10. Linearne diferencijalne jednadžbe i Laplaceova transformacija

10.1. Pojam funkcionalnih reprezentacija

Neka je na intervalu (a, b) formulom $x \to f(x)$ zadana funkcija f. Pod integralnom transformacijom funkcije f podrazumijevamo funkciju

$$F(p) = \int_a^b K(x,p) f(x) dx, \tag{10.1}$$

gdje je K za danu transformaciju fiksirana funkcija, a $a, b \in \mathbf{R}$.

Funkcija K se naziva jezgrom transformacije, f je original, a F slika transformacije.

Funkcija

$$p \to F(p) \tag{10.2}$$

bitno ovisi o funkciji K. Naime, njena realnost odnosno kompleksnost implicirana je funkcijom K.

10.2. Definicija Laplaceove transformacije

Ako u definiciji integralne transformacije uzmemo $K(t, p) = e^{-pt}$, $a = 0$ i $b = +\infty$ dobivamo jednu od najvažnijih integralnih transformacija tzv. Laplaceovu transformaciju.

Ako za funkciju $f : [0, +\infty) \to \mathbf{R}$ integral

$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt \tag{10.3}$$

konvergira, onda se dobiva funkcija $p \to F(p)$ koja se zove Laplaceov transformat funkcije f i piše se

$$F = \mathcal{L}(f), \tag{10.4}$$

tj. točnije

$$F(p) = [\mathcal{L}(f)](p). \tag{10.5}$$

Isto tako, često se radi jasnijeg razumijevanja umjesto (10.4) piše $F = \mathcal{L}(f(t))$.

Funkcija

$$f \to F \tag{10.6}$$

definirana formulom (10.3) zove se Laplaceova ili $\mathcal{L}$-transformacija.

Za funkcije f i F nalaze se u literaturi razni nazivi; tako npr. funkcija f koja se podvrgava Laplaceovoj transformaciji zove se *gornja funkcija* ili objekt ili original. Funkcija F koja je rezultat Laplaceove transformacije zove se *donja funkcija* ili slika ili transformat.

Skup funkcija $f : [0, +\infty) \to \mathbf{R}$ koje se mogu podvrgnuti $\mathcal{L}$ transformaciji čine *gornje*, a skup dobivenih funkcija F *donje* područje Laplaceove transformacije.

Primjer 10.1. *Neka je* $f(t) = a, \ \forall t > 0$. *Nađite* $\mathcal{L}(f)$.

Rješenje.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(f) &= \mathcal{L}(a) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} \cdot a dt = a \int_0^{+\infty} e^{-pt} dt = a \lim_{\beta \to +\infty} \int_0^{\beta} e^{-pt} dt \\ &= \lim_{\beta \to +\infty} \left(-\frac{a}{p} e^{-pt} \Big|_0^{\beta} \right) = \begin{cases} \frac{a}{p} & \text{ako je } p > 0 \\ \infty & \text{ako je } p < 0 \end{cases}, \end{aligned}$$

tj. $\mathcal{L}(a) = \frac{a}{p}, \quad \forall p > 0$.

Primjer 10.2. *Neka je* $f(t) = e^{at}, \ \forall t \geq 0$, *a konstanta. Nađite* $\mathcal{L}(f)$.

Rješenje.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(e^{at}) &= \int_0^{+\infty} e^{-pt} e^{at} dt = \int_0^{+\infty} e^{-(p-a)t} dt = \lim_{\beta \to +\infty} \int_0^{\beta} e^{-(p-a)t} dt \\ &= \lim_{\beta \to +\infty} \left(-\frac{1}{p-a} e^{-(p-a)t} \Big|_0^{\beta} \right) = \frac{1}{p-a}, \quad p > a. \end{aligned}$$

Programska realizacija

```
LaplaceTransform[a, t, p]
```

$\frac{a}{p}$

```
LaplaceTransform[e^(a*t), t, p]
```

$\frac{1}{-a+p}$

Slika 10.1.

10.3. Invertiranje Laplaceove transformacije

Problem invertiranja Laplaceove transformacije je pitanje vezano za funkciju

$$\mathcal{L}^{-1} : F \to f. \tag{10.7}$$

Za funkciju $f : [0, +\infty) \to \mathbf{R}$ kažemo da je eksponencijalnog rasta, ako postoje konstante $M > 0$ i $s > 0$, tako da je

$$|f(t)| \leq M \cdot e^{st}, \quad \forall t > 0. \tag{10.8}$$

Infimum brojejeva $s > 0$ za koje postoji $M > 0$, tako da je $|f(t) \leq M \cdot e^{st}, \quad \forall t > 0$ zovemo red eksponencijalnog rasta i označavamo ga sa s_0.

Ako je funkcija $f : [0, +\infty) \to \mathbf{R}$ neprekidna i ako je ona eksponencijalnog rasta reda s_0, onda se može pokazati, da $\mathcal{L}(f) = 0$ povlači, da je $f = 0$. Ovo ima za posljedicu da je preslikavanje $f \to \mathcal{L}(f) = F$ injektivno bar na skupu neprekidnih funkcija eksponencijalnog rasta, pa dakle na tom skupu postoji inverzna transformacija

$$\mathcal{L}^{-1} : F \to f = \mathcal{L}^{-1}(F), \tag{10.9}$$

odnosno točnije

$$f(t) = [\mathcal{L}^{-1}(F)](t). \tag{10.10}$$

Iz formule (10.3) jednostavno proizlazi, da je problem inverzije ustvari problem rješavanja integralne jednadžbe

$$\int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt = F(p),$$

gdje se najčešće susrećemo s pitanjem stabilnosti funkcije f.

Teorem o diferenciranju transformata: Neka je $[\mathcal{L}(f)](p) = F(p)$. Tada vrijedi

$$[\mathcal{L}(t^n f(t))](p) = (-1)^n F^{(n)}(p).$$

Primjer 10.3. *Nađite $\mathcal{L}(t^n f(t))$ ako je a) $f(t) = a$, b) $f(t) = e^{at}$.*

Rješenje. a) Kako je $\mathcal{L}(a) = \frac{a}{p}$ imamo $\mathcal{L}(t^n a) = (-1)^n \frac{d^n}{dp^n}\left(\frac{a}{p}\right) = \frac{a \cdot n!}{p^{n+1}}$.

b) $\mathcal{L}(e^{at}) = \frac{1}{p-a} \Rightarrow \mathcal{L}(t^n e^{at}) = (-1)^n \frac{d^n}{dp^n}\left(\frac{1}{p-a}\right) = \frac{n!}{(p-a)^{n+1}}$.

Teorem o integriranju transformata: Neka je $[\mathcal{L}(f)](p) = F(p)$. Tada vrijedi

$$\left[\mathcal{L}\left(\frac{f(t)}{t}\right)\right](p) = \int_p^{+\infty} F(p)dp.$$

Primjer 10.4. *Ako je $[\mathcal{L}(\sin t)](p) = \frac{1}{p^2+1}$, nađite $\mathcal{L}$-transformat funkcije $f(t) = \frac{\sin t}{t}$.*

Rješenje.

$$\mathcal{L}\left(\frac{\sin t}{t}\right) = \int_p^{+\infty} \frac{dp}{p^2+1} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} p = \operatorname{arcctg} p.$$

Teorem o homotetiji (sličnosti): Neka je $a \in \mathbf{R}^+$ i neka je $[\mathcal{L}(f)](p) = F(p)$. Tada vrijedi

$$\mathcal{L}\left(f(at)\right)(p) = \frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right).$$

Primjer 10.5. *Odredite $[\mathcal{L}(\sin wt)](p)$ za $w > 0$.*

Rješenje. Kako je $[\mathcal{L}(\sin t)](p) = \frac{1}{p^2+1}$, imamo

$$[\mathcal{L}(\sin wt)](p) = \frac{1}{w} \frac{1}{\left(\frac{p}{w}\right)^2 + 1} = \frac{w}{p^2 + w^2}.$$

Teorem o pomaku: Neka je $[\mathcal{L}(f)](p) = F(p)$ i neka je funkcija f definirana za $p > s_0$. Tada vrijedi

$$\left[\mathcal{L}\left(e^{at} f(t)\right)\right](p) = F\left(p - a\right), \quad \forall p > s_0 + a.$$

Teorem o prigušenju: Ako je $a > 0$ i ako je $[\mathcal{L}(f)](p) = F(p)$, tada vrijedi

$$\left[\mathcal{L}\left(e^{-at} f(t)\right)\right](p) = F\left(p + a\right).$$

Primjer 10.6. *Nađite* $\mathcal{L}(e^{at}f(t))$*, ako je* $f(t) = \sin wt$.

Rješenje. Kako je $[\mathcal{L}(\sin wt)](p) = \frac{w}{p^2+w^2}$, tada je $[\mathcal{L}(e^{at}\sin wt)](p) = \frac{w}{(p-a)^2+w^2}$, $\forall p > a$.

Primjer 10.7. *Koristeći činjenicu da je* $\mathcal{L}$ *linearni operator nađite* $[\mathcal{L}(f(t))](p)$*, ako je* $f(t) = 3t^3e^{-t} + 2t^2 - 1$.

Rješenje.

$$\mathcal{L}(3t^3e^{-t}+2t^2-1) = 3\mathcal{L}(t^3e^{-t})+2\mathcal{L}(t^2)-\mathcal{L}(1) = 3\frac{3!}{(p+1)^4}+2\frac{2!}{p^3}-\frac{1}{p} = \frac{18}{(p+1)^4}+\frac{4}{p^3}-\frac{1}{p}.$$

Teorem o diferenciranju originala: Neka je funkcija $f : [0,+\infty) \to \mathbf{R}$ eksponencijalnog rasta reda s_0 i neka na $(0,+\infty)$ ima neprekidnu prvu derivaciju. Za $p > s_0$ Laplaceov transformat od f' postoji i on je

$$\mathcal{L}\left(f'(t)\right) = p\mathcal{L}(f) - f(0), \quad \forall p > s_0.$$

Matematičkom se indukcijom lako pokazuje da je

$$\mathcal{L}\left(f^{(n)}(t)\right) = p^n\mathcal{L}(f) - p^{n-1}f(0) - p^{n-2}f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0), \quad \forall p > s_0.$$

Primjer 10.8. *Koristeći teorem o diferenciranju originala nađite Laplaceov transformat funkcije* $\sin t$.

Rješenje.

$$\begin{aligned}
[\mathcal{L}(f(t))](p) &= [\mathcal{L}(\sin t)](p) = F(p),\\
[\mathcal{L}(f'(t))](p) &= [\mathcal{L}(\cos t)](p) = pF(p),\\
[\mathcal{L}(f''(t))](p) &= [\mathcal{L}(-\sin t)](p) = p^2F(p) - 1
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow -[\mathcal{L}(\sin t)](p) = p^2F(p) - 1 \Rightarrow -[\mathcal{L}(\sin t)](p) = p^2[\mathcal{L}(\sin t)](p) - 1$$

$$\Rightarrow [\mathcal{L}(\sin t)](p) = \frac{1}{p^2+1}.$$

Teorem o integriranju originala: Neka je $f : [0,+\infty) \to \mathbf{R}$ lokalno integrabilna funkcija eksponencijalnog rasta reda s_0. Tada funkcija

$$t \to g(t) = \int_0^t f(\tau)d\tau$$

ima Laplaceov transformat i vrijedi

$$\left[\mathcal{L}\left(\int_0^t f(\tau)d\tau\right)\right](p) = \frac{1}{p}[\mathcal{L}(f)](p), \quad \forall p > s_0 > 0.$$

Primjer 10.9. *Nađite Laplaceov transformat funkcije* $g(t) = \int_0^t \sin\tau d\tau$.

Rješenje.

$$\left[\mathcal{L}\left(\int_0^t \sin\tau d\tau\right)\right](p) = \frac{1}{p}\frac{1}{p^2+1} = \frac{1}{p(p^2+1)}.$$

Primjer 10.10. *Koristeći formule nastanka Laplaceovih transformata nađite original* $t \to f(t)$ *ako je* $F(p) = \frac{3p-1}{p^2-4p+7}$.

Rješenje.

$$\begin{aligned} F(p) &= \frac{3(p-2)+5}{(p-2)^2+3} = 3\frac{p-2}{(p-2)^2+3} + 5\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{3}}{(p-2)^2+3} \\ &\Rightarrow f(t) = 3e^{2t}\cos\sqrt{3}t + \frac{5}{\sqrt{3}}e^{2t}\sin\sqrt{3}t. \end{aligned}$$

Primjer 10.11. *Koristeći tablicu Laplaceovih transformata trigonometrijskih funkcija nađite original* $t \to f(t)$ *ako je* $F(p) = \frac{3p}{(p^2+1)^2}$.

Rješenje. Na osnovu teorema o $\mathcal{L}$-transformatu produkta $t \to t\sin t$ i formule $\mathcal{L}(\sin t) = \frac{1}{p^2+1}$ imamo da je

$$[\mathcal{L}(t\sin t)](p) = -\left(\frac{1}{p^2+1}\right)' = \frac{2p}{(p^2+1)^2}.$$

Dakle je

$$f(t) = \frac{3}{2}t\sin t.$$

Teorem o produktu: Neka su $[\mathcal{L}(f_1)](p) = F_1(p)$ i $[\mathcal{L}(f_2)](p) = F_2(p)$. Tada je

$$[\mathcal{L}(f)](p) = F_1(p)F_2(p),$$

gdje je $f(t) = \int_0^t f_1(u)f_2(t-u)du$.

Primjer 10.12. *Nađite original ako je* $F(p) = \frac{1}{(p^2+w^2)^2}$.

Rješenje. Budući je $\left[\mathcal{L}\left(\frac{1}{w}\sin wt\right)\right](p) = \frac{1}{p^2+w^2}$, to za zadanu funkciju možemo pisati

$$\begin{aligned} f(t) &= \int_0^t \frac{1}{w}\sin wu \cdot \frac{1}{w}\sin w(t-u)du = \frac{1}{2w^2}\int_0^t [\cos w(2u-t) - \cos wt]du \\ &= \frac{1}{2w^3}(\sin wt - wt\cos wt). \end{aligned}$$

Programska realizacija

```
InverseLaplaceTransform[(3 p - 1)/(p^2 - 4 p + 7), p, t]

1/3 e^(2 t) (9 Cos[√3 t] + 5 √3 Sin[√3 t])

InverseLaplaceTransform[3 p/(p^2 + 1)^2, p, t]

3/2 t Sin[t]

InverseLaplaceTransform[1/(p^2 + w^2)^2, p, t]

(-t w Cos[t w] + Sin[t w])/(2 w^3)
```

Slika 10.2.

Tablica $\mathcal{L}$-transformacije

$f(t)$	$F(p) = [\mathcal{L}(f)](p)$
a	$\frac{a}{p}$
e^{at}	$\frac{1}{p-a}$
$t^n,\ n \in \mathbf{N}$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
$\sin wt$	$\frac{w}{p^2+w^2}$
$\cos wt$	$\frac{p}{p^2+w^2}$
$e^{\pm at}\sin wt$	$\frac{w}{(p\mp a)^2+w^2}$
$e^{\pm at}\cos wt$	$\frac{p\mp a}{(p\mp a)^2+w^2}$

10.4. Rješavanje linearnih diferencijalnih jednadžbi s konstantnim koeficijentima

Jedna od osnovnih primjena Laplaceove transformacije je kod rješavanje diferencijalnih jednadžbi.

Pretpostavimo da funkcija $t \to x(t)$ sa svojim derivacijama $x', x'', \ldots, x^{(n-1)}, x^{(n)}$ zadovoljava uvjete, da može biti Laplaceov original. Neka je f $\mathcal{L}$-original. Želimo odrediti rješenje diferencijalne jednadžbe

$$x^{(n)}(t) + a_1 x^{(n-1)}(t) + \cdots + a_{n-1}x'(t) + a_n x(t) = f(t), \quad a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbf{R} \tag{10.11}$$

koje zadovoljava početne uvjete

$$x(0) = x_0,\ x'(0) = x_0', \ldots, x^{(n-1)}(0) = x_0^{(n-1)}, \quad x_0, x_0', x_0'', \ldots, x_0^{(n-1)} \in \mathbf{R}.$$

Neka je $[\mathcal{L}(x)](p) = X(p)$ i $[\mathcal{L}(f)](p) = F(p)$. Tada na osnovu Teorema o diferenciranju originala imamo

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(x') &= pX - x_0 \\
\mathcal{L}(x'') &= p^2X - px_0 - x_0' \\
\cdots\cdots &\quad \cdots\cdots \\
\mathcal{L}(x^{(n-1)}) &= p^{n-1}X - p^{n-2}x_0 - \cdots - x_0^{(n-2)} \\
\mathcal{L}(x^{(n)}) &= p^nX - p^{n-1}x_0 - \cdots - x_0^{(n-1)}
\end{aligned}$$

Budući da je Laplaceova operacija linearan operator, na osnovi prethodnih jednakosti možemo naći Laplaceov transformat jednadžbe (10.11). Dakle imamo

$$\begin{gathered}
p^nX - p^{n-1}x_0 - \cdots - x_0^{(n-1)} + a_1(p^{n-1}X - p^{n-2}x_0 - \cdots - x_0^{(n-2)}) + \\
\cdots + a_{n-1}(pX - x_0) + a_nX = F(p),
\end{gathered}$$

odnosno nakon sređivanja

$$Q_n(p)X = F(p) + P_{n-1}(p)$$

gdje su $Q_n(p)$ i $P_{n-1}(p)$ polimoni stupnja n i $n-1$.

Iz posljedne jednakosti imamo

$$X(p) = \frac{F(p) + P_{n-1}(p)}{Q_n(p)}. \tag{10.12}$$

Formula (10.12) je Laplaceov transformat nepoznatog rješenja $x(t)$ koje zadovoljava zadane početne uvjete.

Izvršimo li invertiranje formule (10.12) dobivamo funkciju $x(t)$, tj. traženo rješenje zadane linerane diferencijalne jednadžbe n-tog reda s konstantnim koeficijentima.

Primjer 10.13. *Odredite rješenje diferencijalne jednadžbe* $x'''(t) + 4x'(t) = 1$ *uz početne uvjete* $x(0) = x'(0) = x''(0) = 0$.

Rješenje. $[\mathcal{L}(x)](p) = X(p)$ i $[\mathcal{L}(f)](p) = F(p)$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(x') &= pX - x(0) = pX \\
\mathcal{L}(x'') &= p^2X - px(0) - x'(0) = p^2X \\
\mathcal{L}(x''') &= p^3X - p^2x(0) - px'(0) - x''(0) = p^3X,
\end{aligned}$$

$$\mathcal{L}(1) = \frac{1}{p} \Rightarrow p^3X + 4pX = \frac{1}{p} \Rightarrow X = \frac{1}{p(p^3+4p)} = \frac{1}{4}\frac{1}{p^2} - \frac{1}{4}\frac{1}{p^2+4}$$

$$\Rightarrow [\mathcal{L}^{-1}(x)](t) = x(t) = \frac{t}{4} - \frac{1}{8}\sin 2t.$$

Primjer 10.14. *Odredite rješenje diferencijalne jednadžbe* $x''(t) - 3x'(t) + 2x(t) = te^t$ *uz početne uvjete* $x(0) = 1, x'(0) = -2$.

Rješenje. $[\mathcal{L}(x)](p) = X(p)$ i $[\mathcal{L}(f)](p) = F(p)$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(x') &= pX - x(0) = pX - 1 \\
\mathcal{L}(x'') &= p^2X - px(0) - x'(0) = p^2X - p + 2
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow p^2X - p + 2 - 3pX + 3 + 2X = \frac{1}{(p-1)^2}$$

$$\Rightarrow X = \frac{p^3 - 7p^2 + 11p - 4}{(p-1)^3(p-2)} = -\frac{1}{(p-1)^3} - \frac{1}{(p-1)^2} + \frac{3}{p-1} - \frac{2}{p-2}$$

$$\Rightarrow x(t) = -\frac{t^2}{2}e^t - te^t + 3e^t - 2e^{2t}.$$

Primjer 10.15. *Nađite opće rješenje diferencijalne jednadžbe* $x''(t) + 2x'(t) + 10x(t) = 2e^{-t}\cos 3t$.

Rješenje. U ovom slučaju za početne uvjete uzimamo proizvoljne konstante c_1 i c_2, tj. pišemo da je $x(0) = c_1$ i $x'(0) = c_2$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(x') &= pX - x(0) = pX - c_1 \\
\mathcal{L}(x'') &= p^2X - px(0) - x'(0) = p^2X - pc_1 - c_2
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow p^2X - pc_1 - c_2 + 2pX - 2c_1 + 10X = 2\frac{p+1}{(p+1)^2+9}$$

$$\Rightarrow X = c_1\frac{p+1}{(p+1)^2+9} + (c_1+c_2)\frac{1}{(p+1)^2+9} + 2\frac{p+1}{[(p+1)^2+9]^2}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow x(t) &= c_1e^{-t}\cos 3t + \frac{1}{3}(c_1+c_2)e^{-t}\sin 3t + \frac{1}{3}te^{-t}\sin 3t \\ &= e^{-t}[c_1\cos 3t + \frac{1}{3}(c_1+c_2+t)\sin 3t.\end{aligned}$$

10.5. Rješavanje sustava linearnih diferencijalnih jednadžbi s konstantim koeficijentima

Primjer 10.16. *Neka su $x(t)$ i $y(t)$ funkcije koje zajedno sa svojim derivacijama zadovoljavaju uvjete da mogu biti Laplaceovi originali. Riješite sustav*

$$\begin{aligned} x' + 3x - 4y &= 9e^{2t} \\ y' + 2x - 3y &= 3e^{2t}, \quad x(0) = 2,\ y(0) = 0. \end{aligned}$$

Rješenje. $[\mathcal{L}(x)](p) = X(p),\ [\mathcal{L}(y)](p) = Y(p)$ i $[\mathcal{L}(f)](p) = F(p)$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x') &= pX - x(0) = pX - 2 \\ \mathcal{L}(y') &= pY - y(0) = pY \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow pX - 2 + 3X - 4Y &= \frac{9}{p-2} \\ pY + 2X - 3Y &= \frac{3}{p-2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow X &= \frac{2p^2-p-3}{(p^2-1)(p-2)} = \frac{2p-3}{(p-1)(p-2)} = \frac{1}{p-1} + \frac{1}{p-2}, \\ Y &= \frac{p+1}{(p^2-1)(p-2)} = \frac{1}{(p-1)(p-2)} = -\frac{1}{p-1} + \frac{1}{p-2}. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow x(t) = e^t + e^{2t}, \quad y(t) = -e^t + e^{2t}.$$

Zadaci za vježbu

1. Nađite rješenja zadanih diferencijalnih jednadžbi koje zadovoljavaju navedene početne uvjete

   a) $x'' + 2x' + 2x = 0,\ x(0) = A, x'(0) = B;$

   b) $x'' - 6x' + 9x = 0,\ x(0) = A, x'(0) = B;$

   c) $x'' - x' - 6x = 2,\ x(0) = 1, x'(0) = 0;$

   d) $x'' - 9x = 2 - t,\ x(0) = 0, x'(0) = 1;$

   e) $x'' + 4x = 2\cos 2t,\ x(0) = 0, x'(0) = 4.$

   rj.

   a) $(p^2 + 2p + 2)X = Ap + 2A + B,\ x(t) = Ae^{-t}\cos t + (A + B)e^t \sin t;$

   b) $x(t) = Ae^{3t} + (B - 3A)te^{3t};$

   c) $x(t) = \frac{1}{15}(12e^{-2t} + 8e^{3t} - 5);$

   d) $x(t) = \frac{1}{27}(3t - 6 + 7e^{3t} - e^{-3t});$

   e) $x(t) = 2\sin 2t + 0.5t\sin 2t.$

2. Riješite sljedeće sustave diferencijalnih jednadžbi

   a)

$$\begin{aligned} x' + y &= 0 \\ y' - 2x - 2y &= 0, \quad x(0) = y(0) = 1; \end{aligned}$$

   b)

$$\begin{aligned} 2x' + y' - 3x &= 0 \\ x'' + y' - 2y &= e^{2t}, \quad x(0) = -1, x'(0) = 1, y(0) = 0; \end{aligned}$$

   c)

$$\begin{aligned} x'' - x' + y' &= e^{-t} + \cos t \\ x' - y'' - y' &= 2e^t + \sin t, \quad x(0) = 2, x'(0) = 1, y(0) = 0, y'(0) = 1. \end{aligned}$$

   rj.

   a)

$$\begin{aligned} x &= e^t(\cos t - 2\sin t) \\ y &= e^t(\cos t + 3\sin t); \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} x &= -\frac{1}{2}e^t + \frac{1}{4}e^{2t} - \frac{3}{4}e^{\frac{t}{2}}\cos\frac{\sqrt{23}}{2}t + \frac{11}{4\sqrt{23}}e^{\frac{t}{2}}\sin\frac{\sqrt{23}}{2}t \\ y &= -\frac{1}{2}e^t - \frac{1}{8}e^{2t} + \frac{5}{8}e^{\frac{t}{2}}\cos\frac{\sqrt{23}}{2}t - \frac{73}{8\sqrt{23}}e^{\frac{t}{2}}\sin\frac{\sqrt{23}}{2}t; \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} x &= 2e^t - \sin t \\ y &= -e^t + \cos t. \end{aligned}$$