

1 REALNE FUNKCIJE REALNE VARIJABLE

1. Neka je $f(x) = \ln \frac{4e^x}{3-e^x}$. Odredite a) f^{-1} b) $\mathcal{D}(f)$ i $\mathcal{R}(f)$ c) Odredite $\min f$, $\inf f$, $\max f$, $\sup f$.
2. Odredite prirodnu domenu funkcije $f(x) = \ln(3e^x - e^{3x}) + \sqrt[5]{\log_5 \frac{1}{x+3}} + (1 - \cos(\pi x))^{-1}$.
3. Neka je $f(x) = \ln \frac{3e^x}{e^x+2}$. Odredite a) f^{-1} b) $\mathcal{D}(f)$ i $\mathcal{R}(f)$ c) Odredite $\min f$, $\inf f$, $\max f$, $\sup f$.
4. Odredite prirodnu domenu funkcije $f(x) = \sqrt[3]{\log_3 \frac{1}{5-x}} + \ln(e^{3x} - 2e^x) + (1 - \sin(\pi x))^{-1}$.
5. a) Odredite domenu funkcije $f(x) = (1 + \frac{4}{x})^{x+1}$. b) Odredite sve asimptote grafa te funkcije.
6. a) Odredite domenu funkcije $f(x) = (1 + \frac{3}{x})^{x+2}$. b) Odredite sve asimptote grafa te funkcije.
7. Ako je $f(x) = \ln(e^x + 2)$, odredite $\mathcal{D}(f)$, $\mathcal{R}(f)$, $\mathcal{D}(f^{-1})$, $\mathcal{R}(f^{-1})$.
8. Odredite prirodnu domenu funkcije $f(x) = \arcsin \ln x + \operatorname{tg}(2\pi x)$.
9. Ako je $f(x) = 5^{-\frac{3}{x^2}}$, odredite $\inf f$, $\min f$, $\sup f$, $\max f$.
10. Ako je $f(x) = 3^{-\frac{5}{x^2}}$, odredite $\inf f$, $\min f$, $\sup f$, $\max f$.
11. Ako je $f(x) = e^{-\frac{3}{x^2}}$, odredite $\min f$, $\inf f$, $\max f$, $\sup f$.
12. Odredite prirodnu domenu funkcije $f(x) = (e^x - 3)^{-3} + \sqrt[3]{\ln \frac{2-x}{1+x}}$.
13. Odredite $\min f$, $\inf f$, $\max f$, $\sup f$, ako je $f(x) = e^{-\frac{5}{x^2}}$.
14. Odredite prirodnu domenu funkcije $f(x) = \sqrt[5]{\ln \frac{2+x}{1-x}} + (e^x - 2)^{-2}$.
15. Odredite prirodnu domenu funkcije $f(x) = \sqrt[4]{\log_{1/5} \log_5 x} + \frac{1}{\cos(\pi x)}$.
16. Ako je $f(x) = \frac{x-1}{2x+5}$, odredite $\mathcal{D}(f)$, $\mathcal{R}(f)$, $\mathcal{D}(f^{-1})$, $\mathcal{R}(f^{-1})$.
17. Odredite prirodnu domenu funkcije $f(x) = \frac{1}{\sin(\pi x)} + \sqrt[6]{\log_{1/4} \log_4 x}$.
18. Ako je $f(x) = \frac{x+1}{3x+4}$, odredite $\mathcal{D}(f)$, $\mathcal{R}(f)$, $\mathcal{D}(f^{-1})$, $\mathcal{R}(f^{-1})$.
19. Neka je $f(x) = \sqrt[3]{2 - e^{-x^2}}$. a) Odredite $\mathcal{D}(f)$, $\mathcal{R}(f)$. b) Odredite (ako postoje) $\min f$, $\inf f$, $\max f$, $\sup f$.
20. Odredite $\mathcal{D}(f)$, ako je $f(x) = \log_{1/3} \log_3 \log_9(1+x^2) + \sqrt[5]{\arccos \frac{x-3}{5}} + e^{1/\sin \pi x}$. Izračunajte (ako se može) $f(-1)$, $f(0)$, $f(3)$, $f(7/2)$.
21. Odredite $\mathcal{D}(f)$, ako je $f(x) = \log_{1/2} \log_2 \log_4(x^2+1) + \sqrt[3]{\arcsin \frac{x-3}{4}} + e^{1/\cos \pi x}$. Izračunajte (ako se može) $f(-1)$, $f(0)$, $f(3)$, $f(7/2)$.
22. Neka je $f(x) = \sqrt[5]{e^{-x^2} - 3}$. a) Odredite $\mathcal{D}(f)$, $\mathcal{R}(f)$. b) Odredite (ako postoje) $\min f$, $\inf f$, $\max f$, $\sup f$.

2 GRANIČNA VRIJEDNOST FUNKCIJE JEDNE VARIJABLE

1. Neka je $f(x) = (x - 1)^{\operatorname{ctg}(\pi x)}$. a) Izračunajte $\lim_{x \rightarrow 3/2} f(x)$ b) Izračunajte $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ c) Izračunajte $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$.
2. Izračunajte a) $k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{5x^3 + 3x^2 + 2}}{x}$ b) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{5x^3 + 3x^2 + 2} - kx)$.
3. Neka je $f(x) = (2x)^{\operatorname{tg}(\pi x)}$. a) Izračunajte $\lim_{x \rightarrow 1/4} f(x)$ b) Izračunajte $\lim_{x \rightarrow 1/2} f(x)$ c) Izračunajte $\lim_{x \rightarrow 3/2} f(x)$.
4. Izračunajte a) $k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{4x^3 + 2x^2 + 5}}{x}$ b) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{4x^3 + 2x^2 + 5} - kx)$.
5. Neka je $f(x) = \left(\frac{x + \sqrt[3]{x}}{x - \sqrt[3]{x}} \right)^{\sqrt[3]{3x^2 + x + 1}}$. Izračunajte a) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ b) $\lim_{x \rightarrow 8} f(x)$.
6. Izračunajte a) $\lim_{x \rightarrow 1/2} \frac{4x^2 - 1}{e^{2x-1} - 1}$ b) $\lim_{x \rightarrow 1/2} \frac{\ln(x^2 - x + 5/4)}{x^2 - x + 1/4}$ c) $\lim_{x \rightarrow 1/2} \sqrt[3]{\frac{4x^2 - 1}{x^2 - x + 1/4} \frac{\ln(x^2 - x + 5/4)}{e^{2x-1} - 1}}$.
7. Izračunajte a) $\lim_{x \rightarrow 1/3} \frac{e^{3x-1} - 1}{9x^2 - 1}$ b) $\lim_{x \rightarrow 1/3} \frac{x^2 - x + 2/9}{\ln(x^2 - x + 11/9)}$ c) $\lim_{x \rightarrow 1/3} \sqrt[3]{\frac{x^2 - x + 2/9}{9x^2 - 1} \frac{e^{3x-1}}{\ln(x^2 - x + 11/9)}}$.
8. Neka je $f(x) = \left(\frac{x - \sqrt[4]{x}}{x + \sqrt[4]{x}} \right)^{\sqrt[4]{4x^3 + x + 1}}$. Izračunajte a) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ b) $\lim_{x \rightarrow 16} f(x)$.

3 DIFERENCIJALNI RAČUN FUNKCIJE JEDNE VARIJABLE

1. a) Skicirajte graf funkcije $f(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$. b) Po definiciji derivacije izračunajte $f'(2)$. c) Tabličnim deriviranjem izračunajte $f'(2)$. d) Je li funkcija f u $x_0 = 2$ rastuća ili padajuća? Obrazložite!
2. a) Skicirajte graf funkcije $f(x) = \frac{1}{(x+2)^2}$. b) Po definiciji derivacije izračunajte $f'(1)$. c) Tabličnim deriviranjem izračunajte $f'(1)$. d) Je li funkcija f u $x_0 = 1$ rastuća ili padajuća? Obrazložite!
3. a) Skicirajte graf funkcije $f(x) = \ln(3 - x)$. b) Izračunajte $f'(1)$ i $f''(1)$. c) Izračunajte $|\Delta f(1) - df(1) - \frac{1}{2!}d^2 f(1)|$ za $\Delta x = 0.2$. d) Je li funkcija f za $x_0 = 1$ rastuća ili padajuća? Obrazložite!
4. a) Skicirajte graf funkcije $f(x) = \ln(4 - x)$. b) Izračunajte $f'(2)$ i $f''(2)$. c) Izračunajte $|\Delta f(2) - df(2) - \frac{1}{2!}d^2 f(2)|$ za $\Delta x = 0.3$. d) Je li funkcija f za $x_0 = 2$ rastuća ili padajuća?

5. a) Skicirajte graf funkcije $f(x) = 3 - e^{-x}$. b) Izračunajte $f'(-2)$ i $f''(-2)$. c) Je li funkcija f za $x_0 = -2$ rastuća ili padajuća? Obrazložite? d) Nalazi li se graf funkcije f iznad ili ispod svoje tangente za $x_0 = -2$? Obrazložite. e) Što je graf funkcije $g(x) = f(-2) + f'(-2)(x + 2)$ grafu funkcije f ?
6. Neka je $f(x) = \frac{1}{2+e^x}$. a) Odredite asimptote krivulje $y = f'(x)$. b) Odredite u kojoj točki graf funkcije ima najveći pad, a gdje najveći rast? Kako zovemo tu točku?
7. a) Skicirajte graf funkcije $f(x) = e^{-x} - 2$. b) Izračunajte $f'(-3)$ i $f''(-3)$. c) Je li funkcija f za $x_0 = -3$ rastuća ili padajuća? Obrazložite? d) Nalazi li se graf funkcije f iznad ili ispod svoje tangente za $x_0 = -3$? Obrazložite. e) Što je graf funkcije $g(x) = f(-3) + f'(-3)(x + 3)$ grafu funkcije f ?
8. a) Skicirajte graf funkcije $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$. b) Izračunajte $f'(1)$ i $f''(1)$. c) Je li graf funkcije f za $x_0 = 1$ konkavan ili konveksan? Obrazložite! d) Je li funkcija f za $x_0 = 1$ padajuća ili rastuća? Obrazložite!
9. a) Skicirajte graf funkcije $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$. b) Izračunajte $f'(2)$ i $f''(2)$. c) Je li graf funkcije f za $x_0 = 2$ konkavan ili konveksan? Obrazložite! d) Je li funkcija f za $x_0 = 2$ padajuća ili rastuća? Obrazložite!
10. Po definiciji derivacije izračunajte $f'(3)$ ako je $f(x) = 4 + \sqrt{2x + 5}$.
11. Izračunajte $f'(-1)$, $f''(-1)$ ako je $f(x) = \frac{x}{3x+2} + \ln 2009$.
12. Po definiciji derivacije izračunajte $f'(2)$ ako je $f(x) = 5 + \sqrt{3x + 4}$.
13. Izračunajte $f'(-2)$, $f''(-2)$ ako je $f(x) = \frac{x}{2x+5} + \arctg 2009$.
14. Po definiciji derivacije izračunajte $f'(3)$ ako je $f(x) = \frac{x}{x+1}$.
15. Izračunajte $f'(-1)$, $f''(-1)$ ako je $f(x) = \sqrt{3x + 5} + 2008^{2009}$.
16. Izračunajte $f'(-2)$, $f''(-2)$ ako je $f(x) = \sqrt{2x + 7} + 2009^{2008}$.
17. Po definiciji derivacije izračunajte $f'(2)$ ako je $f(x) = \frac{x}{x+3}$.
18. Po definiciji derivacije izračunajte $f'(1)$ ako je $f(x) = (3x + 1)^2$.
19. Izračunajte $f'(-1)$, $f''(-1)$ ako je $f(x) = \ln(2x + 3) + \log_{2008} 2009$.
20. Po definiciji derivacije izračunajte $f'(2)$ ako je $f(x) = (2x + 1)^2$.
21. Izračunajte $f'(-2)$, $f''(-2)$ ako je $f(x) = \ln(3x + 7) + \log_{2009} 2008$.

4 PRIMJENA DIFERENCIJALNOG RAČUNA FUNKCIJE JEDNE VARIJABLE

1. Odredite kvalitativni graf funkcije $f(x) = (x + 1)e^{-3x}$.
2. Odredite jednađbe asimptota krivulje $y = (x + 1) \ln \left(1 + \frac{2}{x}\right)$. Izračunajte $y(-10^2)$, $y(-2 - 10^{-2})$, $y(10^{-2})$, $y(10^2)$.
3. Izrađujemo prozorski okvir prozora površine $4m^2$ s dvije vertikalne prečke i jednom horizontalnom. Odredite omjer visine i širine prozora u izradu kojeg smo utrošili minimum materijala.
4. Odredite presječne točke krivulje $y = 3 - e^{-2x}$ s koordinatnim osima. Nalazi li se u tim točkama ta krivulja ispod ili iznad svojih tangenata? Odredite kutove koje ta krivulja zatvara s koordinatnim osima.
5. Izračunajte površinu trokuta kojeg čine točka $A(0, -3)$ i dirališta tangenata spuštenih iz točke A na krivulju $y = x^2 - x$.
6. Odredite jednađbe asimptota krivulje $y = (x + 2) \ln \left(1 + \frac{3}{x}\right)$. Izračunajte $y(-10^2)$, $y(-3 - 10^{-2})$, $y(10^{-2})$, $y(10^2)$.
7. Izračunajte površinu trokuta kojeg čine točka $A(0, 8)$ i dirališta tangenata spuštenih iz točke A na krivulju $y = x - x^2$.
8. Odredite kvalitativni graf funkcije $f(x) = (x + 3)e^{2x}$.
9. Izrađujemo prozorski okvir prozora površine $6m^2$ s jednom vertikalnom prečkom i dvije horizontalne. Odredite omjer visine i širine prozora u izradu kojeg smo utrošili minimum materijala.
10. Odredite presječne točke krivulje $y = e^{-3x} - 2$ s koordinatnim osima. Nalazi li se u tim točkama ta krivulja ispod ili iznad svojih tangenata? Odredite kutove koje ta krivulja zatvara s koordinatnim osima.
11. Odredite kvalitativni graf funkcije $f(x) = e^{2x} - 3e^x$. Izračunajte $f(-10)$, $f(10)$. Što zaključujete?
12. U lik određen krivuljama $y = \sqrt{x + 9}$, $x + y = 3$, $y = 0$ upisujemo pravokutnike sa stranicama paralelnim koordinatnim osima. Odredite omjer osnovice i visine pravokutnika najveće površine.
13. Odredite jednađbe tangenata krivulje $y = x^3 - 4x$ paralelne sa sekantom te krivulje kroz točke $A(0, y_0)$, $B(3, y_1)$. Da li se te tangente u svojim dirališnim točkama nalaze ispod ili iznad te krivulje?

14. Odredite kvalitativni graf funkcije $f(x) = 5e^x - e^{2x}$. Izračunajte $f(-10)$, $f(10)$.
15. U lik određen krivuljama $y = \sqrt{x+4}$, $x+y=2$, $y=0$ upisujemo pravokutnike sa stranicama paralelnim koordinatnim osima. Odredite omjer osnovice i visine pravokutnika najveće površine.
16. Odredite jednadžbe tangenata krivulje $y = x^3 - 2x$ paralelne sa sekantom te krivulje kroz točke $A(0, y_0)$, $B(2, y_1)$. Da li se te tangente u svojim dirališnim točkama nalaze ispod ili iznad te krivulje?
17. Odredite kvalitativni graf funkcije $f(x) = (x+1)^2 \ln(x+1)$.
18. Odredite omjer stranica pravokutnika s stranicama paralelnim koordinatnim osima maksimalne površine upisanog u lik određen krivuljama $x+y=20$, $y=3x$, $y=0$.
19. Odredite kvalitativni graf funkcije $f(x) = (x-1)^2 \ln(x-1)$.
20. Odredite omjer stranica pravokutnika s stranicama paralelnim koordinatnim osima maksimalne površine upisanog u lik određen krivuljama $y=2x$, $x+y=30$, $y=0$.
21. Odredite $b \in \mathbf{R}$ za koji je sustav $x_1 + x_3 + x_4 = 4$, $x_2 + x_3 + x_4 = 2$, $x_1 + x_2 + x_3 = 3$, $x_1 + x_2 + bx_4 = 0$ a) određen b) neodređen c) nesuglasan. U slučaju kada je neodređen riješite ga.
22. Neka je $f(x) = \frac{1}{3+e^x}$. a) Odredite asimptote krivulje $y = f'(x)$. b) Odredite u kojoj točki graf funkcije ima najveći pad, a gdje najveći rast? Kako zovemo tu točku?
23. Izrađujemo prozorske okvire s dvije vertikalne prečke za prozore površine $4m^2$. Koliko puta je horizontalna stranica dulja od vertikalne stranice prozora ako izrađujemo okvire uz minimalan utrošak materijala?
24. Neka je $f(x) = \ln^2 x - 3 \ln x$. a) Izračunajte $f(10^{-10})$, $f(10^{10})$. b) Odredite kvalitativni graf funkcije f .
25. a) Korištenjem kalkulatora izračunajte $\sqrt[3]{720}$. b) Korištenjem linearne aproksimacije izračunajte približnu vrijednost od $\sqrt[3]{720}$. c) Korištenjem kvadratne aproksimacije izračunajte približnu vrijednost od $\sqrt[3]{720}$.
26. a) Korištenjem kalkulatora izračunajte $\sqrt[3]{500}$. b) Korištenjem linearne aproksimacije izračunajte približnu vrijednost od $\sqrt[3]{500}$. c) Korištenjem kvadratne aproksimacije izračunajte približnu vrijednost od $\sqrt[3]{500}$.
27. Izrađujemo prozorske okvire s četiri vertikalne prečke za prozore površine $5m^2$. Koliko puta je horizontalna stranica dulja od vertikalne stranice prozora ako izrađujemo okvire uz minimalan utrošak materijala?

28. Neka je $f(x) = 2 \ln x - \ln^2 x$. a) Izračunajte $f(10^{-10})$, $f(10^{10})$. b) Odredite kvalitativni graf funkcije f .
29. Odredite jednadžbu tangente na krivulju $x^2 + y^2 = 4$ paralelnu s pravcem $y = -2x$.
30. Odredite jednadžbu tangente na krivulju $x^2 + y^2 = 6$ paralelnu s pravcem $y = -x$.
31. Odredite jednadžbu tangente na krivulju $y = x^{x+1}$ koja prolazi točkom $A(2, 8)$.
32. Odredite jednadžbu tangente na krivulju $y = (x + 1)^x$ koja prolazi točkom $A(2, 9)$.
33. Izračunajte kutove (u stupnjevima i radijanima) koje krivulja $y = \ln(4 - x)$ zatvara s koordinatnim osima.
34. Odredite (globalne) ekstreme funkcije $f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$ na intervalu $[0, 3]$.
35. Koristeći linearnu aproksimaciju izračunajte približnu vrijednost od $\sqrt[3]{720}$.
36. Koristeći linearnu aproksimaciju izračunajte približnu vrijednost od $\sqrt[4]{620}$.
37. Izračunajte kutove (u stupnjevima i radijanima) koje krivulja $y = 5 - e^{-x}$ zatvara s koordinatnim osima.
38. Odredite (globalne) ekstreme funkcije $f(x) = \frac{1-3x}{x+2}$ na intervalu $[0, 2]$.
39. Ima li krivulja $y = (x + 1) \ln\left(1 + \frac{2}{x}\right)$ horizontalnih asimptota?
40. Izračunajte kutove između krivulja $x^2 + y^2 = 4$, $x = 1$.
41. Koristeći kvadratnu aproksimaciju izračunajte $\sin 1.5$.
42. Koristeći kvadratnu aproksimaciju izračunajte $\cos 1.5$.
43. Ima li krivulja $y = (x + 3) \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$ horizontalnih asimptota?
44. Izračunajte kutove između krivulja $y^2 = -4x$, $x = -1$.
45. Ima li krivulja $y = (x + 1) \ln(1 + x)$ vertikalnih asimptota?
46. Izračunajte kutove (u stupnjevima i radijanima) koje krivulja $y = \frac{2-x}{x+1}$ zatvara s koordinatnim osima.
47. Odredite (globalne) ekstreme funkcije $f(x) = e^{\frac{1}{x+2}}$ na intervalu $[0, 1]$.
48. Ima li krivulja $y = (x + 3) \ln(3 + x)$ vertikalnih asimptota?
49. Izračunajte kutove (u stupnjevima i radijanima) koje krivulja $y = \frac{3-x}{x-1}$ zatvara s koordinatnim osima.
50. Odredite (globalne) ekstreme funkcije $f(x) = e^{\frac{1}{x+1}}$ na intervalu $[0, 2]$.