9. Analitičke metode za približno rješavanje običnih diferencijalnih jednadžbi

9.1. Uvod

Rješavanje diferencijalnih jednadžbi je problem koji se često javlja u raznim primjenama. Dok je nekim diferencijalnim jednadžbama rješenje moguće točno eksplicitno izraziti, daleko su brojnije one diferencijalne jednadžbe za koje ne možemo dobiti točno rješenje. Stoga za takve diferencijalne jednadžbe tražimo približno rješenje.

Promatrajmo za početak diferencijalnu jednadžbu prvog reda

$$y' = f(x, y). \tag{9.1}$$

Osnovni problem vezan za (9.1) je rješenje Cauchyjevog problema tj. treba odrediti rješenje diferencijalne jednadžbe (9.1) koje zadovoljava dani početni uvjet $y = y_0$ za $x = x_0$. Drugim riječima treba naći integralnu krivulju koja prolazi zadanom točkom $M_0(x_0, y_0)$.

9.2. Taylorova metoda

Taylorova metoda spada u grupu približnih metoda za rješavanje Cauchyjevog problema (9.1), koji daje rješenje u analitičkom obliku.

Taylorov razvoj funkcije $y(x)$ u točki x_0 je

$$y(x) = y(x_0) + (x - x_0)y'(x_0) + \frac{1}{2!}(x - x_0)^2 y''(x_0) + \cdots \tag{9.2}$$

Koristeći zadani početni uvjet možemo izračunati potrebne derivacije $y^{(i)}(x_0)$ ($i = 1, 2, \ldots$). Naime, imamo redom

$$y(x_0) = y_0,$$

$$\begin{aligned} y'(x_0) &= f(x_0, y_0), \\ y''(x_0) &= \left[\frac{\partial f}{\partial x} + y'\frac{\partial f}{\partial y}\right]_{x=x_0, y=y_0} = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} + f(x_0, y_0)\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}, \quad \text{itd} \end{aligned}$$

Primjer 9.1. *Za problem $y' = x^2 + y^2$, $y(0) = 1$, sukcesivnim deriviranjem dobivamo*

$$\begin{array}{llll} y' &= x^2 + y^2, & y_0' &= x_0^2 + y_0^2 = 1, \\ y'' &= 2x + 2yy', & y_0'' &= 2x_0 + 2y_0y_0' = 2, \\ y''' &= 2 + 2yy'' + 2y'^2, & y_0''' &= 2 + 2y_0y_0'' + 2y'^2_0 = 8, \\ y^{iv} &= 2yy''' + 6y'y'', & y_0^{iv} &= 2y_0y_0''' + 6y_0'y_0'' = 28, \end{array}$$

gdje je $y_0^{(i)} = y^{(i)}(x_0)$. Uvrštavanjem u (9.2) imamo

$$y(x) = 1 + x + 2\frac{x^2}{2!} + 8\frac{x^3}{3!} + 28\frac{x^4}{4!} + \cdots = 1 + x + x^2 + \frac{4}{3}x^3 + \frac{7}{6}x^4 + \cdots$$

9.3. Metoda neodređenih koeficijenata

Za razliku od Taylorove metode, ovdje rješenje problema (9.1) tražimo u obliku

$$y(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots, \tag{9.3}$$

gdje nepoznate koeficijente a_k $(k = 0, 1, \ldots)$ određujemo iz (9.1) i zadanog početnog uvjeta. Očito je da je $a_0 = y_0$.

Primjer 9.2. *Metodom neodređenih koeficijenata riješimo Primjer 9.1.. Kako je $x_0 = 0$ i $y_0 = 1$ imamo*

$$y(x) = 1 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \cdots$$

i

$$y'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + \cdots,$$

pa uvrštavanjem u jedndžbu dobivamo

$$a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + \cdots = x^2 + (1 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \cdots)^2,$$

tj.

$$(a_1 - 1) + (2a_2 - 2a_1)x + (3a_3 - 1 - 2a_2 - a_1^2)x^2 + (4a_4 - 2a_3 - 2a_1a_2)x^3 + \cdots = 0.$$

Iz zadnje jednakosti slijedi

$$a_1 = 1,\ a_2 = a_1 = 1,\ a_3 = \frac{1}{3}(1 + 2a_2 + a_1^2) = \frac{4}{3},\ a_4 = \frac{1}{4}(2a_3 + 2a_1a_2) = \frac{7}{6},\ \textit{itd.}$$

Dakle,

$$y(x) = 1 + x + x^2 + \frac{4}{3}x^3 + \frac{7}{6}x^4 + \cdots$$

9.4. Picardova metoda (metoda sukcesivne aproksimacije)

Pođimo od gore opisanog Cauchyjevog problema

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0. \tag{9.4}$$

Potražit ćemo rješenje za $x \geq x_0$, dok je za $x \leq x_0$ situacija potpuno analogna. Integracijom lijeve i desne strane od (9.4) u granicama od x_0 do x dobivamo

$$y(x) - y(x_0) = \int\limits_{x_0}^{x} f[x, y(x)]dx$$

ili iz početnog uvjeta

$$y(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f[x, y(x)]dx. \tag{9.5}$$

Kako se tražena funkcija $x \to y(x)$ nalazi pod znakom integrala to je (9.5) integralna jednadžba čije rješenje očigledno zadovoljava promatrani Cauchyjev problem (9.4).

Picardova se metoda sada sastoji u sljedećem. U (9.5) zamijenimo nepoznanicu y sa zadanom vrijednošću y_0 na koji način postižemo prvu aproksimaciju koja glasi

$$y_1(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(x, y_0)dx. \tag{9.6}$$

Ako postupak ponovimo, tj. ako u (9.5) uvrstimo nađenu aproksimaciju (9.6) dobivamo drugo aproksimaciju

$$y_2(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f[x, y_1(x)]dx. \tag{9.7}$$

Nastavivši postupak sa novodobivenom aproksimacijom imamo induktivno sljedeću formulu za n-tu aproksimaciju

$$y_n(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f[x, y_{n-1}(x)]dx, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{9.8}$$

U dokazu Picardovog teorema se pokazuje da na nekom segmentu $[x_0, x_0 + h]$ niz (9.8) konvergira funkciji

$$y(x) = \lim_{n \to \infty} y_n(x) \tag{9.9}$$

koja predstavlja jedinstveno rješenje Cauchyjevog problema (9.4). Taj dokaz izostavljamo i prihvaćamo rezultat kao poznat.

Primjer 9.3. *Picardovom metodom u tri koraka približno riješite diferencijalnu jednadžbu $y' = e^{-x} - y$ za početne uvjete $x_0 = 0,\ y_0 = 0$. Izračunajte pravu grešku u točki $x = 0.2$.*

Rješenje. Kako je $y_0 = 0$ imamo

$$y_1(x) = 0 + \int_0^x (e^{-x} - 0)dx = -e^{-x} + 1.$$

Analogno

$$y_2(x) = \int_0^x (e^{-x} + e^{-x} - 1)dx = -2e^{-x} + 2 - x,$$

$$y_3(x) = \int_0^x (e^{-x} + 2e^{-x} - 2 + x)dx = -3e^{-x} + 3 - 2x + \frac{x^2}{2},$$

pa je $y_3(0.2) = 0.16381$.

Da bi odredili točnu vrijednost funkcije u točki $x = 0.2$ prvo moramo riješiti diferencijalnu jednadžbu. To je linearna diferencijalna jednadžba pa iz $y' + y = 0$ imamo $y = C(x)e^{-x}$, što daje $y' = C'(x)e^{-x} - C(x)e^{-x}$ pa kad to uvrstimo u jednadžbu $y' + y = e^{-x}$ dobivamo $y = (x + C)e^{-x}$. Iz početnog uvjeta $y(0) = 0$ dobivamo $C = 0$ pa je rješenje diferencijalne jednadžbe $y(x) = xe^{-x}$. Prava je greška sada:

$$|y(0.2) - y_3(0.2)| = |0.16375 - 0.16381| = 0.6 \cdot 10^{-4}.$$

Programska realizacija

```
n = 3; x0 = 0; y0 = 0; f[x_, y_] := e^-x - y; yp = y0;
For[i = 1, i ≤ n, i = i + 1,
  {yr = y0 + ∫_x0^x f[x, yp] dx, Print[yr], yp = yr}]

1 - e^-x

2 - 2 e^-x - x

3 - 3 e^-x - 2 x + x^2/2
```

Slika 9.1.

Zadaci za vježbu

1. Picardovom metodom nađite približno rješenje diferencijalne jednadžbe $y' = x - y,\ y(0) = 1$. (rj. $y_1(x) = 1 - x + \frac{x^2}{2},\ y_2(x) = 1 - x + x^2 - \frac{x^3}{6}$)