7. Interpolacija

7.1. Uvod

Da bismo motivirali problem zamislimo da eksperimentalnim mjerenjem istražujemo nepoznatu funkciju $x \to f(x)$. Time dobivamo seriju podataka

$$(x_0, f(x_0)),\ (x_1, f(x_1)),\ \dots\ ,(x_n, f(x_n)) \tag{7.1}$$

koji u ravnini predstavljaju točke grafa Γ_f.

Postavlja se pitanje izračunavanja aproksimativnih vrijednosti funkcije f izvan točaka x_i, tj. za vrijednosti argumenata $x,\ x \neq x_i$. Oblik funkcije nam je potpuno nepoznat (znamo samo njezinu vrijednost u točkama $x_0, x_1, \dots, x_n$). Stoga nepoznatu funkciju f zamijenjujemo s drugom, nama poznatom funkcijom, koja ima iste vrijednosti u zadanim točkama. Svakako je najjednostavnija takva funkcija polinom.

To nas vodi na problem iznalaženja tzv. interpolacijskog polinoma:

Teorem 7.1. *Neka je $n \in \mathbf{N_0}$. Za zadane točke $(x_k, f(x_k)),\ k = 0, \dots, n$, gdje je $x_i \neq x_j$ za $i \neq j$, postoji jedinstven (interpolacijski) polinom stupnja najviše n*

$$P_n(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n \tag{7.2}$$

za koji vrijedi

$$P_n(x_k) = f(x_k), \quad k = 0, 1, \dots, n. \tag{7.3}$$

Dokaz. Uvrstimo li redom u polinom (7.2) točke x_k dobivamo sljedeći sustav linearnih jednadžbi po nepoznatim koeficijentima $a_0, a_1, \dots, a_n$.

$$\begin{array}{ccccccccc} a_0 & + & a_1 x_0 & + & \cdots & + & a_n x_0^n & = & f(x_0) \\ a_0 & + & a_1 x_1 & + & \cdots & + & a_n x_1^n & = & f(x_1) \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_0 & + & a_1 x_n & + & \cdots & + & a_n x_n^n & = & f(x_n). \end{array} \tag{7.4}$$

Sustav (7.4) ima jedinstveno rješenje zbog toga što je determinanta sustava (Vandermondeova determinanta)

$$\begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} = \prod_{i>j}(x_i - x_j) \neq 0.$$

Rješenjem sustava (7.4) dobivamo koeficijente $a_0, a_1, \ldots, a_n$, odnosno traženi interpolacijski polinom.

Točke x_i zovu se čvorovi (bazne točke ili interpolacijske točke).

Ovakav oblik interpolacije, kad tražena funkcija (u ovom slučaju polinom) mora interpolirati samo funkcijske vrijednosti zadane funkcije, obično zovemo Lagrangeova interpolacija. U općenitijem slučaju, možemo zahtijevati interpolaciju zadanih vrijednosti funkcija i njezinih uzastopnih derivacija. Takvu interpolaciju zovemo Hermiteova interpolacija.

7.2. Lagrangeov oblik interpolacijskog polinoma

Da bismo našli koeficijente interpolacijskog polinoma, nije nužno rješavati linearni sustav za koeficijente. Interpolacijski polinom P_n možemo odmah zapisati korištenjem tzv. Lagrangeove baze $\{p_n^k, k = 0, \ldots, n\}$

$$L_n(x) = P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) p_n^k(x), \tag{7.5}$$

pri čemu je

$$p_n^k(x_i) = \begin{cases} 0, & \text{za } i \neq k, \\ 1, & \text{za } i = k. \end{cases}$$

Interpolacijski polinom p_n^k lako nalazimo, zato što su sva čvorišta, osim x_k, njegove nultočke. Imamo dakle da je

$$p_n^k(x) = C_k(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{k-1})(x - x_{k+1})\cdots(x - x_n)$$

gdje je C_k konstanta, koju lako određujemo uvrštavanjem $x = x_k$. Kako je $p_n^k(x_k) = 1$, imamo

$$1 = C_k(x_k - x_0)(x_k - x_1)\cdots(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})\cdots(x_k - x_n)$$

odnosno

$$C_k = \frac{1}{(x_k - x_0)(x_k - x_1)\cdots(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})\cdots(x_k - x_n)}.$$

Time je

$$p_n^k(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)},$$

što prema (7.5) daje

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) \prod_{j=0,\, j\neq k}^{n} \frac{x-x_j}{x_k-x_j}. \tag{7.6}$$

Zapis (7.6) zove se Lagrangeov oblik interpolacijskog polinoma.

Primjer 7.1. *Odredite Lagrangeov interpolacijski polinom za točke zadane tablicom*

x	*0*	*1*	*2*
y	*1*	*2*	*4*

Rješenje.

$$\begin{aligned} L_2(x) &= \sum_{k=0}^{2} y_k \prod_{j=0,\, j\neq k}^{2} \frac{x-x_j}{x_k-x_j} = y_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} \\ &+ y_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + y_2 \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} \\ &= 1 \cdot \frac{(x-1)(x-2)}{(-1)\cdot(-2)} + 2 \cdot \frac{(x-0)(x-2)}{1\cdot(-1)} + 4 \cdot \frac{(x-0)(x-1)}{2\cdot 1} \\ &= \frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} + 1. \end{aligned}$$

Za ocjenu pogreške interpolacijskog polinoma imamo:

Teorem 7.2. *Pretpostavimo da funkcija f ima $(n+1)$-u derivaciju na segmentu $[a,b]$ za neki $n \in \mathbf{N_0}$. Neka su $x_k \in [a,b]$, $k = 0,\ldots,n$, međusobno različiti čvorovi interpolacije, tj. $x_i \neq x_j$ za $i \neq j$, i neka je L_n interpolacijski polinom za funkciju f u tim čvorovima. Tada za svaki $x \in (a,b)$ vrijedi (lokalna ograda)*

$$|f(x) - L_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)|$$

pri čemu je $M_{n+1} = \max_{x\in[a,b]} |f^{(n+1)}(x)|$.

Za ekvidistantne čvorove imamo $x_{k+1} - x_k = h,\ k = 0,\ldots,n-1, h = \frac{b-a}{n}$ pa je greška (uniformna ograda) zadana s

$$\max_{x\in[x_0,x_n]} |f(x) - L_n(x)| \leq \frac{h^{n+1}}{4(n+1)} M_{n+1} = \varepsilon_n.$$

7.3. Izračunavanje interpolacijskog polinoma, Aitkenova interpolacijska shema

Kao što znamo, polinomi su funkcije koje su definirane na svim realnim brojevima, pa prema tome možemo izračunati $L_n(x)$ za bilo koji realan broj $x \in \mathbf{R}$. Ipak, u tome razlikujemo dva slučaja obzirom na polaznu funkciju f. Ako izračunavamo $L_n(x)$ za neki x između x_0 i x_n, tj. $x_0 < x < x_n$, onda govorimo da smo izvršili interpolaciju, dok za ostale x, tj. x izvan segmenta $[x_0, x_n]$, kažemo da smo izvršili ekstrapolaciju.

U slučaju da nam ne treba opći izraz za L_n nego samo njegove vrijednosti za neke x spretno je služiti se tzv. Aitkenovom interpolacijskom shemom. Radi kraćeg zapisivanja označimo $f(x_i) = y_i$. Napišimo jednadžbu linearnog interpolacijskog polinoma koji prolazi točkama (x_i, y_i) i (x_{i+1}, y_{i+1}). Označimo taj polinom sa $L_{i,i+1}$ pa prema (7.6) imamo

$$\begin{aligned} L_{i,i+1}(x) &= y_i \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} + y_{i+1} \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} = \frac{1}{x_{i+1} - x_i}[y_i(x_{i+1} - x) - y_{i+1}(x_i - x)] \\ &= \frac{1}{x_{i+1} - x_i} \begin{vmatrix} y_i & x_i - x \\ y_{i+1} & x_{i+1} - x \end{vmatrix}. \end{aligned} \tag{7.7}$$

Analogno možemo odrediti

$$L_{i,i+1,i+2}(x) = \frac{1}{x_{i+2} - x_i} \begin{vmatrix} L_{i,i+1}(x) & x_i - x \\ L_{i+1,i+2}(x) & x_{i+2} - x \end{vmatrix}, \tag{7.8}$$

pa naslućujemo da općenito vrijedi

$$L_n(x) = L_{0,1,\ldots,n}(x) = \frac{1}{x_n - x_0} \begin{vmatrix} L_{0,1,\ldots,n-1}(x) & x_0 - x \\ L_{1,2,\ldots,n}(x) & x_n - x \end{vmatrix}, \tag{7.9}$$

što se lako dokaže indukcijom.

Formula (7.9) daje drugi zapis interpolacijskog polinoma. Taj zapis je vrlo podoban za izračunavanje vrijednosti interpolacijskog polinoma, posebno na računskim strojevima jer se radi o višestrukoj uzastopnoj primjeni istog postupka (rekurzija). Shema računanja interpolacijskog polinoma izgleda ovako:

x_i	y_i	$x_i - x$	$L_{i,i+1}(x)$	$L_{i,i+1,i+2}(x)$	$L_{i,i+1,i+2,i+3}(x)$	$L_{i,i+1,i+2,i+3,i+4}(x)$
x_0	y_0	$x_0 - x$	$L_{0,1}(x)$	$L_{0,1,2}(x)$	$L_{0,1,2,3}(x)$	$L_{0,1,2,3,4}(x)$
x_1	y_1	$x_1 - x$	$L_{1,2}(x)$	$L_{1,2,3}(x)$	$L_{1,2,3,4}(x)$	$L_{1,2,3,4,5}(x)$
x_2	y_2	$x_2 - x$	$L_{2,3}(x)$	$L_{2,3,4}(x)$	$L_{2,3,4,5}(x)$	
x_3	y_3	$x_3 - x$	$L_{3,4}(x)$	$L_{3,4,5}(x)$		
x_4	y_4	$x_4 - x$	$L_{4,5}(x)$			
x_5	y_5	$x_5 - x$				

Primjer 7.2. *Aitkenovom interpolacijskom shemom odredite interpolacijski polinom za podatke iz Primjera (7.1.).*

Rješenje.

$$L_{0,1}(x) = \frac{1}{x_1 - x_0}\begin{vmatrix} y_0 & x_0 - x \\ y_1 & x_1 - x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -x \\ 2 & 1-x \end{vmatrix} = 1 + x,$$

$$L_{1,2}(x) = \frac{1}{x_2 - x_1}\begin{vmatrix} y_1 & x_1 - x \\ y_2 & x_2 - x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1-x \\ 4 & 2-x \end{vmatrix} = 2x,$$

$$L_2(x) = L_{0,1,2}(x) = \frac{1}{x_2 - x_0}\begin{vmatrix} L_{0,1}(x) & x_0 - x \\ L_{1,2}(x) & x_2 - x \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1+x & -x \\ 2x & 2-x \end{vmatrix} = \frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} + 1,$$

x_i	y_i	$x_i - x$	$L_{i,i+1}$	$L_{i,i+1,i+2}$
0	1	$-x$	$1+x$	$\frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} + 1$
1	2	$1-x$	$2x$	
2	4	$2-x$		

.

Primjer 7.3. *Za funkciju $f(x) = \sin x$ odredite interpolacijski polinom drugog stupnja s ekvidistantim čvorovima za interval $[0, \pi]$. Odredite uniformnu grešku i lokalnu grešku za $x = \frac{\pi}{6}$.*

Rješenje.

$$L_{0,1}(x) = \frac{1}{x_1 - x_0}\begin{vmatrix} y_0 & x_0 - x \\ y_1 & x_1 - x \end{vmatrix} = \frac{2}{\pi}\begin{vmatrix} 0 & -x \\ 1 & \frac{\pi}{2} - x \end{vmatrix} = \frac{2x}{\pi},$$

$$L_{1,2}(x) = \frac{1}{x_2 - x_1}\begin{vmatrix} y_1 & x_1 - x \\ y_2 & x_2 - x \end{vmatrix} = \frac{2}{\pi}\begin{vmatrix} 1 & \frac{\pi}{2} - x \\ 0 & \pi - x \end{vmatrix} = 2 - \frac{2x}{\pi},$$

$$L_2(x) = L_{0,1,2}(x) = \frac{1}{x_2 - x_0}\begin{vmatrix} L_{0,1}(x) & x_0 - x \\ L_{1,2}(x) & x_2 - x \end{vmatrix} = \frac{1}{\pi}\begin{vmatrix} \frac{2x}{\pi} & -x \\ 2 - \frac{2x}{\pi} & \pi - x \end{vmatrix} = -\frac{4x^2}{\pi^2} + \frac{4x}{\pi},$$

x_i	y_i	$x_i - x$	$L_{i,i+1}$	$L_{i,i+1,i+2}$
0	0	$-x$	$\frac{2x}{\pi}$	$-\frac{4x^2}{\pi^2} + \frac{4x}{\pi}$
$\frac{\pi}{2}$	1	$\frac{\pi}{2} - x$	$2 - \frac{2x}{\pi}$	
π	0	$\pi - x$		

.

$f'(x) = \cos x$, $f''(x) = -\sin x$, $f'''(x) = -\cos x$, pa je $M_3 = \max_{x\in[0,\pi]} |\cos x| = 1$. Kako je $h = \frac{\pi}{2}$ za uniformnu grešku imamo

$$|f(x) - L_2(x)| \leq \frac{h^3}{4 \cdot 3} M_3 = \frac{1}{12}\left(\frac{\pi}{2}\right)^3 = 0.323.$$

U točki $x = \frac{\pi}{6}$ greška je

$$|\sin\frac{\pi}{6} - L_2\left(\frac{\pi}{6}\right)| \leq \frac{M_3}{3!}\left|\left(\frac{\pi}{6} - 0\right)\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{2}\right)\left(\frac{\pi}{6} - \pi\right)\right| = 0.239.$$

Primjer 7.4. *Uz pomoć Lagrangeovog interpolacijskog polinoma izračunajte* $\sqrt[3]{1.15}$ *ako su zadane vrijednosti u točkama* $1,\ 1.1,\ 1.3,\ 1.5$ *i* 1.6. *Procjenite grešku metode.*

Rješenje. Za funkciju $f(x) = \sqrt[3]{x}$ i zadane podatke imamo tablicu:

x	1	1.1	1.3	1.5	1.6
$f(x)$	1	1.032	1.091	1.145	1.170

, pa je onda

$$L_{0,1}(1.15) = \frac{1}{0.1}\begin{vmatrix} 1 & -0.15 \\ 1.032 & -0.05 \end{vmatrix} = 1.04800,\ L_{1,2}(1.15) = \frac{1}{0.2}\begin{vmatrix} 1.032 & -0.05 \\ 1.091 & 0.15 \end{vmatrix} = 1.04675,$$

$$L_{2,3}(1.15) = \frac{1}{0.2}\begin{vmatrix} 1.091 & 0.15 \\ 1.145 & 0.35 \end{vmatrix} = 1.05050,\ L_{3,4}(1.15) = \frac{1}{0.1}\begin{vmatrix} 1.145 & 0.35 \\ 1.170 & 0.45 \end{vmatrix} = 1.05750,$$

$$L_{0,1,2}(1.15) = \frac{1}{0.3}\begin{vmatrix} 1.04800 & -0.15 \\ 1.04675 & 0.15 \end{vmatrix} = 1.04738,$$

$$L_{1,2,3}(1.15) = \frac{1}{0.4}\begin{vmatrix} 1.04675 & -0.05 \\ 1.05050 & 0.35 \end{vmatrix} = 1.04722,$$

$$L_{2,3,4}(1.15) = \frac{1}{0.3}\begin{vmatrix} 1.05050 & 0.15 \\ 1.05750 & 0.45 \end{vmatrix} = 1.04700,$$

pa je $L_2(1.15) = 1.047$.

Za ocjenu greške imamo $f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}},\ f''(x) = -\frac{2}{9\sqrt[3]{x^5}},\ f'''(x) = \frac{10}{27\sqrt[3]{x^8}}$, pa je $M_3 = \frac{10}{27}$. Za lokalnu grešku onda imamo

$$\begin{aligned} |\sqrt[3]{1.15} - L_2\,(1.15)\,| &\le \frac{M_3}{3!}\,|(1.15-1)\,(1.15-1.1)\,(1.15-1.3)| \\ &= 0.69 \cdot 10^{-4}. \end{aligned}$$

Primjer 7.5. *Odredite* $n \in \mathbf{N}$ *t.d. Lagrangeov interpolacijski polinom* $L_n(x)$ *s ekvidistantnim čvorovima, aproksimira funkciju* $f(x) = \ln x$ *na intervalu* $[1,2]$, *s točnošću većom od* 10^{-3}. *Izračunajte* $\ln 1.26$.

Rješenje. Kako je $h = \frac{1}{n}$, za grešku metode imamo $\varepsilon_n = \frac{h^{n+1}}{4(n+1)} \cdot M_{n+1}$. Iz $f'(x) = \frac{1}{x},\ f''(x) = -\frac{1}{x^2},\ f'''(x) = \frac{2}{x^3}, \ldots$ dobijemo $f^{(n+1)}(x) = (-1)^{n+2}\frac{n!}{x^{n+1}}$, pa je $M_{n+1} = n!$. Sada,

$$\varepsilon_n = \frac{\left(\frac{1}{n}\right)^{n+1}}{4(n+1)} \cdot n! = \frac{n!}{n^{n+1}4(n+1)} < 10^{-3},$$

$\Rightarrow n = 5$ jer je $\varepsilon_5 = \frac{5!}{5^6 \cdot 4 \cdot 6} = 0.32 \cdot 10^{-3} < 10^{-3}$.

Kako je $h = \frac{1}{5} = 0.2$, čvorovi su $1,\ 1.2,\ 1.4,\ 1.6,\ 1.8$ i 2, pa za $x = 1.26$ imamo

$$L_{0,1}(1.26) = \frac{1}{0.2}\begin{vmatrix} 0 & -0.26 \\ 0.18232 & -0.06 \end{vmatrix} = 0.23702,$$

$$L_{1,2}(1.26) = \frac{1}{0.2}\begin{vmatrix} 0.18232 & -0.06 \\ 0.33647 & 0.14 \end{vmatrix} = 0.22856,$$

$$L_{2,3}(1.26) = \frac{1}{0.2}\begin{vmatrix} 0.33647 & 0.14 \\ 0.47000 & 0.34 \end{vmatrix} = 0.24300,$$

$$L_{3,4}(1.26) = \frac{1}{0.2}\begin{vmatrix} 0.47000 & 0.34 \\ 0.58779 & 0.54 \end{vmatrix} = 0.26976,$$

$$L_{4,5}(1.26) = \frac{1}{0.2}\begin{vmatrix} 0.58779 & 0.54 \\ 0.69315 & 0.74 \end{vmatrix} = 0.30332,$$

$$L_{0,1,2}(1.26) = \frac{1}{0.4}\begin{vmatrix} 0.23702 & -0.26 \\ 0.22856 & 0.14 \end{vmatrix} = 0.23152,$$

$$L_{1,2,3}(1.26) = \frac{1}{0.4}\begin{vmatrix} 0.22856 & -0.06 \\ 0.24300 & 0.34 \end{vmatrix} = 0.23073,$$

$$L_{2,3,4}(1.26) = \frac{1}{0.4}\begin{vmatrix} 0.24300 & 0.14 \\ 0.26976 & 0.54 \end{vmatrix} = 0.23363,$$

$$L_{3,4,5}(1.26) = \frac{1}{0.4}\begin{vmatrix} 0.26976 & 0.34 \\ 0.30332 & 0.74 \end{vmatrix} = 0.24123,$$

$$L_{0,1,2,3}(1.26) = \frac{1}{0.6}\begin{vmatrix} 0.23152 & -0.26 \\ 0.23073 & 0.34 \end{vmatrix} = 0.23118,$$

$$L_{1,2,3,4}(1.26) = \frac{1}{0.6}\begin{vmatrix} 0.23073 & -0.06 \\ 0.23363 & 0.54 \end{vmatrix} = 0.23102,$$

$$L_{2,3,4,5}(1.26) = \frac{1}{0.6}\begin{vmatrix} 0.23363 & 0.14 \\ 0.24123 & 0.74 \end{vmatrix} = 0.23186,$$

pa je $L_3(1.26) = 0.231$.

7.4. Podijeljene razlike. Opći Newtonov oblik interpolacijskog polinoma.

Lagrangeov oblik interpolacijskog polinoma nije pogodan kad želimo dodavati čvorove da bismo eventualno poboljšali aproksimaciju i smanjili grešku, zbog toga što interpolacijski polinom moramo računati od početka.

Postoji forma interpolacijskog polinoma kod koje je mnogo lakše dodavati točke interpolacije. Neka su dane točke $(x_0, f(x_0), (x_1, f(x_1)), \dots, (x_n, f(x_n))$. Za $i = 0, \dots, n$ definirajmo podijeljenu razliku induktivno s

$$f[x_i] = f(x_i), \quad - \text{ podijeljena razlika nultog reda,}$$

$$f[x_i, x_{i+1}] = \frac{f[x_{i+1}] - f[x_i]}{x_{i+1} - x_i} \quad - \text{ podijeljena razlika prvog reda,}$$

$$\vdots$$

$$f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k}] = \frac{f[x_{i+1}, \dots, x_{i+k}] - f[x_i, \dots, x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i} - \text{podijeljena razlika } k-\text{tog reda.}$$

Tabeliranje:

x_i	y_i	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$	$\dots$	
x_0	y_0				
		$f[x_0, x_1]$			
x_1	y_1		$f[x_0, x_1, x_2]$		
		$f[x_1, x_2]$		$\dots$	
x_2	y_2		$f[x_1, x_2, x_3]$		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$f[x_0, x_1, \dots, x_n]$
x_{n-2}	y_{n-2}		$f[x_{n-3}, x_{n-2}, x_{n-1}]$		
		$f[x_{n-2}, x_{n-1}]$		$\dots$	
x_{n-1}	y_{n-1}		$f[x_{n-2}, x_{n-1}, x_n]$		
		$f[x_{n-1}, x_n]$			
x_n	y_n				

Primjer 7.6. *Za podatke iz Primjera 7.1. odredite tablicu podijeljenih razlika.*

Rješenje.

x_i	y_i	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$
$x_0 = 0$	$y_0 = 1$		
		$f[x_0, x_1] = \frac{2-1}{1-0} = 1$	
$x_1 = 1$	$y_1 = 2$		$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{2-1}{2-0} = \frac{1}{2}$
		$f[x_1, x_2] = \frac{4-2}{2-1} = 2$	
$x_2 = 2$	$y_2 = 4$		

Svojstva podijeljenih razlika:

1.

$$f[x_0, x_1, \dots, x_n] = \sum_{i=0}^{n} \frac{f(x_i)}{\prod_{j=0,\, j\neq i}^{n} (x_i - x_j)}$$

2. Invarijatnost na permutacije
3. $f(x_k) - L_{k-1}(x_k) = f[x_0, x_1, \ldots, x_k] \prod_{i=0}^{k-1}(x_k - x_i)$,
4. Za $f(x) = P_n(x)$, $f[x_0, x_1, \ldots, x_n] = a_n$ (Teorem srednje vrijednosti za podijeljene razlike: $f[x_0, x_1, \ldots, x_n] = \frac{f^{(n)}(\mu)}{n!}$), tj. podijeljena razlika n-tog reda ne ovisi o izboru čvorova,

Da iz Lagrangeovog oblika interpolacijskog polinoma izvedemo Newtonov oblik, zapišimo najprije interpolacijski polinom L_n u obliku

$$L_n(x) = L_0(x) + (L_1(x) - L_0(x)) + \ldots + (L_n(x) - L_{n-1}(x)), \tag{7.10}$$

gdje L_k označva interpolacijski polinom u Lagrangeovom obliku određen čvorovima $x_0, x_1, \ldots, x_k$ ($L_0(x) = f(x_0)$). Tada je razlika $L_k(x) - L_{k-1}(x)$ polinom k-tog stupnja kojemu su $x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}$ nultočke jer vrijedi $f(x_j) = L_{k-1}(x_j) = L_k(x_j)$ za $j = 0, 1, 2, \ldots, k-1$. Prema tome možemo pisati

$$L_k(x) - L_{k-1}(x) = A_{k-1}(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{k-1}) = A_{k-1} \prod_{0\leq j\leq k-1}(x-x_j), \tag{7.11}$$

gdje koeficijente A_{k-1} moramo odrediti. Za $x = x_k$ dobivamo iz (7.11)

$$L_k(x_k) - L_{k-1}(x_k) = A_{k-1} \prod_{0\leq j\leq k-1}(x_k - x_j).$$

Kako je $L_k(x_k) = f(x_k)$, iz svojstva 2. i 3. slijedi

$$A_{k-1} = f[x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k].$$

Uvrstimo li dobiveni rezultat u (7.10) imamo

$$\begin{aligned} L_n(x) &= f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) \\ &+ \cdots + f[x_0, x_1, \ldots, x_n](x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1}) \end{aligned}$$

što je opći Newtonov oblik interpolacijskog polinoma. On može biti zapisan i u obliku:

$$\begin{aligned} L_n(x) &= f[x_n] + f[x_{n-1}, x_n](x - x_n) + f[x_{n-2}, x_{n-1}, x_n](x - x_n) \\ &(x - x_{n-1}) + \cdots + f[x_0, x_1, \ldots, x_n](x - x_n)\cdots(x - x_1). \end{aligned}$$

Primjer 7.7. *Koristeći opći Newtonov oblik interpolacijskog polinoma odredite interpolacijski polinom za tablicu iz Primjera (7.6.).*

Rješenje.

$$\begin{aligned} L_2(x) &= f[x_0] + f[x_0,x_1](x-x_0) + f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1) \\ &= 1 + 1\cdot(x-0) + \frac{1}{2}\cdot(x-0)(x-1) = \frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} + 1, \end{aligned}$$

ili

$$\begin{aligned} L_2(x) &= f[x_2] + f[x_1,x_2](x-x_2) + f[x_0,x_1,x_2](x-x_2)(x-x_1) \\ &= 4 + 2\cdot(x-2) + \frac{1}{2}\cdot(x-2)(x-1) = \frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} + 1. \end{aligned}$$

Primjer 7.8. *Koristeći opći Newtonov oblik interpolacijskog polinoma odredite interpolacijski polinom za funkciju $f(x) = \log_2 x$ i čvorove $x_0 = 1,\ x_1 = 2,\ x_2 = 4,\ x_3 = 8,\ x_4 = 16$.*

Rješenje.

x_i	y_i	$f[x_i,x_{i+1}]$	$f[x_i,x_{i+1},x_{i+2}]$	$f[x_i,x_{i+1},x_{i+2},x_{i+3}]$	$f[x_i,x_{i+1},x_{i+2},x_{i+3},x_{i+4}]$
$x_0 = 1$	$y_0 = 0$				
		$f[x_0,x_1] = = \frac{1-0}{2-1} = 1$			
$x_1 = 2$	$y_1 = 1$		$f[x_0,x_1,x_2] = = \frac{\frac{1}{2}-1}{4-1} = -\frac{1}{6}$		
		$f[x_1,x_2] = = \frac{2-1}{4-2} = \frac{1}{2}$			
				$f[x_0,x_1,x_2,x_3] = = \frac{-\frac{1}{24}+\frac{1}{6}}{8-1} = \frac{1}{56}$	
$x_2 = 4$	$y_2 = 2$		$f[x_1,x_2,x_3] = = \frac{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}}{8-2} = -\frac{1}{24}$		
					$f[x_0,x_1,x_2,x_3,x_4] = = \frac{\frac{1}{448}-\frac{1}{56}}{16-1} = -\frac{1}{960}$
		$f[x_2,x_3] = \frac{3-2}{8-4} = \frac{1}{4}$			
				$f[x_1,x_2,x_3,x_4] = = \frac{-\frac{1}{96}+\frac{1}{21}}{16-2} = \frac{1}{448}$	
$x_3 = 8$	$y_3 = 3$		$f[x_2,x_3,x_4] = = \frac{\frac{1}{8}-\frac{1}{4}}{16-4} = -\frac{1}{96}$		
		$f[x_3,x_4] = \frac{4-3}{16-8} = \frac{1}{8}$			
$x_4 = 16$	$y_4 = 4$				

pa je

$$L_4(x) = f[x_0] + f[x_0,x_1](x-x_0) + f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)$$

$$
\begin{aligned}
&+ f[x_0,x_1,x_2,x_3](x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\\
&+ f[x_0,x_1,x_2,x_3,x_4](x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\\
&= 0+1\cdot(x-1)-\frac{1}{6}\cdot(x-1)(x-2)+\frac{1}{56}\cdot(x-1)(x-2)(x-4)\\
&- \frac{1}{960}\cdot(x-1)(x-2)(x-4)(x-8) = -\frac{x^4}{960}+\frac{15x^3}{448}-\frac{35x^2}{96}+\frac{15x}{8}-\frac{54}{35},
\end{aligned}
$$

ili

$$
\begin{aligned}
L_4(x) &= f[x_4]+f[x_3,x_4](x-x_4)+f[x_2,x_3,x_4](x-x_4)(x-x_3)\\
&+ f[x_1,x_2,x_3,x_4](x-x_4)(x-x_3)(x-x_2)\\
&+ f[x_0,x_1,x_2,x_3,x_4](x-x_4)(x-x_3)(x-x_2)(x-x_1)\\
&= 4+\frac{1}{8}\cdot(x-16)-\frac{1}{96}\cdot(x-16)(x-8)+\frac{1}{448}\cdot(x-16)(x-8)(x-4)\\
&- \frac{1}{960}\cdot(x-16)(x-8)(x-4)(x-2) = -\frac{x^4}{960}+\frac{15x^3}{448}-\frac{35x^2}{96}+\frac{15x}{8}-\frac{54}{35},
\end{aligned}
$$

ili

$$
\begin{aligned}
L_4(x) &= f[x_2]+f[x_2,x_3](x-x_2)+f[x_2,x_3,x_4](x-x_2)(x-x_3)\\
&+ f[x_1,x_2,x_3,x_4](x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)\\
&+ f[x_0,x_1,x_2,x_3,x_4](x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)(x-x_1)\\
&= 2+\frac{1}{4}\cdot(x-4)-\frac{1}{96}\cdot(x-4)(x-8)+\frac{1}{448}\cdot(x-4)(x-8)(x-16)\\
&- \frac{1}{960}\cdot(x-4)(x-8)(x-16)(x-2) = -\frac{x^4}{960}+\frac{15x^3}{448}-\frac{35x^2}{96}+\frac{15x}{8}-\frac{54}{35}.
\end{aligned}
$$

Zadaci za vježbu

1. Znajući vrijednosti $\sin 15^\circ, \sin 20^\circ, \sin 25^\circ, \ldots, \sin 55^\circ$ odredite $\sin 14^\circ$ i $\sin 37^\circ$. (rj. $\sin 14^\circ = 0.24192$, $\sin 37^\circ = 0.601814$)
2. Za funkciju $f(x) = \log x, x \in [20, 45]$ i ekvidistantne čvorove s $h = 5$ odredite $\log 32$ i $\log 46$. (rj. $\log 32 = 1.50518$, $\log 46 = 1.66281$)
3. Znajući vrijednosti $\cos 3^\circ, \cos 5^\circ, \cos 7^\circ, \cos 9^\circ, \cos 11^\circ$ koristeći Newtonov interpolacijski polinom izračunajte približnu vrijednost od $\cos 366^\circ$, te odredite pravu grešku. Ulazne podatke uzimati za jedno decimalno mjesto preciznije nego što je procjena greške aproksimacije interpolacijskim polinomom. (rj. 0.994522)

4. Znajući vrijednosti

x	1,00	1,05	1,10	1,15	1,20	1,25
f(x)	0,682689	0,706282	0,728668	0,749856	0,769861	0,788700

odredite $f(1.235)$ koristeći Newtonov interpolacijski polinom. (rj. 0.78317)

5. Znajući vrijednosti $\sin 5°, \sin 7°, \sin 9°, \sin 11°$, koristeći Newtonov interpolacijski polinom izračunajte približnu vrijednost od $\sin 6°$, koristeći a) prva dva čvora, b) prva tri čvora, c) sva četiri čvora. Odredite koja je od te tri aproksimacije bolja (izračunajte prave greške). Računati na 5 decimala. (rj. a) 0.104513, b) 0.104531, c) 0.104528)

Programska realizacija

1. Odredite $f(154)$ za funkciju $y = f(x)$ danom s tablicom

x	y
150	2.17609
160	2.20412
170	2.23045
180	2.25527
190	2.27875
200	2.30103

.

2. Odredite $\log 1044$ za funkciju $y = \log x$ danom s tablicom

x	y
1000	3.0000000
1010	3.0043214
1020	3.0086002
1030	3.0128372
1040	3.0170333
1050	3.0211893

.

3. Odredite $f(32°)$ za funkciju $y = f(x)$ danom s tablicom

x	y
10°	0.17365
20°	0.34202
30°	0.50000
40°	0.64279
50°	0.76604

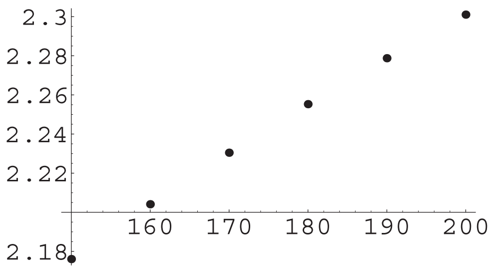
.

4. Odredite $f(1.51)$ za funkciju $y = f(x)$ danom s tablicom

x	y
1.50	0.51183
1.52	0.50064
1.56	0.47811
1.58	0.46678
1.60	0.45540

.

```
p1 = ListPlot[{{150, 2.17609}, {160, 2.20412}, {170, 2.23045},
   {180, 2.25527}, {190, 2.27875}, {200, 2.30103}}, PlotStyle → PointSize[0.02]]
```

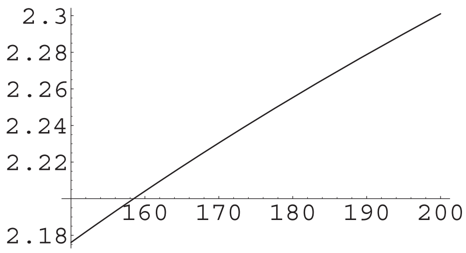


- Graphics -

```
Expand[InterpolatingPolynomial[{{150, 2.17609}, {160, 2.20412},
   {170, 2.23045}, {180, 2.25527}, {190, 2.27875}, {200, 2.30103}}, x]]
```

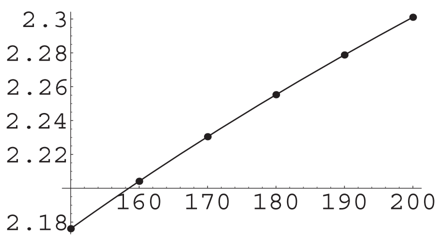
$1.47752 + 0.00591338\, x + 3.4375 \times 10^{-6}\, x^2 - 1.5375 \times 10^{-7}\, x^3 + 6.25 \times 10^{-10}\, x^4 - 8.33333 \times 10^{-13}\, x^5$

```
p2 = Plot[1.4775199999868285` + 0.005913383333700225` x +
   3.4374999959288197`*^-6 x^2 - 1.5374999997750435`*^-7 x^3 +
   6.249999999381006`*^-10 x^4 - 8.333333332654771`*^-13 x^5, {x, 150, 200}]
```



- Graphics -

```
Show[{p1, p2}]
```



- Graphics -

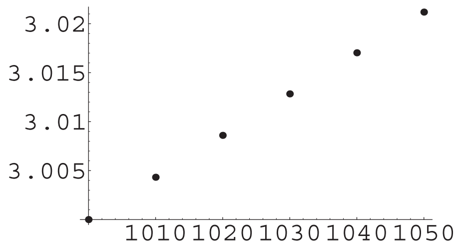
```
pol := Interpolation[{{150, 2.17609}, {160, 2.20412},
   {170, 2.23045}, {180, 2.25527}, {190, 2.27875}, {200, 2.30103}}]
```

```
pol[154]
```

2.18752

Slika 7.1.

```
p1 =
 ListPlot[{{1000, 3.0000000}, {1010, 3.0043214}, {1020, 3.0086002}, {1030, 3.0128372},
   {1040, 3.0170333}, {1050, 3.0211893}}, PlotStyle → PointSize[0.02]]
```

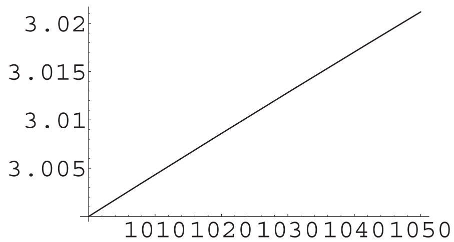


- Graphics -

```
Expand[InterpolatingPolynomial[{{1000, 3.0000000}, {1010, 3.0043214},
   {1020, 3.0086002}, {1030, 3.0128372}, {1040, 3.0170333}, {1050, 3.0211893}}, x]]
```

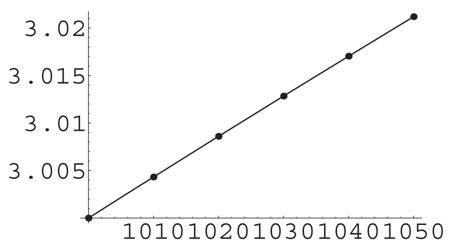
$21.05 - 0.090651\,x + 0.000178801\,x^2 - 1.7495\times 10^{-7}\,x^3 + 8.54167\times 10^{-11}\,x^4 - 1.66667\times 10^{-14}\,x^5$

```
p2 = Plot[21.05000176291327` - 0.09065096111522694` x +
   0.0001788009608332103` x^2 - 1.7495000243737583`*^-7 x^3 +
   8.541666785479563`*^-11 x^4 - 1.6666666898316448`*^-14 x^5, {x, 1000, 1050}]
```



- Graphics -

```
Show[{p1, p2}]
```



- Graphics -

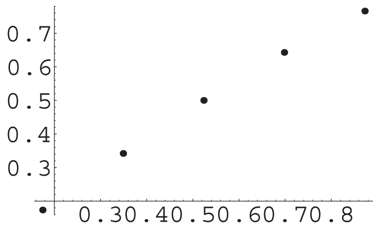
```
pol := Interpolation[{{1000, 3.0000000}, {1010, 3.0043214},
   {1020, 3.0086002}, {1030, 3.0128372}, {1040, 3.0170333}, {1050, 3.0211893}}]
```

```
pol[1044]
```

3.0187

Slika 7.2.

```
p1 = ListPlot[{{Pi/18, 0.17365}, {Pi/9, 0.34202}, {Pi/6, 0.50000},
    {2 Pi/9, 0.64279}, {5 Pi/18, 0.76604}}, PlotStyle → PointSize[0.02]]
```

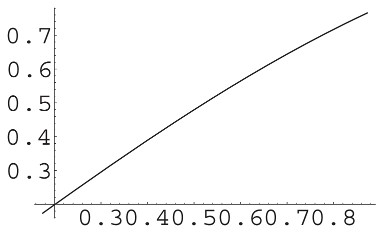


- Graphics -

```
Expand[InterpolatingPolynomial[{{Pi/18, 0.17365},
    {Pi/9, 0.34202}, {Pi/6, 0.50000}, {2 Pi/9, 0.64279}, {5 Pi/18, 0.76604}}, x]]
```

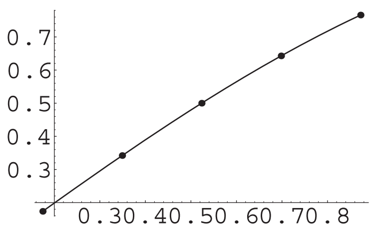
$0.00014 + 0.998193\, x + 0.00857633\, x^2 - 0.18574\, x^3 + 0.0202065\, x^4$

```
p2 = Plot[0.0001400000000002788` + 0.9981927467320392` x + 0.008576331589415703` x^2 -
    0.18573981195425426` x^3 + 0.020206532871903073` x^4, {x, Pi/18, 5 Pi/18}]
```



- Graphics -

```
Show[{p1, p2}]
```



- Graphics -

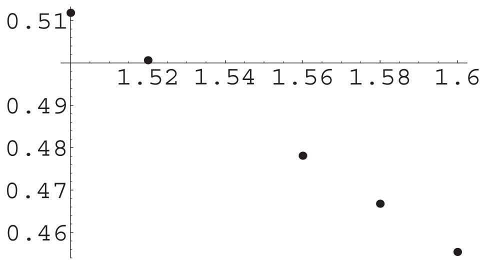
```
pol := Interpolation[
   {{Pi/18, 0.17365}, {Pi/9, 0.34202}, {Pi/6, 0.50000}, {2 Pi/9, 0.64279}, {5 Pi/18, 0.76604}}]
```

```
pol[8 Pi/45]
```

0.529912

Slika 7.3.

```
p1 = ListPlot[{{1.50, 0.51183}, {1.52, 0.50064}, {1.56, 0.47811},
   {1.58, 0.46678}, {1.60, 0.45540}}, PlotStyle → PointSize[0.02]]
```

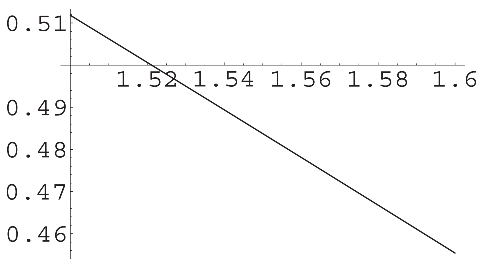



```
- Graphics -
```

```
Expand[InterpolatingPolynomial[{{1.50, 0.51183},
   {1.52, 0.50064}, {1.56, 0.47811}, {1.58, 0.46678}, {1.60, 0.45540}}, x]]
```

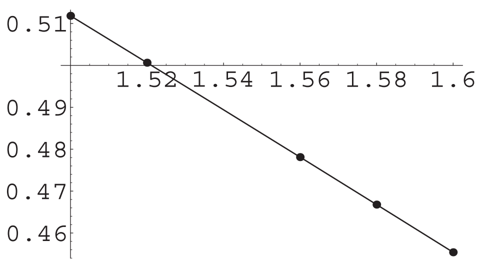
$-10.8697 + 30.7802\,x - 30.1804\,x^2 + 12.9375\,x^3 - 2.08333\,x^4$

```
p2 = Plot[-10.869719999913077` + 30.78019999977529` x - 30.180416666448856` x^2 +
   12.937499999906175` x^3 - 2.083333333318179` x^4, {x, 1.5, 1.6}]
```




```
- Graphics -
```

```
Show[{p1, p2}]
```




```
- Graphics -
```

```
pol := Interpolation[{{1.50, 0.51183},
   {1.52, 0.50064}, {1.56, 0.47811}, {1.58, 0.46678}, {1.60, 0.45540}}]

pol[1.51]
```

0.506242

Slika 7.4.

7.5. Hermiteov interpolacijski polinom

U slučaju kada su osim vrijednosti funkcije u čvorovima dane eventualno i vrijednosti derivacije iste funkcije u čvorovima, postupa se na isti način kao u općem Newtonovom obliku interpolacijskog polinoma (preko podijeljenih razlika), s time da se podijeljene razlike za ponovljene čvorove definiraju na sljedeći način:

$$f[x_i, x_i] := f'(x_i), \quad f[x_i, x_i, x_i] = f''(x_i)/2!$$

te podijeljena razlika n-tog reda:

$$f[x_i, \ldots, x_i] := f^{(n)}(x_i)/n!$$

(primjetite da u uglatoj zagradi imamo $(n+1)-$puta ponovljenu vrijednost x_i.

Lokalna greška:

$$f(x) - L_m(x) = \frac{f^{(m+1)}(\mu)}{(m+1)!} |(x-x_0)^{m_0}(x-x_1)^{m_1} \cdots (x-x_n)^{m_n}|, \quad \mu \in (x_0, x_n)$$

gdje je $m_0 + m_1 + \cdots + m_n - 1 = m$, pri čemu su u čvorovima x_i dane derivacije do uključivo $(m_i - 1)-$vog reda, $i = 0, 1, \ldots, n$. U slučaju kada je $m_0 = m_1 = \cdots = m_n = 1$ dobivamo Newtonov opći oblik interpolacijskog polinoma.

Tabeliranje (svaki čvor ponavljamo za 1 više od reda derivacije koja je zadana u tom čvoru):

x_i	y_i	$f^{[1]}$	$f^{[2]}$	$f^{[3]}$	
x_0	y_0				
		$f'(x_0)$			
x_0	y_0		$\frac{f''(x_0)}{2!}$		
		$f'(x_0)$		$f[x_0, x_0, x_0, x_1]$	
x_0	y_0		$f[x_0, x_0, x_1]$		$\ldots$
		$f[x_0, x_1]$		$f[x_0, x_0, x_1, x_1]$	
x_1	y_1		$f[x_0, x_1, x_1]$		$\ldots$
		$f'(x_1)$		$f[x_0, x_1, x_1, x_2]$	
x_1	y_1		$f[x_1, x_1, x_2]$		
		$f[x_1, x_2]$			
x_2	y_2				
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	

Primjer 7.9. *Odredite Hermiteov interpolacijski polinom za funkciju za koju je poznato* $f(0) = 1, \; f'(0) = 2, \; f(1) = 10, \; f'(1) = 20.$

Rješenje.

x_i	y_i	$f^{[1]}$	$f^{[2]}$	$f^{[3]}$
$x_0 = 0$	$y_0 = 1$			
		$f'(x_0) = 2$		
$x_0 = 0$	$y_0 = 1$		$f[x_0, x_0, x_1] = 7$	
		$f[x_0, x_1] = 9$		$f[x_0, x_0, x_1, x_1] = 4$
$x_1 = 1$	$y_1 = 10$		$f[x_0, x_1, x_1] = 11$	
		$f'(x_1) = 20$		
$x_1 = 1$	$y_1 = 10$			

$$\begin{aligned} L_3(x) &= y_0 + f'(x_0)(x - x_0) + f[x_0, x_0, x_1](x - x_0)^2 + f[x_0, x_0, x_1, x_1](x - x_0)^2(x - x_1) \\ &= 1 + 2x + 7x^2 + 4x^2(x - 1) = 4x^3 + 3x^2 + 2x + 1. \end{aligned}$$

Primjer 7.10. *Odredite Hermiteov interpolacijski polinom za* $f(x) = \sin x$ *i za čvorne točke* $0, 0, 0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}, \pi, \pi$.

Rješenje. Kako se čvorne točke ponavljaju do najviše tri puta treba nam druga derivacija od funkcije pa imamo: $f'(x) = \cos x, f''(x) = -\sin x$.

x_i	y_i	$f^{[1]}$	$f^{[2]}$	$f^{[3]}$	$f^{[4]}$	$f^{[5]}$	$f^{[6]}$	$f^{[7]}$	$f^{[8]}$
0	0								
		1							
0	0		0						
		1		−0.16440					
0	0		−0.08608		0.01635				
		0.95493		−0.13871		0.00659			
$\frac{\pi}{6}$	0.5		−0.30397		0.02671		−0.00102		
		0.47746		−0.09675		0.00391		−0.00007	
$\frac{\pi}{2}$	1		−0.45594		0.03696		−0.00124		0.00002
		0		0		0		0	
$\frac{\pi}{2}$	1		−0.45594		0.03696		−0.00124		
		−0.47746		0.09675		−0.00391			
$\frac{5\pi}{6}$	0.5		−0.30397		0.02671				
		−0.95493		0.13871					
π	0		−0.08608						
		−1							
π	0								

$$L_8(x) = 0 + 1 \cdot (x - 0) + 0 \cdot (x - 0)^2 - 0.16440(x - 0)^3 + 0.01635(x - 0)^3 \left(x - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$
\begin{aligned}
&+\ 0.00659(x-0)^3\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\left(x-\frac{\pi}{2}\right)-0.00102(x-0)^3\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2\\
&-\ 0.00007(x-0)^3\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2\left(x-\frac{5\pi}{6}\right)\\
&+\ 0.00002(x-0)^3\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2\left(x-\frac{5\pi}{6}\right)(x-\pi)\\
&=\ 0.00002x^8-0.000258496x^7+0.0000887628x^6+0.0082665x^5\\
&+\ 0.0000226856x^4-0.166672x^3+x.
\end{aligned}
$$

Pomoću Hermiteovog interpolacijskog polinoma možemo izračunati približne vrijednosti derivacija. Ako zelimo izračunati vrijednost ili derivaciju u nekoj zadanoj točki, tu točku dodajemo na početku tablice i to za 1 više od reda derivacije čija se vrijednost traži. Tablica je onda u obliku:

x_i	y_i	$f^{[1]}$	$\dots$	$f^{[n-1]}$	$f^{[n]}$
x_{-1}	$y_{-1}=?$				
		$f'(x_{-1})=?$			
x_{-1}	$y_{-1}=?$				
		$f[x_{-1},x_0]=?$	$\dots$		
x_0	y_0			$f[x_{-1},x_{-1},x_0,\dots,x_{n-3}]=?$	
		$f[x_0,x_1]$	$\dots$		$f[x_{-1},x_{-1},x_0\dots,x_{n-2}]=?$
x_1	y_1			$f[x_{-1},x_0,x_1,\dots,x_{n-2}]=?$	$\Vert$
		$f[x_1,x_2]$			$f[x_{-1},x_0,x_1\dots,x_{n-1}]=?$
x_2	y_2			$f[x_0,x_1,x_2,\dots,x_{n-1}]$	$\Vert$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$f[x_0,x_1,x_2\dots,x_n]$
x_{n-2}	y_{n-2}			$f[x_1,x_2,x_3,\dots,x_n]$	$\Vert$
		$f[x_{n-2},x_{n-1}]$			$L_n[x_0,x_1,x_2,\dots,x_n]$
x_{n-1}	y_{n-1}				
		$f[x_{n-1},x_n]$			
x_n	y_n				

Zbog svojstva 4. za podijeljene razlike sve vrijednosti u zadnjem stupcu moraju biti jednake, pa nepoznate vrijednosti u prethodnim stupcima računamo preko njih, tj.

$$f[x_{-1},x_0,x_1\dots,x_{n-1}]=\frac{f[x_0,x_1,x_2,\dots,x_{n-1}]-f[x_{-1},x_0,x_1,\dots,x_{n-2}]}{x_{n-1}-x_{-1}}$$

$\Rightarrow f[x_{-1},x_0,x_1,\dots,x_{n-2}]=f[x_0,x_1,x_2,\dots,x_{n-1}]-(x_{n-1}-x_{-1})f[x_{-1},x_0,x_1\dots,x_{n-1}]$.

Analogno,

$f[x_{-1},x_{-1},x_0,\dots,x_{n-3}]=f[x_{-1},x_0,x_1,\dots,x_{n-2}]-(x_{n-2}-x_{-1})f[x_{-1},x_{-1},x_0\dots,x_{n-2}]$,

itd.

Primjer 7.11. *Znajući vrijednosti funkcije* $f(x) = \frac{1}{x}$ *u čvorovima* $x_0 = 1,\ x_1 = 2, x_2 = 3, x_3 = 4$*, koristeći Hermiteov interpolacijski polinom izračunajte približnu vrijednost od* $f(1.3), f'(1.3)$ *i* $f''(1.3)$*. Izračunajte prave greške.*

Rješenje.

x_i	y_i	$f^{[1]}$	$f^{[2]}$	$f^{[3]}$
$x_{-1} = 1.3$	$y_{-1} =?$			
		$f'(x_{-1}) =?$		
$x_{-1} = 1.3$	$y_{-1} =?$		$\frac{f''(x_{-1})}{2} =?$	
		$f'(x_{-1}) =?$		$f[x_{-1}, x_{-1}, x_{-1}, x_0] =?$ $\Vert$
$x_{-1} = 1.3$	$y_{-1} =?$		$f[x_{-1}, x_{-1}, x_0] =?$	
		$f[x_{-1}, x_0] =?$		$f[x_{-1}, x_{-1}, x_0, x_1] =?$ $\Vert$
$x_0 = 1$	$y_0 = 1$		$f[x_{-1}, x_0, x_1] =?$	
		$f[x_0, x_1] = -0.5$		$f[x_{-1}, x_0, x_1, x_2] =?$ $\Vert$
$x_1 = 2$	$y_1 = 0.5$		$f[x_0, x_1, x_2] = 0.16666$	
		$f[x_1, x_2] = -0.16667$		$f[x_0, x_1, x_2, x_3] = -0.04167$ $\Vert$
$x_2 = 3$	$y_2 = 0.33333$		$f[x_1, x_2, x_3] = 0.04167$	
		$f[x_2, x_3] = -0.08333$		$L_3[x_0, x_1, x_2, x_3]$
$x_3 = 4$	$y_3 = 0.25$			

$$\Rightarrow f[x_{-1}, x_0, x_1] = f[x_0, x_1, x_2] + (x_{-1} - x_2) \cdot f[x_{-1}, x_0, x_1, x_2] = 0.23749,$$
$$\Rightarrow f[x_{-1}, x_0] = f[x_0, x_1] + (x_{-1} - x_1) \cdot f[x_{-1}, x_0, x_1] = -0.66624,$$
$$\Rightarrow f(x_{-1}) = f(x_0) + (x_{-1} - x_0) \cdot f[x_{-1}, x_0] = 0.80013.$$

Analogno,

$$\Rightarrow f[x_{-1}, x_{-1}, x_0] = f[x_{-1}, x_0, x_1] + (x_{-1} - x_1) \cdot f[x_{-1}, x_{-1}, x_0, x_1] = 0.26665,$$
$$\Rightarrow f'(x_{-1}) = f[x_{-1}, x_0] + (x_{-1} - x_0) \cdot f[x_{-1}, x_{-1}, x_0] = -0.58624$$

i

$$\Rightarrow f''(x_{-1}) = 2(f[x_{-1}, x_{-1}, x_0] + (x_{-1} - x_0) \cdot f[x_{-1}, x_{-1}, x_{-1}, x_0]) = 0.50830.$$

Kako je $f'(x) = -\frac{1}{x^2},\ f''(x) = \frac{2}{x^3}$, prave greške su

$$\left|\frac{1}{1.3} - f(1.3)\right| = |0.76923 - 0.80013| = 0.0309,$$
$$\left|-\frac{1}{1.69} - f'(1.3)\right| = |-0.59172 + 0.58624| = 0.00548,$$
$$\left|\frac{2}{2.197} - f''(1.3)\right| = |0.91033 - 0.50830| = 0.40203.$$

Zadaci za vježbu

1. Odredite približnu vrijednost za $f'(3)$, te pravu grešku ako je $f(x) = \ln x$ koristeći vrijednost funkcije i njezine derivacije u točkama $x_0 = 1,\ x_1 = 2$, koristeći Hermiteov interpolacijski polinom. (rj. $f(1.3) = 0.26523,\ f'(1.3) = 0.77843$)

2. Za funkciju $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$ na $[1,2]$ uz ekvidistantne čvorove s $h = 0.5$ odredite pravu grešku za približnu vrijednost od $f'(1.5)$, koristeći vrijednosti funkcije i njezine derivacije u točkama $x_0 = 1,\ x_1 = 2$, koristeći Hermiteov interpolacijski polinom. (rj. $f'(1.5) = 0.18096$)

3. Koristeći podatke $f(0.5) = 2,\ f(0.6) = 8,\ f(0.7) = -2$, koristeći Hermiteovu shemu odredite a_0, a_1, a_2, gdje je $L_2(x) = a_0 + a_1(x-0.5) + a_2(x-0.5)^2$. (rj. $L_2(x) = 2 + 140(x-0.5) - 800(x-0.5)^2$)

4. Za funkciju $f(x) = \cos x$ poznate su njezine vrijednosti i vrijednosti njezine prve derivacije u točkama $x_0 = \pi/2,\ x_1 = \pi$. Koristeći Hermiteov interpolacijski polinom odredite približne vrijednosti za $f(3)$ i $f'(3)$. (rj. $f(3) = -0.9893,\ f'(3) = -0.155$)

5. Odredite približne vrijednosti za $f(1.5),\ f'(1.5)$ te prave greške ako je $f(x) = \log x$ koristeći vrijednosti funkcije i njezine derivacije u točkama $x_0 = 1,\ x_1 = 2$ koristeći Hermiteov interpolacijski polinom. (rj. $f(1.5) = 0.17766,\ f'(1.5) = 0.28868$)

6. Za funkciju $f(x) = \sin x$ poznate su njezine vrijednosti i vrijednosti njezine prve derivacije u točkama $x_0 = \pi/2,\ x_1 = \pi$. Koristeći Hermiteov interpolacijski polinom odredite približne vrijednosti za $f(2)$ i $f'(2)$, te odredite prave greške. (rj. $f(2) = 0.90157,\ f'(2) = -0.43724$)

7. Za funkciju $f(x) = \sin x$ poznate su njezine vrijednosti i vrijednosti njezine prve derivacije u točkama $x_0 = \pi/2,\ x_1 = \pi$. Koristeći Hermiteov interpolacijski polinom odredite približne vrijednosti za $f(3)$ i $f'(3)$, te odredite prave greške. (rj. $f(3) = 0.13858,\ f'(3) = -0.97751$)

8. Odredite Hermiteov interpolacioni polinom za funkciju zadanu sljedećom tablicom:

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	1	0	2
1	-1	0	$*$
2	0	$*$	$*$

(rj. $L_5(x) = -5.125x^5 + 18.25x^4 - 17.125x^3 + 2x^2 + 1$)

9. Koristeći Hermiteovu shemu izračunajte $f'(1)$ za funkciju $f(x)$ zadanu tablicom

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-1	4	-11	$*$
0	1	1	6
1	6	$*$	$*$

(rj. $f'(1) = 9$)

10. Za funkciju $f(x) = \frac{1}{2+x^2}$ poznate su njezine vrijednosti i njezine prve derivacije u točkama $x_0 = 1,\ x_1 = 2$. Odredite približne vrijednosti za $f(1.5)$ i $f'(1.5)$, te odredite prave greške. (rj. $f(3) = 0.11109,\ f'(3) = -0.00006$)

11. Odredite Hermiteov interpolacijski polinom funkcije $f(x)$ zadane tablicom

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-1	4	-11	$*$
0	1	1	6
1	6	13	$*$

(rj. $L_9(x) = x^6 + 3x^2 + x + 1$)

12. Za funkciju $f(x) = \sqrt[3]{3+x}$ poznate su vrijednosti $f(0),\ f'(0),\ f''(0),\ f(4)$. Hermiteovom shemom odredite približne vrijednosti od $f(1.5),\ f'(1.5)$, te za njih izračunajte prave greške. (rj. $f(1.5) = 1.65096,\ f'(1.5) = 0.12229$)

13. Hermiteovom metodom na osnovu skupa podataka $(1, 1.1752),\ (1.1, 1.3356)$ $(1.2, 1.5095),\ (1.3, 1.6984),\ (1.4, 1.9043)$ približno izračunajte prvu i drugu derivaciju u točki $x = 1.2$. (rj. $f'(1.2) = 1.8153,\ f''(1.2) = 1.5434$)

14. Hermiteovom metodom na osnovu skupa podataka $(1.2, 1.5095),\ (1.3, 1.6984),$ $(1.4, 1.9043),\ (1.5, 2.1293),\ (1.6, 2.3756)$ približno izračunajte prvu i drugu derivaciju u točki $x = 1.4$. (rj. $f'(1.4) = 2.15108,\ f''(1.4) = 1.91412$)

15. Neka su podaci dobiveni iz funkcije $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$ s prvim čvorom $x_0 = 0$ i zadnjim $x_4 = 2$ (ekvidistantni čvorovi). Koristeći Hermiteovu shemu izračunajte $f''(1)$. Odredite pravu grešku. (rj. $f''(1) = -0.03091$)

16. Koristeći Hermiteov interpolacijski polinom izračunajte prvu i drugu derivaciju u točki $x = 302$ prema podacima danim u tablici

x_i	300	301	302	303	304	305
y_i	5,703782	5,7071103	5,710427	5,713733	5,717028	5,720312

.

(rj. $f'(302) = 0.0033,\ f''(302) = -0.000006$)

17. Znajući vrijednosti funkcije $f(x) = \sin x$ u čvorovima $x_i = \frac{\pi i}{3},\ i = -2, -1, 1, 2,$ koristeći Hermiteov interpolacijski polinom izračunajte približnu vrijednost od $\cos\frac{\pi}{4}$. Izračunajte prave greške. (rj. $\cos\frac{\pi}{4} = 0.73259$)

18. Ako su poznate vrijednosti funkcije $f(x) = \frac{1}{x}$ u točkama $x = 1, 2$, i njena prva derivacija u točki $x = 1$, koristeći Hermiteov interpolacijski polinom izračunajte približnu vrijednost u točki $x = 3$. Nađite pravu grešku. (rj. $f(3) = 1$)

19. Koristeći Hermiteov interpolacijski polinom izračunajte $f'(1)$ za funkciju zadanu tablicom

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	1	0	2
1	-1		
2	0		

(rj. $f'(1) = -2.745$)

7.6. Interpolacija po dijelovima polinomima

Polinomna interpolacija visokog stupnja može imati vrlo loša svojstva, pa umjesto toga često se koristi po dijelovima polinomna interpolacija, tj. na svakom podintervalu vrijedi

$$g|_{[x_k,x_{k+1}]} = P_k, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1,$$

gdje su P_k polinomi niskog (ali fiksnog) stupnja. Za razliku od polinomne interpolacije funkcijskih vrijednosti, gdje je bilo dovoljno da su čvorovi interpolacije međusobno različiti, ovdje pretpostavljamo da su rubovi podintervala interpolacije uzlazno numerirani, tj. da vrijedi $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$. To još ne osigurava da je g funkcija jer je moguća dvoznačnost u dodirnim točkama podintervala.

Preciznije, pretpostavimo da na svakom podintervalu $[x_k, x_{k+1}]$ koristimo polinom P_k stupnja m koji je određen s $(m+1)$-im koeficijentom. Ukupno moramo odrediti koeficijente polinoma P_k u n podintervala, tj. ukupno $(m+1)\cdot n$ koeficijenata. Interpolacijski uvjeti su

$$g(x_k) = y_k, \quad k = 0, \ldots, n,$$

što za svaki polinom daje po 2 uvjeta

$$P_k(x_k) = y_k, \quad P_k(x_{k+1}) = y_{k+1}, \quad k = 0, \ldots, n-1,$$

a ukupno daje $2n$ uvjeta interpolacije. Uočimo da smo postavljanjem prethodnih uvjeta interpolacije osigurali neprekidnost funkcije g, jer je

$$P_{k-1}(x_k) = P_k(x_k), \quad k = 1, \ldots, n-1.$$

Primjetimo da uvjeta interpolacije ima $2n$, a moramo naći $(m+1)\cdot n$ koeficijenata. Bez dodatnih uvjeta to je moguće napraviti samo za $m = 1$, tj. za po dijelovima linearnu interpolaciju.

Za $m > 1$ moraju se dodati uvjeti na glatkoću interpolacijske funkcije g u čvorovima interpolacije.

7.6.1. Po dijelovima kubna interpolacija

Neka su dani podaci $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$. Postavlja se problem nalaženja funkcije g definirane na intervalu $[x_0, x_n]$ tako da je $g/[x_k, x_{k+1}] = P_k, \ \ k = 0, ..., n-1$, pri čemu su $P_k, \ k = 0, ..., n-1$ polinomi trećeg stupnja. Sada su uvjeti

$$P_k(x_k) = y_k, \ P_k(x_{k+1}) = y_{k+1},$$

$$P_k'(x_k) = s_k, \ P_k'(x_{k+1}) = s_{k+1}.$$

Primjetimo da tako definirana funkcija g ima neprekidnu prvu derivaciju za proizvoljan izbor "nagiba" $s_k, \ k = 0, 1, \dots, n$, tj. mora biti

$$P_{k-1}'(x_k) = P_k'(x_k), \quad k = 1, \dots, n-1.$$

Iz Hermiteovog oblika interpolacijskog polinoma se lako vidi da je

$$P_k(x) = y_k + (x - x_k) f[x_k, x_k] + (x - x_k)^2 f[x_k, x_k, x_{k+1}] + (x - x_k)^2 (x - x_{k+1}) f[x_k, x_k, x_{k+1}, x_{k+1}].$$

Primjer 7.12. *Odredite lokalni oblik za po dijelovima kubnu interpolaciju za funkciju $f(x) = 1/x$ i čvorne točke $x_0 = 1, \ x_1 = 2, \ x_2 = 4$.*

Rješenje. Kako je $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ imamo da je $s_0 = f'(1) = -1, \ s_1 = f'(2) = -0.25$ i $s_2 = f'(4) = -0.0625$, pa je onda

x_i	y_i	$f^{[1]}$	$f^{[2]}$	$f^{[3]}$
$x_0 = 1$	$y_0 = 1$			
		$s_0 = -1$		
$x_0 = 1$	$y_0 = 1$		$f[x_0, x_0, x_1] = 0.5$	
		$f[x_0, x_1] = -0.5$		$f[x_0, x_0, x_1, x_1] = -0.25$
$x_1 = 2$	$y_1 = 0.5$		$f[x_0, x_1, x_1] = 0.25$	
		$s_1 = -0.25$		
$x_1 = 2$	$y_1 = 0.5$			

i

x_i	y_i	$f^{[1]}$	$f^{[2]}$	$f^{[3]}$
$x_1 = 2$	$y_1 = 0.5$			
		$s_1 = -0.25$		
$x_1 = 2$	$y_1 = 0.5$		$f[x_1, x_1, x_2] = 0.0625$	
		$f[x_1, x_2] = -0.125$		$f[x_1, x_1, x_2, x_2] = -0.015625$
$x_2 = 4$	$y_2 = 0.25$		$f[x_1, x_2, x_2] = 0.03125$	
		$s_2 = -0.0625$		
$x_2 = 4$	$y_2 = 0.25$			

$\Rightarrow P_0 = 1-1\cdot(x-1)+0.5(x-1)^2-0.25(x-1)^2(x-2) = -0.25x^3+1.5x^2-3.25x+3$,

i $P_1 = 0.5-0.25(x-2)+0.0625(x-2)^2-0.015625(x-2)^2(x-4) = -0.015625x^3 + 0.1875x^2 - 0.8125x + 1.5$.

Za izvođenje koeficijenata polinoma povoljnije je polinome $P_k,\ k = 0, 1, \ldots, n-1$ izraziti u obliku:

$$P_k(x) = c_{1,k} + c_{2,k}(x - x_k) + c_{3,k}(x - x_k)^2 + c_{4,k}(x - x_k)^3. \tag{7.12}$$

Očito vrijedi:

$$c_{1,k} = P_k(x_k) = y_k, \quad c_{2,k} = P_k'(x_k) = s_k,$$

$$c_{3,k} = \frac{P_k''(x_k)}{2!}, \quad c_{4,k} = \frac{P_k'''(x_k)}{3!}.$$

Formirajmo sada Hermiteovu tablicu podijeljenih razlika za polinome $P_k,\ k = 0, 1, ..., n-1$.

x_j	y_j	$P_k[x_j, x_{j+1}]$	$P_k[x_j, x_{j+1}, x_{j+2}]$	$P_k[x_j, x_{j+1}, x_{j+2}, x_{j+3}]$
x_k	y_k			
		$P_k[x_k, x_k] = P_k'(x_k) = s_k$		
			$P_k[x_k, x_k, x_k] = \frac{P_k''(x_k)}{2!}$	
x_k	y_k			
		$P_k[x_k, x_k] = P_k'(x_k) = s_k$		$P_k[x_k, x_k, x_k, x_k] = \frac{P_k'''(x_k)}{3!}$
			$P_k[x_k, x_k, x_k] = \frac{P_k''(x_k)}{2!}$	
x_k	y_k			
		$P_k[x_k, x_k] = P_k'(x_k) = s_k$		$P_k[x_k, x_k, x_k, x_{k+1}]$
			$P_k[x_k, x_k, x_{k+1}]$	
x_k	y_k			
		$P_k[x_k, x_{k+1}]$		$P_k[x_k, x_k, x_{k+1}, x_{k+1}]$
			$P_k[x_k, x_{k+1}, x_{k+1}]$	
x_{k+1}	y_{k+1}			
		$P_k[x_{k+1}, x_{k+1}] = P_k'(x_{k+1}) = s_{k+1}$		
x_{k+1}	y_{k+1}			

Kako je polinom P_k polinom trećeg stupnja to su njegove podijeljene razlike trećeg reda konstantne (nezavisne o izboru čvornih točaka) za svaki $k = 0, 1, ..., n-1$. Odavde dobivamo:

$$\begin{aligned} c_{4,k} &= \frac{P_k'''(x_k)}{3!} = P_k[x_k, x_k, x_{k+1}, x_{k+1}] = \frac{P_k[x_k, x_k] + P_k[x_{k+1}, x_{k+1}] - 2P_k[x_k, x_{k+1}]}{(x_{k+1} - x_k)^2} \\ &= \frac{s_k + s_{k+1} - 2f[x_k, x_{k+1}]}{(x_{k+1} - x_k)^2}. \end{aligned} \tag{7.13}$$

Preostaje još dobiti oblik za $c_{3,k}$. Koristeći jednakosti

$$\frac{P_k'''(x_k)}{3!} = P_k[x_k, x_k, x_k, x_k] = P_k[x_k, x_k, x_k, x_{k+1}] = \frac{P_k[x_k, x_k, x_{k+1}] - P_k''(x_k)/2}{x_{k+1} - x_k}$$

lako se dobije

$$c_{3,k} = \frac{P_k''(x_k)}{2!} = \frac{f[x_k, x_{k+1}] - s_k}{x_{k+1} - x_k} - (x_{k+1} - x_k)c_{4,k}. \tag{7.14}$$

Napomenimo da kada bi bili zadani nagibi s_k, $k = 0, 1, ..., n$, tj. vrijednosti prve derivacije u čvornim točkama, time bi bili zadani koeficijenti $c_{1,k}$, $c_{2,k}$, $c_{3,k}$, $c_{4,k}$, $k = 0, 1, ..., n-1$ pa i polinomi P_k, $k = 0, 1, ..., n-1$. Dobivena interpolacija naziva se *lokalna kubna interpolacija*. Primjetimo da ovime nemamo zagarantiranu neprekidnost druge derivacije interpolacijske funkcije u čvornim točkama.

7.6.2. Kubni splajn

Brojeve $s_0, \ldots, s_n$ možemo odrediti na još jedan način. Umjesto da su realni brojevi s_k neka aproksimacija derivacije funkcije f u čvorovima, možemo zahtijevati da se s_k biraju tako da funkcija g bude još glađa - da joj je i druga derivacija neprekidna.

Nagibe $s_1, \ldots, s_{n-1}$ određujemo iz uvjeta neprekidnosti druge derivacije u unutarnjim čvorovima $x_1, \ldots, x_{n-1}$. Takva se interpolacija zove (kubna) splajn interpolacija. Primjetimo da sada imamo $2n + (n-1) + (n-1) = 4n - 2$ jednadžbi, pri čemu imamo $n-$polinoma trećeg stupnja tj. $4n$ nepoznatih koeficijenata. Primjetimo osim toga da u čvorovima x_0, x_n nemamo zahtjeva na vrijednost prve i druge derivacije polinoma P_0 i P_{n-1}. Upravo to će nam kasnije omogućiti da formiramo dva dodatna zahtjeva na polinome P_0 i P_{n-1} koji će nam dati dvije nedostajuće jednadžbe.

Zahtjev na uvjete ljepljenja druge derivacije u unutarnjim čvorovima sada je:

$$P_{k-1}''(x_k) = P_k''(x_k), \quad k = 1, \ldots, n-1.$$

Ako polinome P_k pišemo u formi (7.12), onda je

$$P_{k-1}''(x) = 2c_{3,k-1} + 6c_{4,k-1}(x - x_{k-1}),$$

$$P_k''(x) = 2c_{3,k} + 6c_{4,k}(x - x_k),$$

pa je

$$\begin{aligned} P_{k-1}''(x_k) &= 2c_{3,k-1} + 6c_{4,k-1}(x_k - x_{k-1}), \\ P_k''(x_k) &= 2c_{3,k}. \end{aligned}$$

Drugim riječima, podijelimo li prethodne jednadžbe s 2, uvjet ljepljenja glasi

$$c_{3,k-1} + 3c_{4,k-1}(x_k - x_{k-1}) = c_{3,k}. \tag{7.15}$$

Koristeći relacije (7.13) i (7.14) i ubacivanjem razlika unaprijed, dobivamo

$$\begin{aligned} \frac{f[x_{k-1},x_k] - s_{k-1}}{\Delta x_{k-1}} &+ 2\frac{s_{k-1} + s_k - 2f[x_{k-1},x_k]}{\Delta x_{k-1}} \\ &= \frac{f[x_k,x_{k+1}] - s_k}{\Delta x_k} - \frac{s_k + s_{k+1} - 2f[x_k,x_{k+1}]}{\Delta x_k}, \end{aligned}$$

gdje je $\Delta x_{k-1} = x_k - x_{k-1}$. Sređivanjem dobivamo

$$\frac{-3f[x_{k-1},x_k] + s_{k-1} + 2s_k}{\Delta x_{k-1}} = \frac{3f[x_k,x_{k+1}] - 2s_k - s_{k+1}}{\Delta x_k}.$$

Pomnožimo li prethodnu relaciju s $\Delta x_{k-1}\Delta x_k$ i prebacimo li sve s_k na lijevu stranu, a članove koji nemaju s_k na desnu stranu, za $k = 1,\ldots,n-1$, dobivamo

$$\Delta x_k s_{k-1} + 2(\Delta x_{k-1} + \Delta x_k)s_k + \Delta x_{k-1}s_{k+1} = 3(\Delta x_k f[x_{k-1},x_k] + \Delta x_{k-1}f[x_k,x_{k+1}]).$$

Ovo je linerani sustav s $(n+1)$-om nepoznanisom i $(n-1)$-om jednadžbom.

Pokažimo tri načina dobivanja još dodatnih dviju jednadžbi:

<u>Zadani nagibi u rubovima $s_0 = f'(x_0)$, $s_n = f'(x_n)$.</u>
Kako su s_0, s_n sada zadani imamo lineran sustav od $n-1$ jednadžbi sa $n-1$ nepoznanica. Matrica tako dobivenog lineranog sustava je trodijagonalna

$$\begin{bmatrix} 2(\Delta x_0 + \Delta x_1) & \Delta x_0 & & & \\ \Delta x_2 & 2(\Delta x_1 + \Delta x_2) & \Delta x_1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \Delta x_{n-2} & 2(\Delta x_{n-3} + \Delta x_{n-2}) & \Delta x_{n-3} \\ & & & \Delta x_{n-1} & 2(\Delta x_{n-2} + \Delta x_{n-1}) \end{bmatrix}$$

i strogo dijagonalno dominantna po retcima, jer za svako k vrijedi

$$2(\Delta x_{k-1} + \Delta x_k) > \Delta x_{k-1} + \Delta x_k,$$

pa je regularna. Prema tome ovaj linerani sustav sigurno ima jedinstveno rješenje $s_1,\ldots,s_{n-1}$. Vakav je sustav vrlo pogodan za različite iterativne metode rješavanja linearnih sustava.

<u>Zadani ugibi (druga derivacija) u rubovima $f''(x_0)$, $f''(x_n)$:</u>

Iz zahtjeva $f''(x_0) = P_0''(x_0)$ i oblika polinoma P_0 lako se dobije jednadžba:

$$2s_0 + s_1 = 3f[x_0,x_1] - \frac{1}{2}f''(x_0)\Delta x_0.$$

Analogno iz zahtjeva $f''(x_n) = P''_{n-1}(x_n)$ i oblika polinoma P_{n-1} lako se dobije jednadžba:

$$s_{n-1} + 2s_n = 3f[x_{n-1}, x_n] + \frac{1}{2}f''(x_n)\Delta x_{n-1}.$$

Matrica tako dobivenog linearnog sustava sada je

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & & & & & \\ \Delta x_1 & 2(\Delta x_0 + \Delta x_1) & \Delta x_0 & & & & \\ & \Delta x_2 & 2(\Delta x_1 + \Delta x_2) & \Delta x_1 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & \Delta x_{n-2} & 2(\Delta x_{n-3} + \Delta x_{n-2}) & \Delta x_{n-3} & \\ & & & & \Delta x_{n-1} & 2(\Delta x_{n-2} + \Delta x_{n-1}) & \Delta x_{n-2} \\ & & & & & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Napomenimo je da je dobiveni sustav formata $(n+1) \times (n+1)$ i također trodijagonalan i dijagonalno dominantan.

<u>Zahtjevi cikličnosti: $f'(x_0) = f'(x_n)$, $f''(x_0) = f''(x_n)$</u>

Iz zahtjeva $f'(x_0) = f'(x_n)$ očito se dobije $s_0 = s_n$. Iz zahtjeva $f''(x_0) = f''(x_n)$ se dobije $P''_0(x_0) = P''_{n-1}(x_n)$ što korištenjem oblika polinoma P_0 i P_{n-1} daje jednadžbu

$$\Delta x_{n-1}s_1 + \Delta x_0 s_{n-1} + 2(\Delta x_0 + \Delta x_{n-1})s_n = 3(\Delta x_{n-1}f[x_0, x_1] + \Delta x_0 f[x_{n-1}, x_n]),$$

pa je matrica sustava:

$$\begin{bmatrix} 2(\Delta x_0 + \Delta x_1) & \Delta x_0 & & & & \Delta x_1 \\ \Delta x_2 & 2(\Delta x_1 + \Delta x_2) & \Delta x_1 & & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & \Delta x_{n-2} & 2(\Delta x_{n-3} + \Delta x_{n-2}) & \Delta x_{n-3} & \\ & & & \Delta x_{n-1} & 2(\Delta x_{n-2} + \Delta x_{n-1}) & \Delta x_{n-2} \\ \Delta x_{n-1} & & & & \Delta x_0 & 2(\Delta x_0 + \Delta x_{n-1}) \end{bmatrix}.$$

Općenito, ako sustave u kojima je matrica sustava trodijagonalna napišemo u obliku $AT = D$, gdje je

$$A = \begin{bmatrix} B_1 & C_1 & & & \\ A_2 & B_2 & C_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & A_{n-1} & B_{n-1} & C_{n-1} \\ & & & A_n & B_n \end{bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \vdots \\ T_{n-1} \\ T_n \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ \vdots \\ D_{n-1} \\ D_n \end{bmatrix},$$

rekurzivna metoda rješavanja je:

$$b_1 = \frac{C_1}{B_1}, \quad b_i = \frac{C_i}{B_i - A_i b_{i-1}}, \quad i = 2, 3, \ldots, n-1,$$

$$q_1 = \frac{D_1}{B_1}, \quad q_i = \frac{D_i - A_i q_{i-1}}{B_i - A_i b_{i-1}}, \quad i = 2, 3, \ldots, n,$$

$$T_n = q_n, \quad T_i = q_i - b_i T_{i+1}, \quad i = n-1, \ldots, 1.$$

Primjer 7.13. *Za funkciju* $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ *izračunajte kubni splajn za točke* $x_0 = 0,\ x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_3 = 3,\ x_4 = 4,\ x_5 = 5$ *uz zadane:*

(a) $f'(0),\ f'(5)$

(b) $f''(0),\ f''(5)$.

Rješenje. (a) $f'(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$ pa je $s_0 = f'(0) = 0,\ s_5 = f'(5) = -0.01479$.

x_j	y_j	$f[x_j, x_{j+1}]$
$x_0 = 0$	$y_0 = 1$	
		$f[x_0, x_1] = -0.5$
$x_1 = 1$	$y_1 = 0.5$	
		$f[x_1, x_2] = -0.3$
$x_2 = 2$	$y_2 = 0.2$	
		$f[x_2, x_3] = -0.1$
$x_3 = 3$	$y_3 = 0.1$	
		$f[x_3, x_4] = -0.04118$
$x_4 = 4$	$y_4 = 0.05882$	
		$f[x_4, x_5] = -0.02036$
$x_5 = 5$	$y_5 = 0.03846$	

Sada imamo:

$$\begin{aligned}
s_0 + 4s_1 + s_2 \qquad\qquad\qquad &= 3[(-0.3) + (-0.5)] \quad (i = 1)\\
s_1 + 4s_2 + s_3 \qquad\qquad &= 3[(-0.1) + (-0.3)] \quad (i = 2)\\
s_2 + 4s_3 + s_4 \qquad &= 3[(-0.04118) + (-0.1)] \quad (i = 3)\\
s_3 + 4s_4 + s_5 &= 3[(-0.02036) + (-0.04118)] \quad (i = 4)
\end{aligned}$$

Kako je $s_0 = 0,\ s_5 = -0.01479$ imamo sustav

$$\begin{aligned}
4s_1 + s_2 \qquad\qquad &= -2.4,\\
s_1 + 4s_2 + s_3 \qquad &= -1.2,\\
s_2 + 4s_3 + s_4 &= -0.42354,\\
s_3 + 4s_4 &= -0.16983,
\end{aligned}$$

pa je $B_1 = B_2 = B_3 = B_4 = 4,\quad C_1 = C_2 = C_3 = 1,\quad A_2 = A_3 = A_4 = 1,\quad D_1 = -2.4,\ D_2 = -1.2,\ D_3 = -0.42354,\ D_4 = -0.16983.$

Sada,

$$
\begin{aligned}
b_1 &= \frac{C_1}{B_1} = 0.25,\\
b_2 &= \frac{C_2}{B_2 - A_2 b_1} = \frac{1}{4 - 0.25} = 0.26666,\\
b_3 &= \frac{C_3}{B_3 - A_3 b_2} = \frac{1}{4 - 0.26666} = 0.26786
\end{aligned}
$$

i

$$
\begin{aligned}
q_1 &= \frac{D_1}{B_1} = -0.6,\\
q_2 &= \frac{D_2 - A_2 q_1}{B_2 - A_2 b_1} = \frac{-1.2 + 0.6}{3.75} = -0.16,\\
q_3 &= \frac{D_3 - A_3 q_2}{B_3 - A_3 b_2} = \frac{-0.42354 + 0.16}{4 - 0.26666} = -0.07059,\\
q_4 &= \frac{D_4 - A_4 q_3}{B_4 - A_4 b_3} = \frac{-0.16983 + 0.07059}{4 - 0.26786} = -0.02659,
\end{aligned}
$$

iz čega je

$$
\begin{aligned}
s_4 &= q_4 = -0.02659,\\
s_3 &= q_3 - b_3 s_4 = -0.07059 + 0.26786 \cdot 0.02659 = -0.06347,\\
s_2 &= q_2 - b_2 s_3 = -0.16 + 0.26666 \cdot 0.06348 = -0.14308,\\
s_1 &= q_1 - b_1 s_2 = -0.6 + 0.25 \cdot 0.14308 = -0.56423.
\end{aligned}
$$

Kako je

$$
\begin{aligned}
c_{1,0} &= y_0 = 1, \quad c_{2,0} = s_0 = 0,\\
c_{4,0} &= \frac{s_0 + s_1 - 2f[x_0, x_1]}{(x_1 - x_0)^2} = 0.43577\\
c_{3,0} &= \frac{f[x_0, x_1] - s_0}{x_1 - x_0} - (x_1 - x_0) c_{4,0} = -0.93577,
\end{aligned}
$$

kubni splajn za interval $[x_0, x_1]$ je onda $P_0(x) = 1 - 0.93577x^2 + 0.43577x^3$.

Za intervale $[x_1, x_2]$, $[x_2, x_3]$ i $[x_3, x_4]$ dobivamo analogno.

(b) $f''(x) = \frac{6x^2-2}{(1+x^2)^3}$ pa je $f''(0) = -2, \quad f''(5) = 0.00842$ i sustav je oblika

$$
\begin{aligned}
2s_0 + s_1 \qquad\qquad\qquad &= -1.5 = D_0,\\
s_0 + 4s_1 + s_2 \qquad\qquad &= -2.4 = D_1,\\
s_1 + 4s_2 + s_3 \qquad &= -1.2 = D_2,\\
s_2 + 4s_3 + s_4 \quad &= -0.42354 = D_3,\\
s_3 + 4s_4 + s_5 &= -0.18462 = D_4,\\
s_4 + 2s_5 &= -0.05687 = D_5.
\end{aligned}
$$

Sada, $B_0 = 2,\ B_1 = B_2 = B_3 = B_4 = 4,\ B_5 = 2,\quad C_0 = C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = 1,\ A_1 = A_2 = A_3 = A_4 = A_5 = 1$, pa dobivamo

$$
\begin{aligned}
b_0 &= \frac{C_0}{B_0} = 0.5,\\
b_1 &= \frac{C_1}{B_1 - A_1 b_0} = 0.28571,\\
b_2 &= \frac{C_2}{B_2 - A_2 b_1} = 0.26923,\\
b_3 &= \frac{C_3}{B_3 - A_3 b_2} = 0.26804,\\
b_4 &= \frac{C_4}{B_4 - A_4 b_3} = 0.26796
\end{aligned}
$$

i

$$
\begin{aligned}
q_0 &= \frac{D_0}{B_0} = -0.75,\\
q_1 &= \frac{D_1 - A_1 q_0}{B_1 - A_1 b_0} = -0.47143,\\
q_2 &= \frac{D_2 - A_2 q_1}{B_2 - A_2 b_1} = -0.19615,\\
q_3 &= \frac{D_3 - A_3 q_2}{B_3 - A_3 b_2} = -0.06095,\\
q_4 &= \frac{D_4 - A_4 q_3}{B_4 - A_4 b_3} = -0.03314,\\
q_5 &= \frac{D_5 - A_5 q_4}{B_5 - A_5 b_4} = -0.01370.
\end{aligned}
$$

Imamo

$$\begin{aligned}
s_5 &= q_5 = -0.01370,\\
s_4 &= q_4 - b_4 s_5 = -0.02947,\\
s_3 &= q_3 - b_3 s_4 = -0.05305,\\
s_2 &= q_2 - b_2 s_3 = -0.18187,\\
s_1 &= q_1 - b_1 s_2 = -0.41946,\\
s_0 &= q_0 - b_0 s_1 = -0.54027.
\end{aligned}$$

Za interval $[x_0, x_1]$ onda imamo

$$\begin{aligned}
c_{1,0} &= y_0 = 1, \quad c_{2,0} = s_0 = -0.54027,\\
c_{4,0} &= \frac{s_0 + s_1 - 2f[x_0, x_1]}{(x_1 - x_0)^2} = 0.04027,\\
c_{3,0} &= \frac{f[x_0, x_1] - s_0}{x_1 - x_0} - (x_1 - x_0)c_{4,0} = 0
\end{aligned}$$

i polinom je $P_0(x) = 1 - 0.54027x + 0.04027x^3$. Za ostale intervale dobivamo analogno.

Primjer 7.14. *Odredite kubni splajn trećeg intervala za podatke*

x_i	1	2	4	5
y_i	5	1	3	2

ako je

(a) $f'(1) = 2, \quad f'(5) = 2,$

(b) $f''(1) = 0, \quad f''(5) = 0.$

Rješenje. Prvo imamo

x_j	y_j	$f[x_j, x_{j+1}]$
$x_0 = 1$	$y_0 = 5$	
		$f[x_0, x_1] = -4$
$x_1 = 2$	$y_1 = 1$	
		$f[x_1, x_2] = 1$
$x_2 = 4$	$y_2 = 3$	
		$f[x_2, x_3] = -1$
$x_3 = 5$	$y_3 = 2$	

i

$$\begin{aligned}
2s_0 + 6s_1 + s_2 \qquad\qquad &= -21,\\
s_1 + 6s_2 + 2s_3 &= -3.
\end{aligned}$$

(a) Kako je $s_0 = f'(1) = 2, \quad s_3 = f'(5) = 2$ imamo sustav

$$\begin{aligned} 6s_1 + s_2 &= -25, \\ s_1 + 6s_2 &= -7 \end{aligned}$$

i njegovo je rješenje $s_1 = -4.08571, \quad s_2 = -0.48571.$

Sada je

$$\begin{aligned} c_{1,2} &= y_2 = 3, \quad c_{2,2} = s_2 = -0.48571, \\ c_{4,2} &= \frac{s_2 + s_3 - 2f[x_2, x_3]}{(x_3 - x_2)^2} = 3.51429, \\ c_{3,2} &= \frac{f[x_2, x_3] - s_2}{x_3 - x_2} - (x_3 - x_2)c_{4,2} = -4.02858, \end{aligned}$$

pa je polinom $P_2(x) = -284.429 + 200.429x - 46.2001x^2 + 3.51429x^3$.

(b) Kako je $f''(1) = 0, \quad f''(5) = 0$ dobivamo još dvije jednadžbe:

$$\begin{aligned} 2s_0 + s_1 &= 12 \\ s_2 + 2s_3 &= -3 \end{aligned}$$

pa je onda sustav

$$\begin{aligned} 2s_0 + s_1 \qquad\qquad &= 12 = D_0 \\ 2s_0 + 6s_1 + s_2 \qquad &= -21 = D_1 \\ s_1 + 6s_2 + 2s_3 &= -3 = D_2 \\ s_2 + 2s_3 &= -3 = D_3. \end{aligned}$$

Sada je $B_0 = 2,\ B_1 = B_2 = 6,\ B_3 = 2,\ A_1 = 2,\ A_2 = A_3 = 1,\ C_0 = C_1 = 1,\ C_2 = 2,$ pa imamo

$$\begin{aligned} b_0 &= \frac{C_0}{B_0} = 0.5, \\ b_1 &= \frac{C_1}{B_1 - A_1 b_0} = 0.2, \\ b_2 &= \frac{C_2}{B_2 - A_2 b_1} = 0.34483 \end{aligned}$$

i

$$q_0 = \frac{D_0}{B_0} = 6$$

$$q_1 = \frac{D_1 - A_1 q_0}{B_1 - A_1 b_0} = -6.6,$$
$$q_2 = \frac{D_2 - A_2 q_1}{B_2 - A_2 b_1} = 0.62069,$$
$$q_3 = \frac{D_3 - A_3 q_2}{B_3 - A_3 b_2} = -2.1875.$$

Dobivamo

$$s_3 = q_3 = -2.1875,$$
$$s_2 = q_2 - b_2 s_3 = 1.375,$$
$$s_1 = q_1 - b_1 s_2 = -6.7241,$$
$$s_0 = q_0 - b_0 s_1 = 9.3.$$

Za interval $[x_2, x_3]$ onda imamo

$$c_{1,2} = y_2 = 3, \quad c_{2,2} = s_2 = 1.375,$$
$$c_{4,2} = \frac{s_2 + s_3 - 2f[x_2, x_3]}{(x_2 - x_3)^2} = 1.1875,$$
$$c_{3,2} = \frac{f[x_2, x_3] - s_2}{x_3 - x_2} - (x_3 - x_2)c_{4,2} = -3.5625$$

i polinom je $P_2(x) = -135.5 + 86.875x - 17.8125x^2 + 1.1875x^3$.

Zadaci za vježbu

1. Odredite približnu vrijednost za $f'(1.3)$, te pravu grešku ako je $f(x) = \ln x$ koristeći vrijednost funkcije i njezine derivacije u točkama $x_0 = 1,\ x_1 = 2$, koristeći kubni splajn. (rj. $f'(3) = 0.77035$)

2. Za funkciju $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$ na $[1, 2]$ uz ekvidistantne čvorove s $h = 0.5$ odredite pravu grešku za približnu vrijednost od $f'(1.5)$, koristeći vrijednosti funkcije i njezine derivacije u točkama $x_0 = 1,\ x_1 = 2$, koristeći kubni splajn. (rj. $f'(1.5) = 0.18093$)

3. Za funkciju $f(x) = \frac{1}{x}$ i čvorne točke $x_0 = 1,\ x_1 = 2$ odredite kubni splajn drugog intervala (koristi poznavanje prve derivacije funkcije f u x_0 i x_2) i pomoću njega izračunajte prvu derivaciju u točki 1.5. (rj. $f'(1.5) = -0.4375$)

4. Odredite kubni splajn $P_2(x)$ zadnjeg podintervala za funkciju $f(x) = e^x$ na intervalu $[0, 1]$ za $h = \frac{1}{3}$, te izračunajte $\left|f'\left(\frac{2}{3}\right) - P_2'\left(\frac{2}{3}\right)\right|$.

5. Koristeći kubni splajn funkcije $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ na intervalu $[0, 1]$ i čvorove $x_0 = 0,\ x_1 = 0.5,\ x_2 = 1$ odredite približne vrijednosti za $f(0.75)$ i $f'(0.75)$ znajući $f'(0),\ f'(1)$. Odredite prave greške. (rj. $f(0.75) = 0.64,\ f'(0.75) = 0.6144$)

6. Odredite približnu vrijednost $f'(1.5)$ te pravu grešku kako je $f(x) = \log x$ koristeći vrijednost njezine derivacije u točkama $x_0 = 1,\ x_1 = 2$ koristeći kubni splajn. Ulazne podatke i međuračune provoditi zaokruživanjem na petom decimalnom mjestu. (rj. $f'(1.5) = 0.28953$)

7. Odredite približnu vrijednost $f'(1.5)$ te pravu grešku kako je $f(x) = \sqrt{1+3x}$ koristeći vrijednost njezine derivacije u točkama $x_0 = 1,\ x_2 = 2$ koristeći kubni splajn. Ulazne podatke i međuračune provoditi zaokruživanjem na petom decimalnom mjestu.

8. Konstruirajte kubni splajn prvog intervala za funkciju zadanu sljedećom tablicom

x	0	1	2
$f(x)$	0	0.3679	0.1353

gdje je $f'(0) = 0.5$ i $f'(2) = -0.2030$. (rj. $P_0(x) = 0.5x + 0.07647x^2 - 0.20857x^3$.

9. Provjerite da li je funkcija

$$P(x) = \begin{cases} (x-1)^3, & x \in [0,1] \\ 2(x-1)^3, & x \in [1,2] \end{cases}$$

kubni splajn na intervalu $[0,2]$.

10. Postoje li a i b takvi da funkcija

$$s(x) = \begin{cases} (x-2)^3 + a(x-1)^2, & x \in [1,2] \\ (x-2)^3 - (x-3)^2, & x \in [2,3] \\ (x-3)^3 + b(x-2)^2, & x \in [3,4] \end{cases}$$

bude kubni splajn? (rj. ne može)

11. Odredite parametre $a,\ b,\ c$ i d tako da funkcija

$$s(x) = \begin{cases} 1-2x, & x \in [-10,-3], \\ a + bx + cx^2 + dx^3, & x \in [-3,4], \\ 157 - 32x, & x \in [4,11], \end{cases}$$

bude kubni splajn. (rj. $a = \frac{12763}{343},\ b = \frac{5056}{343},\ c = -\frac{-}{312}343,\ d = -\frac{282}{343}$)

12. Odredite kubni splajn funkcije $f(x) = \sqrt[3]{1+2x},\ x \in [0,1]$ uz čvorne točke $x_0 = 0,\ x_1 = 1$ i zadane $f''(x_0)$ i $f''(x_1)$. Koristeći taj spliajn izračunajte približne vrijednosti za $f'(x_0)$ i $f'(x_1)$ te prave greške.

13. Odredite kubni splajn drugog intervala za funkciju zadanu tablicom

x	0	0.2	0.5
$f(x)$	1.32	1.55	1.78

, pri čemu je $f''(0) = 0.47$ i $f''(0.5) = 1.23$.

14. Odredite kubni splajn u čvorovima $-1,\ 0,\ 1$ tako da je $f''(-1) = f''(1) = 0,\ f(0) = 1,\ f(-1) = f(1) = 0$.

15. Odredite parametre a, b, c, d, e, f, g i h tako da funkcija $S(x) = \begin{cases} ax^3 + bx^2 + cx + d, & x \in [-1, 0], \\ ex^3 + fx^2 + gx + h, & x \in [0, 1], \end{cases}$ bude kubni splajn s uvjetima $S(-1) = 1$, $S(0) = 2$, $S(1) = -1$ i $S''(-1) = S''(1) = 0$.

16. Koristeći kubni splajn funkcije $f(x) = \sin x$ na intervalu $[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}]$ i čvorove $x_i = \pi i/6$, $i = -2, -1, 1, 2$ odredite približne vrijednosti za $f(0)$ i $f'(0)$ znajući $f'(-\pi/3), f'(\pi/3)$. Odredite prave greške.