8. Numeričko diferenciranje i integriranje

8.1. Numeričko diferenciranje

Neka je $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \in [a, b]$, $f \in C^{n+1}[a, b]$. Primjenom Lagrangeovog oblika interpolacijskog polinoma na funkciju f dobija se

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) p_n^k(x) + \frac{(x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_n)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi(x)).$$

Deriviranjem po x imamo

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sum_{k=0}^{n} f(x_k)(p_n^k(x))' + \frac{d}{dx}\left(\frac{(x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_n)}{(n+1)!}\right) f^{(n+1)}(\xi(x)) \\ &+ \frac{(x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_n)}{(n+1)!} \frac{d}{dx} f^{(n+1)}(\xi(x)). \end{aligned}$$

Posljedni sumand na desnoj strani je dio greške i ne može se ocjeniti za $x \notin \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$, tako da se izračunavanje derivacije funkcije f ne preporuča za $x \notin \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$.

Za $x = x_k$ zadnja formula postaje

$$f'(x_k) = \sum_{j=0}^{n} f(x_j)(p_n^j(x_k))' + \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!} \prod_{j=0,\, j \neq k}^{n} (x_k - x_j). \tag{8.1}$$

Promatrajmo formulu (8.1) u slučaju $n = 2$, tj. kada je funkcija f dana svojim vrijednostima u tri čvora x_0, x_1, x_2. Tada je

$$p_2^0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)}, \ (p_2^0(x))' = \frac{2x - x_1 - x_2}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)},$$

$$(p_2^1(x))' = \frac{2x - x_0 - x_2}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)}, \ (p_2^2(x))' = \frac{2x - x_0 - x_1}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}.$$

U ovom slučaju (8.1) postaje

$$\begin{aligned} f'(x_k) \;=\; & f(x_0)\frac{2x_k - x_1 - x_2}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + f(x_1)\frac{2x_k - x_0 - x_2}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} \\ + \; & f(x_2)\frac{2x_k - x_0 - x_2}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} + \frac{1}{6}f^{(3)}(\xi(x_k)) \prod_{j=0,\, j\neq k}^{2}(x_k - x_j). \end{aligned} \tag{8.2}$$

Zadržimo se na slučaju ekvidistantnih čvorova $x_0,\ x_1,\ x_2$ tj. neka je $x_1 = x_0 + h,\ x_2 = x_0 + 2h$. Iz formule (8.2) slijedi

$$f'(x_0) = \frac{1}{h}\left(-\frac{3}{2}f(x_0) + 2f(x_1) - \frac{1}{2}f(x_2)\right) + \frac{h^2}{3}f^{(3)}(\xi(x_0)) \tag{8.3}$$

$$f'(x_1) = f'(x_0+h) = \frac{1}{h}\left(-\frac{1}{2}f(x_0) + \frac{1}{2}f(x_2)\right) - \frac{h^2}{6}f^{(3)}(\xi(x_1)) \tag{8.4}$$

$$f'(x_2) = f'(x_0+2h) = \frac{1}{h}\left(\frac{1}{2}f(x_0) - 2f(x_1) + \frac{3}{2}f(x_2)\right) + \frac{h^2}{3}f^{(3)}(\xi(x_2)) \tag{8.5}$$

Ako se u formulama (8.4) i (8.5) $x_0 + h$, odnosno $x_0 + 2h$ zamjene s x_0 dobiju se sljedeće formule za izračunavanje približne vrijednosti od $f'(x_0)$ određene s tri točke:

$$f'(x_0) = \frac{1}{2h}\left(-3f(x_0) + 4f(x_0+h) - f(x_0+2h)\right) + \frac{h^2}{3}f^{(3)}(\xi(x_0)) \tag{8.6}$$

$$f'(x_0) = \frac{1}{2h}\left(f(x_0+h) - f(x_0-h)\right) - \frac{h^2}{6}f^{(3)}(\xi(x_0)) \tag{8.7}$$

$$f'(x_0) = \frac{1}{2h}\left(f(x_0-2h) - 4f(x_0-h) + 3f(x_0)\right) + \frac{h^2}{3}f^{(3)}(\xi(x_0)) \tag{8.8}$$

Primjetimo da se (8.8) može dobiti tako da se u (8.6) h zamjeni s $-h$, pa onda u biti imamo dvije formule određene s tri čvora i to su (8.6) i (8.7).

Slično prethodnom razmatranju može se izvesti formula za numeričko diferenciranje određena s četiri čvora:

$$f'(x_0) = \frac{1}{12h}\left(f(x_0-2h) - 8f(x_0-h) + 8f(x_0+h) - f(x_0+2h)\right) + \frac{h^2}{30}f^{(4)}(\xi(x_2)) \tag{8.9}$$

Primjer 8.1. *U sljedećoj tablici zadane su vrijednosti funkcije* $f(x) = xe^x$

x_i	1.8	1.9	2.0	2.1	2.2
$f(x_i)$	10.889365	12.703199	14.778112	17.148957	19.855030

. Aproksimirajte $f'(2.0)$ *koristeći formule za diferenciranje s tri i četiri točke i usporedite dobivene rezultate s vrijednošću* $f'(2.0) = 22.167168$.

Rješenje. Koristeći formulu (8.6) za $h = 0.1$ dobivamo

$$f'(2.0) \approx \frac{1}{0.2}(-3f(2.0) + 4f(2.1) - f(2.2)) = 22.032310,$$

a za $h = -0.1$

$$f'(2.0) \approx -\frac{1}{0.2}(-3f(2.0) + 4f(1.9) - f(1.8)) = 22.054525.$$

Primjenom formule (8.7) za $h = 0.1$ dobivamo

$$f'(2.0) \approx \frac{1}{0.2}(f(2.1) - f(1.9)) = 22.228790,$$

a za $h = 0.2$

$$f'(2.0) \approx \frac{1}{0.4}(f(2.2) - f(1.8)) = 22.414163.$$

Primjenom formule za diferenciranje određene s četiri točke za $h = 0.1$ dobija se

$$f'(2.0) \approx \frac{1}{1.2}(f(1.8) - 8f(1.9) + 8f(2.1) - f(2.2)) = 22.166999$$

i kao što se vidi ovo je najtočnija vrijednost.

Programska realizacija

```
<< NumericalCalculus`

ND[x * Exp[x], x, 2]
22.1672
```

Slika 8.1.

8.2. Numerička integracija (kvadraturne formule)

8.2.1. Općenito o integracijskim formulama

Zadana je funkcija $f : I \to \mathbf{R}$, gdje je I obično interval (može i beskonačan). Želimo izračunati određeni integral funkcije f na intervalu $[a, b]$,

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx.$$

U matematičkoj analizi smo problem rješavanja nalaženja određenog integrala rješavali pomoću Newton-Leibnitzove formule

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

gdje je $F'(x) = f(x)$ (F je primitivna funkcija od f). Kako u mnogim primjenama ne znamo $F(x)$ ili je $F(x)$ vrlo složena funkcija, to je potrebno aproksimirati vrijednost određenog integrala, pa su nam potrebne numeričke metode približnog izračunavanja određenih integrala.

Osnovna ideja numeričke integracije je izračunavanje $I(f)$ korištenjem vrijednosti funkcije f na nekom konačnom skupu točaka. Opća integracijska formula ima oblik

$$I(f) = I_m(f) + E_m(f),$$

pri čemu je $m+1$ broj korištenih točaka, $I_m(f)$ pripadna aproksimacija integrala, a $E_m(f)$ pritom napravljena greška. Aproksimacija $I_m(f)$ ima oblik

$$I_m(f) = \sum_{k=0}^{m} w_k f(x_k),$$

pri čemu je m neki unaprijed zadani prirodni broj. Koeficijenti x_k zovu se čvorovi integracije, a w_k težinski koeficijenti.

8.2.2. Newton-Cotesove formule

Neka je $n \geq 1$ i neka su $x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n$ ekvidistantni čvorovi, pri čemu je $h = \frac{x_n - x_0}{n}$. Neka je dana funkcija $f : [x_0, x_n] \mapsto \mathbf{R}$. Neka je

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

Lagrangeov interpolacijski polinom za podatke $(x_0, f(x_0)),\ (x_1, f(x_1)), \ldots, (x_n, f(x_n))$. Prirodno je staviti

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx \approx \int_{x_0}^{x_n} L_n(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \int_{x_0}^{x_n} \prod_{j=0,j\neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}\,dx = (x_n - x_0) \sum_{i=0}^{n} f(x_i) H_i, \tag{8.10}$$

i ovu formulu zovemo Newton-Cotesova formula, dok se $H_i,\ i = 0, 1, \ldots, n$, zovu Cotesovi koeficijenti i definirani su sa:

$$H_i = \frac{1}{x_n - x_0} \int_{x_0}^{x_n} \prod_{j=0,j\neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}\,dx,\ i = 0, 1, \ldots, n.$$

Transformirajući podintegralni izraz i uvodeći supstituciju $t = (x - x_0)/h$, što daje $dx = hdt = \frac{x_n - x_0}{n} dt$, lako se dobije

$$H_i = \frac{1}{n \cdot i! \cdot (n-i)! \cdot (-1)^{n-i}} \int_0^n \frac{t(t-1)\cdots(t-n)}{t-i} dt, \ i = 0, 1, \ldots n.$$

Primjetimo da Cotesovi koeficijenti ne ovise o čvorovima nego samo o broju čvorova i imaju ova dva svojstva:

$$\begin{aligned} &a) \ \sum_{i=0}^{n} H_i = 1, \\ &b) \ H_i = H_{n-i}, \ i = 0, 1, \ldots n. \end{aligned}$$

Simpsonova formula

Za $n = 2$ Cotesovi koeficijenti su

$$H_0 = \frac{1}{4} \int_0^2 \frac{(t-0)(t-1)(t-2)}{t-0} dt = \frac{1}{6},$$

$$H_1 = -\frac{1}{2} \int_0^2 t(t-2) \, dt = \frac{2}{3}, \ \ H_2 = \frac{1}{6}.$$

Uvrštavanjem u (8.10) dobiva se osnovna Simpsonova formula:

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x) \, dx \approx 2h \cdot \left[\frac{1}{6} f(x_0) + \frac{2}{3} f(x_1) + \frac{1}{6} f(x_2) \right] = \frac{h}{3} \left[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2) \right]. \tag{8.11}$$

Neka je dana funkcija $f : [a, b] \mapsto \mathbf{R}$ i $n \geq 1$. Dijeleći interval $[a, b]$ na $2n$ jednakih podintervala dobiju se čvorne točke: $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots x_{2i} < x_{2i+1} < x_{2i+2} < \cdots < x_{2n-2} < x_{2n-1} < x_{2n} = b$. Na svaki od pointervala $[x_{2i}, x_{2i+2}]$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$ primjenimo osnovnu Simpsonovu formulu (8.11). Dobije se:

$$\begin{aligned} I_{2n} &= \int_a^b f(x) \, dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} f(x) \, dx \approx \frac{h}{3} \sum_{i=0}^{n-1} \left[f(x_{2i}) + 4f(x_{2i+1}) + f(x_{2i+2}) \right] \\ &= \frac{b-a}{6n} \left[f(x_0) + f(x_{2n}) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_{2i}) + 4 \sum_{i=0}^{n-1} f(x_{2i+1}) \right]. \end{aligned} \tag{8.12}$$

Za procjenu greške za osnovni interval imamo:

Neka su dane točke $x_0 < x_1 = x_0+h < x_2 = x_0+2h$. Neka je dana funkcija $f : [x_0, x_2] \mapsto \mathbf{R}$ koja ima neprekidnu četvrtu derivaciju na intervalu $[x_0, x_2]$. Odredimo procjenu greške u aproksimaciji (v. 8.10):

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx \approx \int_{x_0}^{x_2} L_2(x)dx.$$

Odredimo Langrangeov interpolacijski polinom L_4 za čvorove $x_0,\ x_1,\ x_2,\ x_1,\ x_3$ koristeći Hermiteovu shemu, gdje je x_3 proizvoljna točka iz intervala $[x_0, x_2]$. Iz tablice podijeljenih razlika se dobije

$$\begin{aligned} L_4(x) &= f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) \\ &+ f[x_0, x_1, x_2, x_1](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \qquad (8.13) \\ &+ f[x_0, x_1, x_2, x_1, x_3](x - x_0)(x - x_1)^2(x - x_2). \end{aligned}$$

Primjetimo da prva tri sumanda u izrazu za L_4 daju izraz za $L_2(x)$. Osim toga je jasno da je $L_4(x_3) = f(x_3)$ što daje

$$\begin{aligned} f(x_3) - L_2(x_3) &= f[x_0, x_1, x_2, x_1](x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2) \\ &+ f[x_0, x_1, x_2, x_1, x_3](x_3 - x_0)(x_3 - x_1)^2(x_3 - x_2). \qquad (8.14) \end{aligned}$$

Lako se vidi da je

$$\int_{x_0}^{x_2}(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)dx_3 = 0, \quad \int_{x_0}^{x_2}(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)^2(x_3 - x_2)dx_3 = -\frac{4}{15}h^5,$$

(koristimo supstituciju $x_3 - x_1 = t$). Prisjetimo se sada svojstva podijeljenih razlika:

$$f[x_0, x_1, x_2, x_1, x_3] = \frac{f^{(4)}(c)}{4!},$$

za neki $c \in (x_0, x_2)$. Uvedimo još oznaku: $M_{4,0} = \max\{|f^{(4)}(x)| : x \in [x_0, x_2]\}$. Uvažavajući navedeno dobivamo:

$$\begin{aligned} \left|\int_{x_0}^{x_2}(f(x_3) - L_2(x_3))\, dx_3\right| &= \left|\int_{x_0}^{x_2}\frac{f^{(4)}(c)}{4!}(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)^2(x_3 - x_2)\, dx_3\right| \\ &\le \frac{M_{4,0}}{4!}\int_{x_0}^{x_2}\left|(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)^2(x_3 - x_2)\right|\, dx_3 = \frac{M_{4,0}}{4!}\frac{4}{15}h^5 = \frac{1}{90}h^5 M_{4,0} \qquad (8.15) \end{aligned}$$

Označimo sa $M_4 = \max\{|f^{(4)}(x)| : x \in [a, b]\}$ i koristeći procjenu (8.15) za ukupnu procjenu greške dobiva se:

$$\left|\int_a^b f(x)dx - I_{2n}\right| \leq \frac{h^5}{90}\sum_{i=0}^{n-1} M_{4,i} \leq \frac{h^5}{90} n M_4 = \frac{b-a}{180} M_4 h^4, \tag{8.16}$$

pri čemu je $M_{4,i} = \max\{|f^{(4)}(x)| : x \in [x_{2i}, x_{2i+2}]\},\ i = 0, ..., n-1$. Još smo koristili da je $h = \frac{b-a}{2n}$.

Primjer 8.2. *(a) Simpsonovom formulom za* $2n = 4$ *izračunajte približnu vrijednost integrala* $\int_1^2 \frac{\ln x}{x} dx$ *te odredite pravu grešku.*

(b) Na koliko podintervala treba podijeliti interval $[1, 2]$ *da bi greška bila manja od* 10^{-6}.

Rješenje. (a)

x_i	y_i
$x_0 = 1$	$y_0 = \frac{\ln x_0}{x_0} = 0$
$x_1 = 1.25$	$y_1 = \frac{\ln x_1}{x_1} = 0.178515$
$x_2 = 1.5$	$y_2 = \frac{\ln x_2}{x_2} = 0.270310$
$x_3 = 1.75$	$y_3 = \frac{\ln x_3}{x_3} = 0.319780$
$x_4 = 2$	$y_4 = \frac{\ln x_4}{x_4} = 0.346574$

pa imamo

$$\begin{aligned} I_4 &= \frac{2-1}{12}[y_0 + 4(y_1 + y_3) + 2 \cdot y_2 + y_4] \\ &= \frac{1}{2}[0 + 4 \cdot (0.178515 + 0.319780) + 2 \cdot 0.270310 + 0.346574] \\ &= 0.240031. \end{aligned}$$

Računamo

$$\int_1^2 \frac{\ln x}{x} dx = \left.\frac{\ln^2 x}{2}\right|_1^2 = \frac{\ln^2 2}{2} = 0.240226,$$

pa je prava greška

$$\left|\int_1^2 \frac{\ln x}{x} dx - I_4\right| = 0.1955 \cdot 10^{-3}.$$

(b) $f(x) = \frac{\ln x}{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{\ln x}{x^2} \Rightarrow f''(x) = -\frac{3}{x^3} + \frac{2\ln x}{x^3} \Rightarrow f'''(x) = \frac{11}{x^4} - \frac{6\ln x}{x^4} \Rightarrow f^{(4)}(x) = -\frac{50}{x^5} + \frac{24\ln x}{x^5} < 0$. Kako je sada $f^{(5)}(x) = \frac{274}{x^6} - \frac{120\ln x}{x^6} > 0$ imamo da je

$$M_4 = \max_{x\in[1,2]} |f^{(4)}(x)| = |f^{(4)}(1)| = 50.$$

Sada, iz

$$\frac{M_4 \cdot h^4}{180} \cdot (b-a) < 10^{-6},$$

imamo
$$\frac{50 \cdot h^4}{180} \cdot 1 < 10^{-6} \Rightarrow h < \sqrt[4]{\frac{18}{5} \cdot 10^{-6}} = 0.043,$$
pa je onda $\frac{1}{2n} < 0.043 \Rightarrow 2n > \frac{1}{0.043} = 22,95 \Rightarrow 2n = 24.$

Programska realizacija

1. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x^3}$
2. $\int\limits_1^2 x \ln x dx$
3. $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{1+x} dx$
4. $\int\limits_0^1 e^{-x^2} dx$

$$\texttt{NIntegrate}\left[\frac{1}{1+x^3}, \{x, 0, 1\}\right]$$

```
0.835649
```

Slika 8.2.

```
NIntegrate[x*Log[x], {x, 1, 2}]

0.636294
```

Slika 8.3.

$$\texttt{NIntegrate}\left[\frac{\texttt{Cos[x]}}{1+x}, \left\{x, 0, \frac{\texttt{Pi}}{2}\right\}\right]$$

```
0.673621
```

Slika 8.4.

```
NIntegrate[Exp[-x^2], {x, 0, 1}]

0.746824
```

Slika 8.5.

Zadaci za vježbu

1. Simpsonovom formulom s $2n = 4$ izračunajte $\int_0^{\pi} \frac{\sin 2x}{x} dx$. (rj. $I_4 = 1.4122$)
2. Simpsonovom formulom s $2n = 4$ izračunajte $\int_0^{1/2} \frac{\arcsin 2x}{x} dx$. (rj. $I_4 = 1.1026$)
3. Na koliko podintervala treba podijeliti interval integracije da bi Simpsonova formula za integral $\int_1^{e} \frac{\ln x}{x} dx$ dala procjenu bolju od 10^{-4}. Odredite pravu grešku u tom slučaju. (rj. $2n = 16$)
4. Simpsonovom metodom izračunajte vrijednost integrala $\int_0^1 \cos\frac{x}{2} \sin\frac{5x}{2} dx$ s procjenom boljom od 10^{-4}. Odredite pravu grešku u tom slučaju. (rj. $I_8 = 0.68575$)
5. Na koliko podintervala treba podijeliti interval integracije da bi Simpsonova formula za integral $\int_1^{2} \frac{\ln x}{x} dx$ dala procjenu bolju od 10^{-3}. Odredite pravu grešku u tom slučaju. (rj. $2n = 6$)
6. Simpsonovom formulom za $2n = 6$ odredite približnu vrijednost za $\int_0^{\pi} x \cos x dx$ te odredite pravu grešku. (rj $I_{10} = -1.99866$)
7. Izračunajte duljinu krivulje $y = \sin x$ na intervalu $[0, \pi]$ koristeći Simpsonovu metodu. Za korak integracije uzeti $h = \frac{\pi}{6}$. (rj. $s = 3.8144$)
8. Na koliko podintervala treba podijeliti interval integracije da bi se integral $\int_0^1 e^{x^2} dx$ izračunao s točnošću od 10^{-4}. Simpsonovom metodom izračunajte taj integral. (rj. $2n = 24$)
9. Simpsonovom metodom izračunajte vrijednost integrala $\int_{\pi/6}^{1} x|\cos(3x)|dx$ s točnošću 10^{-4}. (rj. $2n = 4$)
10. Polazeći od integrala $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$ približno izračunajte broj π. Koristite Simpsonovu metodu a za korak integracije uzeti $h = 0.1$. Ulazne podatke i međuračune provoditi zaokruživanjem na petom decimalnom mjestu.

11. S točnošću do 10^{-4} izračunajte $\int_0^1 \frac{xdx}{x+1}$, koristeći Simpsonovu metodu. Pomoću dobivenog rezultata odredite približnu vrijednost za $\ln 2$. (rj. $I_{12} = 0.3068$)

12. S točnošću do 10^{-2} izračunajte $\int_0^1 e^{x^2+1}dx$, koristeći Simpsonovu metodu. (rj. $I_{10} = 3.95599$)

13. Izračunajte površinu kruga ograničenog krivuljom $x^2+y^2 = 32$, koristeći Simpsonovu formulu za $n = 4$. Izračunajte pravu grešku. (rj. $P = 24.96951$)

14. S točnošću od $0.5 \cdot 10^{-5}$ izračunajte $\int_0^{0.8} \cos \frac{\pi x}{2} dx$ koristeći Simpsonovu metodu. (rj. $I_8 = 0.60546$)

15. Primjenom Simpsonove metode na integral $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ približno izračunajte broj π s točnošću do 0.01.

16. Primjenom Simpsonove metode s točnošću $\varepsilon = 10^{-5}$ izračunajte površinu kruga između krivulja $y = \cos x$ i $y = e^x$ $(0 \leq x \leq \pi/2)$. (rj. $P = 2.80665$)

17. Simpsonovom metodom s $2n = 4$ izračunajte integral $\displaystyle\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x} dx$. (rj. $I_4 = 0.91597$)

18. Primjenom Simpsonove formule na integral $\int_0^\pi x \sin x dx$ odredite približnu vrijednost broja π s točnošću većom od 10^{-3}.

19. Simpsonovom metodom s $h = 0.2$ izračunajte volumen tijela dobivenog rotacijom krivulje $y = \sin x,\ 0 \leq x \leq 0.8$ oko osi x. (rj. $V = 0.471$)

20. Primjenom Simpsonove formule izračunajte integral $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\sin x}{x} dx$ s točnošću 10^{-3}. (rj $I_2 = 0.611696$)

21. S točnošću od $0.5 \cdot 10^{-3}$ izračunajte $\int_0^{\pi/2} x \cos x dx$ koristeći Simpsonovu metodu i odredite približnu vrijednost broja π. (rj. $I_6 = 0.57085$)

22. Simpsonovom formulom s greškom manjom od $0,5 \cdot 10^{-4}$ izračnajte integral $\int_0^1 (2x - \ln(2x+1))dx$. (rj. $I_{12} = 0.35209$)

23. S točnošću do 10^{-4} izračunajte $\int_0^1 \frac{xdx}{x+2}$ koristeći Simpsonovu metodu. Pomoću dobivenog rezultata odredite približnu vrijednost za $\ln \frac{3}{2}$. (rj. $I_4 = 0.18906$)

24. Simpsonovom metodom izračunajte vrijednost integrala $\int_4^{12} |\ln x - 2| dx$ s točnošću 10^{-2}. (rj. $I_6 = 2.16083$)