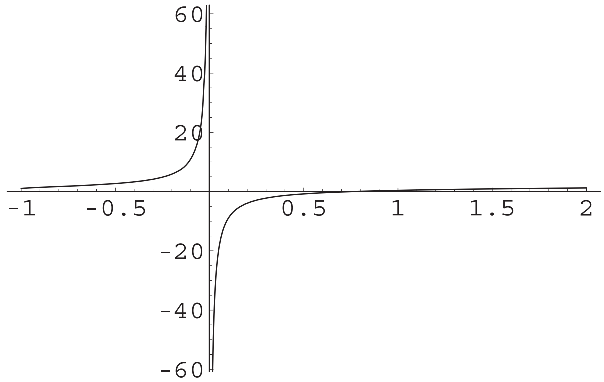
```
Plot[fid[x], {x, 4, 5}]
```




```
- Graphics -

x[n_] := fi[x[n - 1]]
x[0] = 5
N[Table[x[n], {n, 3}]]

5

{4.96631, 4.96516, 4.96512}
```

Slika 6.16.

Plot$\left[\sqrt{x+1} - \frac{1}{x}, \{x, -1, 2\}\right]$



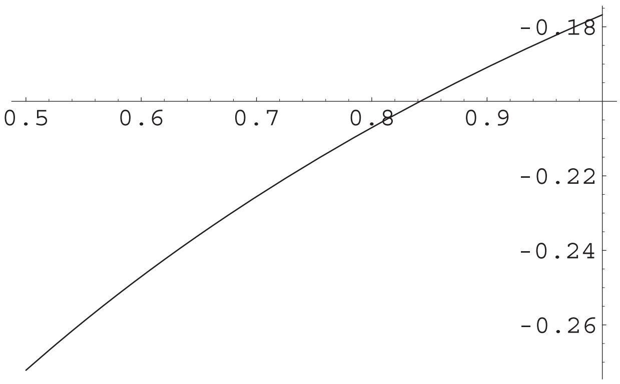
- Graphics -

fi[x_] := $\frac{1}{\sqrt{x+1}}$

fid[x_] = D[fi[x], x]

$-\frac{1}{2\ (1+x)^{3/2}}$

Plot$\left[\text{fid}[x], \left\{x, \frac{1}{2}, 1\right\}\right]$



- Graphics -

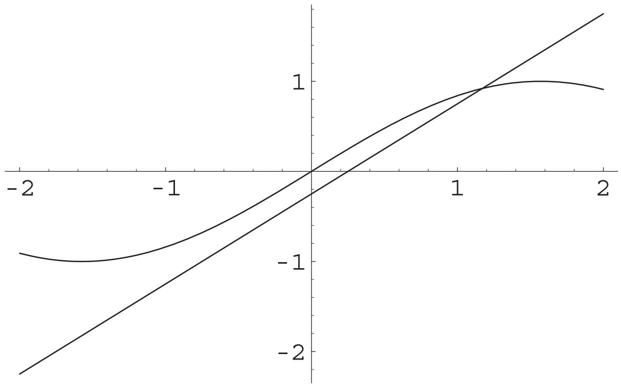
```
x[n_] := fi[x[n - 1]]
x[0] = 1
N[Table[x[n], {n, 8}]]
```

1

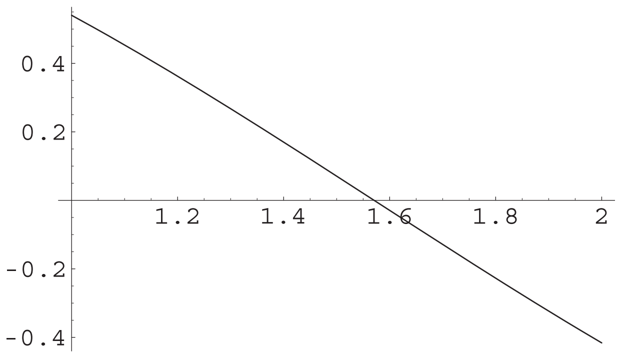
{0.707107, 0.765367, 0.752632, 0.755361, 0.754774, 0.7549, 0.754873, 0.754879}

Slika 6.17.

```
Plot[{y = Sin[x], y = x - 1/4}, {x, -2, 2}]
```



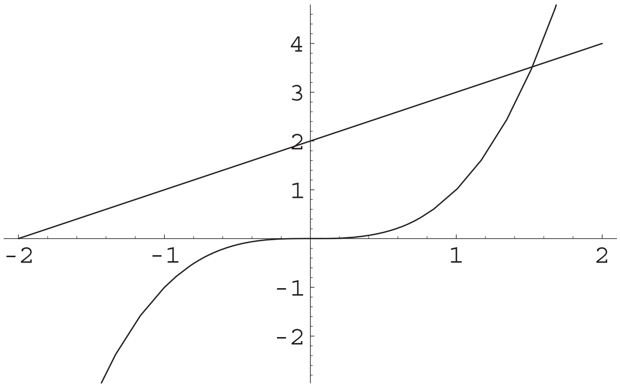

```
- Graphics -

fi[x_] := Sin[x] + 1/4

fid[x_] = D[fi[x], x]

Cos[x]

Plot[fid[x], {x, 1, 2}]
```




```
- Graphics -

x[n_] := fi[x[n - 1]]
x[0] = 1
N[Table[x[n], {n, 7}]]

1

{1.09147, 1.13731, 1.15751, 1.1658, 1.16911, 1.1704, 1.17091}
```

Slika 6.18.

```
Plot[{y = x^3, y = x + 2}, {x, -2, 2}]
```



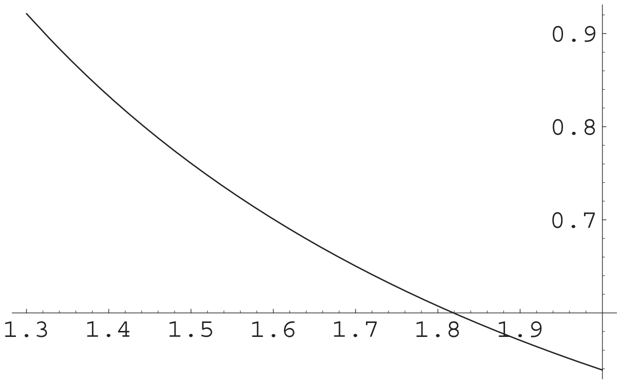

```
- Graphics -
```

$$\texttt{fi[x\_] :=} \sqrt[3]{x+2}$$

```
fid[x_] = D[f[x], x]
```

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{2\sqrt{1+x}}$$

```
Plot[fid[x], {x, 1.3, 2}]
```




```
- Graphics -

x[n_] := fi[x[n - 1]]
x[0] = 2
N[Table[x[n], {n, 5}]]

2

{1.5874, 1.53083, 1.52274, 1.52158, 1.52141}
```

Slika 6.19.

6.5. Sustavi nelinearnih jednadžbi

6.5.1. Newtonova metoda

Promatramo opći sustav nelineranih jednadžbi s n nepoznanica

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0 \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0 \\ &\vdots \\ f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0 \end{aligned} \tag{6.12}$$

gdje su f_i realne funkcije od n varijabli koje imaju neprekidne derivacije. Sustav (6.12) možemo vektorski kraće zapisati tako da variable $x_1, x_2, \ldots, x_n$ i funkcije $f_1, f_2, \ldots, f_n$ shvatimo kao komponente n-dimenzionalnih vektora

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad F(X) = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}$$

tako da uz oznaku $f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f_i(X)$ imamo vektorski zapis

$$F(X) = 0. \tag{6.13}$$

Ako pođemo od neke aproksimacije

$$X^{(k)} = \begin{bmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ \vdots \\ x_n^{(k)} \end{bmatrix},$$

matrični zapis iteracijskog koraka Newtonove metode je

$$X^{(k+1)} = X^{(k)} - J^{-1}(X^{(k)})F(X^{(k)}), \quad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{6.14}$$

gdje je s

$$J(X^{(k)}) = F'(X^{(k)}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(X^{(k)}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(X^{(k)}) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(X^{(k)}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(X^{(k)}) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(X^{(k)}) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(X^{(k)}) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(X^{(k)}) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(X^{(k)}) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(X^{(k)}) \end{bmatrix}$$

dana Jacobijeva matrica, a početnu aproksimaciju $X^{(0)}$ moramo odabrati. Ako je niz aproksimacija konvergentan, tj.

$$\xi = \lim_{k\to\infty} X^{(k)},$$

onda je pod gornjim pretpostavkama na f_i, taj limes rješenje polaznog sustava (6.12). Uvjeti pod kojima ovaj postupak konvergira prelaze nivo matematičkog znanja u okviru ovog kolegija pa ih ne ćemo razmatrati.

Primjer 6.12. *Newtonovom metodom riješite sustav nelinearnih jednadžbi*

$$\begin{aligned} \ln(x^2+y)+y-1 &= 0, \\ \sqrt{x}+xy &= 0, \end{aligned}$$

uzimajući za početne vrijednosti $x_0 = 2,\ y_0 = -1$.

Rješenje. Imamo $f_1(x,y) = \ln(x^2+y)+y-1,\ f_2 = \sqrt{x}+xy$ pa je

$$F(x,y) = \begin{bmatrix} \ln(x^2+y)+y-1 \\ \sqrt{x}+xy \end{bmatrix}.$$

Sada

$$J(x,y) = F'(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2x}{x^2+y} & 1+\frac{1}{x^2+y} \\ y+\frac{1}{2\sqrt{x}} & x \end{bmatrix},$$

pa je

$$J^{-1}(x,y) = \frac{1}{\det J(x,y)} \begin{bmatrix} x & -1-\frac{1}{x^2+y} \\ -y-\frac{1}{2\sqrt{x}} & \frac{2x}{x^2+y} \end{bmatrix},$$

gdje je $\det J(x,y) = \frac{1}{x^2+y}\left[2x^2-(x^2+y+1)\left(y+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\right]$.

Ako stavimo $D_k = \frac{1}{x_k^2+y_k}\left[2x_k^2-(x_k^2+y_k+1)\left(y_k+\frac{1}{2\sqrt{x_k}}\right)\right]$, Newtonova je iteracija sada u obliku

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k - \frac{1}{D_k}\left[x_k f_1(x_k,y_k) - \left(1+\frac{1}{x_k^2+y_k}\right) f_2(x_k,y_k)\right], \\ y_{k+1} &= y_k - \frac{1}{D_k}\left[-\left(y_k+\frac{1}{2\sqrt{x_k}}\right) f_1(x_k,y_k) + \left(\frac{2x_k}{x_k^2+y_k}\right) f_2(x_k,y_k)\right]. \end{aligned}$$

Izborom $x_0 = 2$ i $y_0 = -1$ ($f_1(x_0,y_0) = -0.901388,\ f_2(x_0,y_0) = -0.585786$), imamo

$$\begin{aligned} &x_1 = 2.28956,\ y_1 = -0.644050,\ f_1(x_1,y_1) = -0.118421,\ f_2(x_1,y_1) = 0.0385372, \\ &x_2 = 2.41141,\ y_2 = -0.645817,\ f_1(x_2,y_2) = -0.003122,\ f_2(x_2,y_2) = -0.004458, \\ &x_3 = 2.41225,\ y_3 = -0.643856,\ f_1(x_3,y_3) = 0.15\cdot 10^{-5},\ f_2(x_3,y_3) = 0.34\cdot 10^{-6}, \\ &x_4 = 2.41225,\ y_4 = -0.643856, \end{aligned}$$

pa je $(\tilde{x}, \tilde{y}) = (2.41225, -0.643856)$.

Zadaci za vježbu

1. Newtonovom metodom s jednom iteracijom riješite sustav nelinearnih jednadžbi
$$\sin(x+y) = 1.5x, \quad x^2 + y^2 = 1, \quad x_0 = 0.8, \; y_0 = 0.5.$$
(rj. $\tilde{x} = 0.67533, \; \tilde{y} = 0.80947$)
2. Newtonovom metodom odredite rješenje sustava
$$\begin{aligned} 2x^3 - y^2 - 1 &= 0 \\ xy^3 - y - 4 &= 0 \end{aligned}$$
uzevši za početnu iteraciju $x_0 = 1, \; y_0 = 1.5$. Postupak prekinite nakon druge iteracije. (rj. $\tilde{x} = 1.2415, \; \tilde{y} = 1.6633$)
3. Newtonovom metodom (u dvije iteracije) riješite sustav nelinearnih jednadžbi $x^3 - y^3 - x = 0, \quad x^3 + y^3 - 3xy = 0$, uzimajući početne vrijednosti $x_0 = -1, \; y_0 = 0,3$. (rj. $\tilde{x} = -0.98436, \; \tilde{y} = 0.31264$)
4. Newtonovom metodom odredite rješenje sustava $x^2 - 2y^3 + 1 = 0, \; x^3y - x - 4 = 0$, uzevši za početnu iteraciju $x_0 = 1.5, \; y_0 = 1$. Postupak prekinite nakon druge iteracije. (rj. $\tilde{x} = 1.975, \; \tilde{y} = 1.602$)
5. Newtonovom metodom u dva koraka riješite sustav jednadžbi $x^2 + 20x + y^2 = 1, \; y = 0,5x + \sin xy$, tako da je $x_0 = y_0 = 0$. (rj. $\tilde{x} = 0.04983, \; \tilde{y} = 0.02623$)
6. Newtonovom metodom u dvije iteracije riješite sustav $x^2 + 4y^2 - 4 = 0, \; x^2 - 2x - y + 1 = 0$, polazeći od $x_0 = 1.5, \; y_0 = 0.5$. (rj. $\tilde{x} = 1.71644, \; \tilde{y} = 0.51328$)
7. Newtonovom metodom u dvije iteracije riješite sustav jednadžbi $x^3 + y^3 = 3xy, \; x^2 + y^2 = 3x + 3y - 3.5, \; x_0 = 0.5, \; y_0 = 1.5$. (rj. $\tilde{x} = 0.538, \; \tilde{y} = 1.301$)

Programska realizacija

1. Riješite sustav jednadžbi $x^2 + y^2 = 1, \; y = xe^x$ za početne vrijednosti $x_0 = 0.1$ i $y_0 = 0.5$.
2. Riješite sustav jednadžbi $x^2 + y - 3 = 0, \; xy + 1 = 0$ za početne vrijednosti $x_0 = 1$ i $y_0 = -1$.
3. Riješite sustav jednadžbi $x^2 + y^2 = 2, \; x^2 - y^2 = 1$ za početne vrijednosti $x_0 = 1$ i $y_0 = 1$.
4. Riješite sustav jednadžbi $9x^2y + 4y^2 - 36 = 0, \; 16y^2 - x^2 + y + 1 = 0$ za početne vrijednosti $x_0 = 2$ i $y_0 = 1$.

```
FindRoot[{x^2 + y^2 == 1, y == x * Exp[x]}, {x, 0.1}, {y, 0.5}]
{x → 0.513489, y → 0.858096}
```

Slika 6.20.

```
FindRoot[{x^2 + y == 3, y * x + 1 == 0}, {x, 1}, {y, -1}]
{x → 1.87939, y → -0.532089}
```

Slika 6.21.

```
FindRoot[{x^2 + y^2 == 2, x^2 - y^2 == 1}, {x, 1}, {y, 1}]
{x → 1.22474, y → 0.707107}
```

Slika 6.22.

```
FindRoot[{9 x^2 y + 4 y^2 == 36, 16 y^2 - x^2 + y + 1 == 0}, {x, 2}, {y, 1}]
{x → 2.60113, y → 0.569869}
```

Slika 6.23.

6.5.2. Metoda iteracije

Ideja metode itracija je da sustav jednadžbi (6.13) prevodimo u ekvivalentan oblik

$$X = \Phi(X) \tag{6.15}$$

koji u razvijenom obliku glasi

$$\begin{aligned} x_1 &= \varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ x_2 &= \varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ &\vdots \\ x_n &= \varphi_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{aligned} \tag{6.16}$$

te da na njemu provodimo analogan postupak s n varijabli. Polazimo dakle od početne aproksimacije $X^{(0)}$ i računamo

$$X^{(k+1)} = \Phi(X^{(k)}), \quad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{6.17}$$

Ako je dobiveni niz $X^{(k)}$ konvergentan i ako su funkcije φ_i neprekidne onda je

$$\xi = \lim_{k\to\infty} X^{(k)}$$

rješenje sustava (6.15), odnosno (6.13). Uvjeti pod kojima ovaj postupak konvergira prelaze nivo matematičkog znanja u okviru ovog kolegija pa ih ne ćemo razmatrati.

Primjer 6.13. *Metodom iteracije riješite sustav nelinearnih jednadžbi*

$$\begin{aligned} x &= \sin(x + y), \\ y &= \cos(x - y), \end{aligned}$$

uzimajući za početne vrijednosti $x_0 = y_0 = 0$.

Rješenje. Ako stavimo $\varphi_1(x, y) = \sin(x + y)$, $\varphi_2(x, y) = \cos(x - y)$ imamo $x_{k+1} = \sin(x_k + y_k)$, $y_{k+1} = \cos(x_k - y_k)$. Izborom $x_0 = y_0 = 0$ $(f_1(x_0, y_0) = 0,\ f_2(x_0, y_0) = 1)$ imamo

$$\begin{array}{llll}
x_1 = 0, & y_1 = 1, & f_1(x_1, y_1) = 0.84147, & f_2(x_1, y_1) = -0.4597, \\
x_2 = 0.84147, & y_2 = 0.5403, & f_1(x_2, y_2) = 0.14072, & f_2(x_2, y_2) = 0.41469, \\
x_3 = 0.98219, & y_3 = 0.95499, & f_1(x_3, y_3) = -0.04856, & f_2(x_3, y_3) = 0.04464, \\
x_4 = 0.93363, & y_4 = 0.99963, & f_1(x_4, y_4) = 0.0014, & f_2(x_4, y_4) = -0.00181, \\
x_5 = 0.93503, & y_5 = 0.99782, & f_1(x_5, y_5) = 0.00015, & f_2(x_5, y_5) = 0.00021, \\
x_6 = 0.93517, & y_6 = 0.99803, & f_1(x_6, y_6) = -0.00012, & f_2(x_6, y_6) = -0.50393 \cdot 10^{-5}, \\
x_7 = 0.93505, & y_7 = 0.99802, & f_1(x_7, y_7) = 0.00005, & f_2(x_7, y_7) = -0.19554 \cdot 10^{-5},
\end{array}$$

pa je $(\tilde{x}, \tilde{y}) = (0.93505, 0.99802)$.