1 MATRICE

1. Riješite matričnu jednadžbu $BX = A + BXA$, ako je $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ i $B = 2A^*$.

2. Gaussovim algoritmom odredite sva rješenja sustava $x_1 + x_3 + x_4 = 3$, $x_2+x_3+x_4 = 2$, $x_1+x_2+x_4 = 2$, $x_1+x_2+x_3 = 3$. Odredite determinantu matrice sustava. Ima li ta matrica inverznu matricu.

3. Riješite matričnu jednadžbu $BXA = B + XA$, ako je $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ i $B = 2A^*$.

4. Gaussovim algoritmom odredite sva rješenja sustava $x_1 + x_2 + x_3 = 2$, $x_2+x_3+x_4 = 3$, $x_1+x_3+x_4 = 2$, $x_1+x_2+x_4 = 3$. Odredite determinantu matrice sustava. Ima li ta matrica inverznu matricu.

5. Riješite matričnu jednadžbu $\left(BX^{-1}A\right)^{-1} = A^{-1}X+I$ ako je $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ i $B = A^T$.

6. Odredite sva rješenja sustava $x_1+x_2+x_3+x_4 = 6$, $x_1+x_2 = 3$, $x_2+x_3 = 3$, $x_3 + x_4 = 3$. Je li taj sustav određen, neodređen ili kontradiktoran?

7. Riješite matričnu jednadžbu $XB^{-1} = \left(BX^{-1}A\right)^{-1}+I$ ako je $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ i $B = A^T$.

8. Odredite sva rješenja sustava $x_1+x_2+x_3+x_4 = 8$, $x_3+x_4 = 4$, $x_2+x_3 = 4$, $x_1 + x_2 = 4$. Je li taj sustav određen, neodređen ili kontradiktoran?

9. Riješite matričnu jednadžbu $B(X+A) = X+AB$ ako je $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ i $B = A^T$.

10. Odredite $a \in \mathbf{R}$ za koji je sustav $x_1 + x_2 + x_3 = 1$, $x_2 + x_3 + x_4 = 2$, $x_1+x_3+x_4 = 3$, $x_1+x_2+ax_4 = -3$ a) određen b) neodređen c) nesuglasan. U slučaju kada je neodređen riješite ga.

11. Riješite matričnu jednadžbu $(X+B)A = X+AB$ ako je $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ i $B = A^T$.

12. Neka je $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$. a) Ima li matrica A inverznu matricu? b) Odredite sve matrice X za koje je $AX = Ab$ gdje je $b = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$.

13. Riješite matričnu jednadžbu $\left(XB^{-1} + A\right)^{-1} = B^{-1}X^{-1}$ ako je $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ i $A = B^*$.

14. Neka je $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$. a) Ima li matrica B inverznu matricu? b) Odredite sve matrice X za koje je $BX = Ba$ gdje je $a = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$.

15. Riješite matričnu jednadžbu $\left(A^{-1}X + B\right)^{-1} = X^{-1}A^{-1}$ ako je $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ i $B = A^*$.

16. Riješite matričnu jednadžbu $BX = CX + B$ ako je $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ i $C = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$.

17. Odredite $k \in \mathbb{R}$ tako da je sustav $AX = B$ neodređen, i u tom slučaju ga riješite, ako je $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 8 & k^2 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2k \end{bmatrix}$.

18. Odredite $m \in \mathbb{R}$ tako da je sustav $BX = A$ neodređen, i u tom slučaju ga riješite, ako je $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & m^2 \end{bmatrix}$ i $A = \begin{bmatrix} 1 \\ m \end{bmatrix}$.

19. Riješite matričnu jednadžbu $XA = XB + A$ ako je $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$.

20. Riješite matričnu jednadžbu $BXA = B^2$, ako je $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ i $B = A^*$.

21. Odredite sve matrice X za koje je $AX = B$, ako je $A^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ i $B^T = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 6 \end{bmatrix}$.

22. Odredite sve matrice X za koje je $BX = A$, ako je $B^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ i $A^T = \begin{bmatrix} 4 & 7 & 7 \end{bmatrix}$.

23. Riješite matričnu jednadžbu $AXB = A^2$, ako je $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ i $A = B^*$.

24. Riješite matričnu jednadžbu $AXB + AX = B$ ako je $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

25. Riješite matričnu jednadžbu $XA = B$, ako je $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}$.

26. Riješite matričnu jednadžbu $BXA - XA = B$ ako je $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$.

27. Riješite matričnu jednadžbu $XB = A$, ako je $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$.

28. Matrica $A = [a_{ij}]$ formata 2×2 zadana je s $a_{ij} = |i - 2j|$, te neka je $B = A^*$. a) Izračunajte A^2 i B^2. b) Riješite matričnu jednadžbu $A^2XB = B^2 + 2XB$.

29. Neka je $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$. a) Izračunajte $\det\left(A^T A\right)$. b) Gaussovim algoritmom riješite $A^T AX = B^T$ ako je $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$.

30. Neka je $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$. a) Izračunajte $\det\left(AA^T\right)$. b) Gaussovim algoritmom riješite $AA^T X = B^T$ ako je $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$.

31. Matrica $A = [a_{ij}]$ formata 2×2 zadana je s $a_{ij} = |2i - j|$, te neka je $B = A^*$. a) Izračunajte A^2 i B^2. b) Riješite matričnu jednadžbu $AXB^2 = 2AX + A^2$.

2 Neodređeni integral

1. Izračunajte sljedeće određene integrale a) $\int_0^3 \frac{x\,dx}{2x+1}$ b) $\int_0^3 \left(\frac{x}{2x+1}\right)^2 dx$ c) $\int_0^3 \frac{x\,dx}{\sqrt{2x+1}}$.

2. Odredite $\int \frac{2x+3}{\sqrt{3-2x-x^2}} dx$.

3. Odredite $\int x \sin^2 x\, dx$.

4. Odredite $\int \frac{3x+2}{3+2x+x^2} dx$.

5. Odredite $\int x \cos^2 x\, dx$.

6. Odredite sve funkcije f za koje je $f''(x) = xe^{-3x}$. Od tih funkcija odredite onu za koju je $f(0) = 0$ i $f'(0) = 0$.

7. Izračunajte $\int \frac{\sin x + \cos x}{\cos^3 x} dx$.

3 Određeni integral

1. Pokažite da je $F(x) = \frac{1}{7} \ln \frac{2x-3}{x+2} + \ln 7$ primitivna funkcija funkcije $f(x) = \frac{1}{2x^2+x-6}$. Izračunajte
a) $\int_2^4 \frac{dx}{2x^2+x-6}$ b) $\int_2^4 f'(x)dx$.

2. Neka je $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2x+1}; & x \in [0,3] \\ 0; & x \notin [0,3] \end{cases}$. Izračunajte $F(-1)$ i $F(7)$ ako je $F(x) = \int_1^x f(t)dt$.

3. Neka je $f(x) = \begin{cases} x-2 & ; x \in [0,4] \\ 0 & ; x \notin [0,4] \end{cases}$. Izračunajte $\int_{-7}^{5} f(x)dx$. Ako je $F(x) = \int_{2}^{x} f(t)dt$ izračunajte a) $F(-7)$, $F(0)$, $F(3)$, $F(5)$ b) $\int_{-7}^{5} F(x)dx$.

4. Neka je $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2x+1} & ; x \in [0,4] \\ 0 & ; x \notin [0,4] \end{cases}$ i neka je $F(x) = \int_{1}^{x} f(t)dt$. Izračunajte a) $\int_{-3}^{6} f(x)dx$ b) $F(-3)$, $F(0)$, $F(2)$, $F(6)$ c) $\int_{0}^{6} F(x)dx$.

5. Pokažite da je funkcija $F(x) = \frac{2}{3}\text{arctg}\sqrt{e^{3x}-1} + \text{arctg}2$ primitivna funkcija funkcije $f(x) = \frac{1}{\sqrt{e^{3x}-1}}$. Izračunajte a) $\int_{1/3}^{1} \frac{dx}{\sqrt{e^{3x}-1}}$ b) $\int_{1/3}^{1} \frac{df(x)}{dx}dx$ c) $\frac{d}{dx}\left(\int_{1/3}^{x} F(t)dt\right)$ za $x = 1$.

6. Neka je $f(x) = \begin{cases} 4-x & ; x \in [1,4] \\ 0 & x \notin [1,4] \end{cases}$. Ako je $F(x) = \int_{2}^{x} f(t)dt$ a) Izračunajte $F(-2)$, $F(2)$, $F(3)$, $F(10)$ b) $\int_{-1}^{5} F(x)dx$.

7. Pokažite da je funkcija $F(x) = x - \frac{1}{2}\ln\left(1+e^{2x}\right) + \ln 7$ primitivna funkcija funkcije $f(x) = \frac{1}{1+e^{2x}}$. Izračunajte a) $\int_{0}^{2} \frac{dx}{1+e^{2x}}$. b) $\int_{0}^{2} df(x)$ c) $\frac{d}{dx}\left(\int_{0}^{2} F(x)dx\right)$ d) $\frac{d}{dx}\left(\int_{0}^{x} F(t)dt\right)$ za $x = 2$.

8. Neka je $f(x) = \begin{cases} 8-2x & ; x \in [2,4] \\ 0 & ; x \notin [2,4] \end{cases}$. Ako je $F(x) = \int_{1}^{x} f(t)dt$, izračunajte $F(3)$, $F(10)$, $F'(3)$, $F'(10)$.

9. Neka je $f(x) = \begin{cases} 10-2x & ; x \in [3,5] \\ 0 & ; x \notin [3,5] \end{cases}$. Ako je $F(x) = \int_{2}^{x} f(t)dt$, izračunajte $F(4)$, $F(12)$, $F'(4)$, $F'(12)$.

10. Izračunajte $\int_{-\pi}^{\pi}(x^4+3x)\sin(2x)\ dx$.

11. Izračunajte $\int_{-2\pi}^{2\pi}(2x+x^4)\sin(3x)\ dx$.

12. Izračunajte sljedeće integrale a) $\int_{-3}^{-1} \frac{dx}{5x-7}$ b) $\int_{-3}^{-1} \frac{xdx}{5x-7}$ c) $\int_{-3}^{-1} \frac{3xdx}{5x^2+7}$ d) $\int_{-3}^{-1} \frac{3xdx}{x^2-5x+6}$.

13. Pokažite da funkcija $F(t) = \frac{1}{2}\ln\left(t^2+\sqrt{1+t^4}\right) + \text{arctg}3$ zadovoljava jednakost $F'(t) = f(t)$, pri čemu je $f(t) = \frac{t}{\sqrt{1+t^4}}$. Izračunajte a) $\int_{-1}^{2} f'(t)dt$ b) $\int_{-1}^{2} f(t)dt$ c) $\int_{-1}^{2} \frac{df(t)}{dt}dt$ d) $\frac{d}{dt}\int_{-1}^{t} F(x)dx$ za $t = 3$ e) $\frac{d}{dt}\int_{-1}^{3} F(t)dt$.

14. Zadana je funkcija $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{3x+1}} & ; x \in [0,3] \\ 0 & ; x \notin [0,3] \end{cases}$. Izračunajte $\int_{-2}^{5} f(x)dx$. Ako je $F(x) = \int_{1}^{x} f(t)dt$ izračunajte a) $F(-2)$, $F(2)$, $F(5)$ b) $\max F$, $\min F$ c) $F'(-2)$, $F'(2)$, $F'(5)$.

15. Izračunajte a) $\int_{0}^{\pi} \cos^4 x \sin x dx$ b) $\int_{0}^{\pi} \cos^4 x dx$.

16. Pokažite da je funkcija $F(x) = x + \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left(\frac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}}\right)^2 + \ln 7$ primitivna funkcija funkcije $f(x) = \frac{x^2}{x^2-2}$. Izračunajte a) $\int_{0}^{1} dF(x)$ b) $\int_{0}^{1} f(x)dx$ c) $\int_{0}^{1} f'(x)dx$ d) $\frac{d}{dx}\int_{0}^{1} F(x)dx$ e) $\frac{d}{dx}\int_{0}^{x} F(t)dt$ za $x = 1$.

17. Neka je $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{(2x+1)^2} & , x \in [0,3] \\ 0 & , x \notin [0,3] \end{cases}$. a) Izračunajte površinu područja između krivulje $y = f(x)$ i $x-$osi. b) Izračunajte $\int_{-4}^{4} f(x)dx$. Ako je $F(x) = \int_1^x f(t)dt$ izračunajte c) $F(-4)$ d) $F(0)$ e) $F(2)$ f) $F(4)$.

18. Provjerite da je $F(x) = \frac{1}{2}\ln\left(x^2 - 2x + 2\right) + \operatorname{arctg}(x-1) + \ln 7$ primitivna funkcija funkcije $f(x) = \frac{x}{x^2-2x+2}$. Izračunajte a) $\int_0^2 f(x)dx$ b) $\int_0^2 f'(x)dx$ c) $\frac{d^2}{dx^2}\left(\int_0^x F(t)dt\right)$ za $x = 2$ d) $\int_0^x \frac{d^2F(t)}{dt^2}dt$ za $x = 2$.

4 Primjena određenog integrala

1. Izračunajte površinu lika određenog krivuljama $y^2 = 6x$, $y^2 = 2(x+4)$.
2. Područje u ravnini zadano je s $1/4 \le e^{-4x} \le y \le 4$. Izračunajte volumen tijela nastalog rotacijom tog područja oko pravca a) $x = -1$ b) $x = 0$.
3. Izračunajte površinu lika u ravnini određenog krivuljama $y = x^2$, $y = x/\sqrt{3}$, $y = x$ koristeći Kartezijeve koordinate.
4. Lik u ravnini određen je krivuljama $y = e^{-3x}$, $y = e^x$, $y = 5$. Izračunajte volumen tijela nastalog rotacijom tog lika oko pravca a) $x = 0$ b) $y = -1$.
5. Izračunajte površinu lika u ravnini određenog krivuljama $y = e^{-x}$, $y = 2x + 1$, $y = 3$.
6. Izračunajte volumen tijela nastalog rotacijom područja zadanog s $x^2 - 2x \le y \le 3$ oko a) $x = 0$ b) $y = 0$ c) $y = -1$.
7. Izračunajte površinu lika određenog krivuljama $y^2 = x$, $y^2 = 4x$, $y = x/\sqrt{3}$ koristeći Kartezijeve koordinate.
8. Izračunajte volumen tijela nastalog rotacijom područja omeđenog krivuljama $xy = 1$, $2x + y = 3$ oko pravca a) $x = 0$ b) $y = -2$.
9. Lik u ravnini određen je nejednadžbama $x^2 + y^2 \le 4x$, $x \le y \le \frac{\sqrt{3}}{3}x$. a) Koristeći Kartezijeve koordinate odredite integralni izraz kojim izračunavamo površinu tog lika (ne trebate izračunavati integrale). b) Izračunajte površinu tog lika (ne nužno koristeći izraz pod a)).
10. Lik u ravnini zadan je krivuljama $y^2 = 2x$, $y = x^2$, $y = 8x^2$. Izračunajte volumen tijela nastalog rotacijom tog lika oko pravca $x = -1$ $(y = 5)$.
11. Lik u ravnini zadan je krivuljama $y = e^{-x}$, $y = 1 - e^{-x}$, $x = 0$. Izračunajte volumen tijela nastalog rotacijom tog lika oko a) $x = 0$ b) $y = -1$.
12. Izračunajte površinu lika određenog nejednadžbama $x \le y \le x\sqrt{3}$, $xy \le 2$, koristeći Kartezijeve koordinate.
13. Izračunajte $\int_0^2 \sqrt{1 + x^2}dx$. Tim integralom izračunavamo a) Površinu kojeg lika? b) Volumen kojeg rotacijskog tijela?
14. Izračunajte volumen tijela nastalog rotacijom lika određeno krivuljama $y = 2e^{-x}$, $y = 2e^{-2x}$, $y = 1$ oko pravca a) $y = 1$ b) $x = 0$.

15. Lik u ravnini određen je krivuljama $x^2 + y^2 = 6y$, $y = x\sqrt{3}$, $y = -x$. Koristeći integralni račun izračunajte mu površinu.

16. Lik u ravnini zadan je nejednadžbama $-3 \leq y \leq 2x - x^2$. Izračunajte volumen tijela nastalog rotacijom tog lika oko pravca a) $x = -5$ b) $y = -4$.

17. Izračunajte volumen tijela nastalog rotacijom područja $x^2 + y^2 \leq 6x$ oko pravca a) $x = 0$ b) $y = 0$.

18. Lik u ravnini određen je krivuljama $y = e^{-x} - 1$, $y = 2\left(e^{-x} - 1\right)$, $2y = -1$. Izračunajte mu površinu.

19. Lik u ravnini određen je krivuljama $y = x$, $y = x\sqrt{3}$, $x^2 + y^2 = 8y$. Izračunajte površinu toga lika koristeći Kartezijeve koordinate.

5 Obične diferencijalne jednadžbe

1. Gomperzov model rasta neke populacije vinskih mušica dan je diferencijalnom jednadžbom $\frac{dP}{dt} = 10^{-2}P\left(10 - \sqrt[5]{P}\right)$ ($P = P(t)$ broj vinskih mušica te populacije u trenutku t; t u danima). a) Odredite broj vinskih mušica nakon 4 dana ako su na početku promatranja bile 32 vinske mušice. b) Koji broj ta populacija vinskih mušica ne može premašiti?

2. Odredite integralne krivulje diferencijalnih jednadžbi a) $y' = x^6$ b) $y' = y^6$ c) $x^4 y' = y^4$ koje prolaze točkom $A(1, 2)$.

3. Brzina $v = v(t)$ tijela u nekom mediju određena je diferencijalnom jednadžbom $\frac{dv}{dt} = 3v - 3v^4$. Ako je brzina tog tijela na početku promatranja bila 20m/s, odredite koja će mu brzina biti nakon 3 sekunde.

4. Odredite integralne krivulje diferencijalne jednadžbe $xy' + 3y = 3y^2$ koje prolaze točkom a) $A(1, 1)$ b) $A(1, 0)$ c) $A(1, 2)$. Za svaku od tih integralnih krivulja izračunajte $\lim_{x\to\infty} y(x)$.

5. Odredite integralne krivulje diferencijalnih jednadžbi a) $(x^2 - 4x)y' = 12y + 5y'$ b) $(x^2 - 4x)y' = 12y + 5y' + \left(\frac{x-5}{x+1}\right)^3$ koje prolaze točkom $T_0(0, 25)$. Za svaku od tih krivulja izračunajte $y(4)$ i $\lim_{x\to\infty} y(x)$.

6. Brzina tijela $v = v(t)$ (t u sekundama) u nekom mediju određena je diferencijalnom jednadžbom $v' = -kv^6$ (k realni parametar koji karakterizira otpor medija). a) Odredite opće rješenje te diferencijalne jednadžbe. b) Ako brzina tog tijela sa 20m/s padne na 10m/s za 2 sekunde, koju će brzinu to tijelo imati nakon 5 sekundi kretanja?

7. Prema jednom zakonu hlađenja temperatura tekućine $T = T(t)$ u prostoriji u kojoj je 18°C opisana je diferencijalnom jednadžbom $T' = -10^{-3}(T - 18)^3$ (vrijeme t u minutama, temperatura T u °C). Odredite za kolko će se minuta kava sa 100°C ohladiti na 40°C.