11. Numeričke metode za obične diferencijalne jednadžbe

11.1. Eulerova metoda

Promatrajmo ponovo Cauchyjev problem

$$y' = f(x, y), \ y(x_0) = y_0. \tag{11.1}$$

Eulerova se metoda zasniva na ideji da se y' u jednadžbi (11.1) zamijeni s podijeljenom razlikom

$$y'(x) \approx \frac{y(x+h) - y(x)}{h},$$

pa rješenje diferencijalne jednadžbe zadovoljava

$$y(x+h) \approx y(x) + hy'(x) = y(x) + hf(x, y(x)). \tag{11.2}$$

Ova formula je točnija što je h manji, pa stoga interval $[a, b]$ podijelimo na n jednakih dijelova te stavimo

$$h = \frac{b-a}{n}, \quad x_i = a + ih, \quad i = 0, \ldots, n.$$

Korištenjem (11.2), prvo aproksimiramo rješenje u točki $x_1 = a + h$

$$y(x_1) \approx y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0).$$

Dobivenu aproksimaciju y_1 iskoristimo za računanje aproksimacije rješenja u točki $x_2 = x_1 + h$:

$$y(x_2) \approx y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1),$$

te postupak ponavljamo sve dok ne dođemo do kraja intervala $b = x_n$.

Opisani postupak nazivamo Eulerova metoda, i možemo ga kraće zapisati rekurzijom

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i), \quad i = 1, \ldots, n,$$

gdje je početni uvjet y_0 zadan kao početni uvjet diferencijalne jednadžbe. Dobivene vrijednosti y_i su aproksimacije rješenja diferencijalne jednadžbe u točkama x_i.

Primjer 11.1. *Eulerovom metodom približno riješite diferencijalnu jednadžbu* $y' = \frac{xy}{2}$ *u intervalu* $[0,1](h = 0.1)$ *za početne uvjete* $x_0 = 0,\ y_0 = 1$. *Odredite pravu grešku u točki* $x = 0.5$.

Rješenje. Imamo

$$\begin{aligned} y(0.1) \approx y_1 &= y_0 + h\frac{x_0 y_0}{2} = 1, \\ y(0.2) \approx y_2 &= y_1 + h\frac{x_1 y_1}{2} = 1.005, \\ y(0.3) \approx y_3 &= y_2 + h\frac{x_2 y_2}{2} = 1.0151 \end{aligned}$$

i analogno

$$\begin{aligned} y(0.4) &\approx y_4 = 1.0303, \\ y(0.5) &\approx y_5 = 1.0509, \\ y(0.6) &\approx y_6 = 1.0772, \\ y(0.7) &\approx y_7 = 1.1095, \\ y(0.8) &\approx y_8 = 1.1483, \\ y(0.9) &\approx y_9 = 1.1942, \\ y(1) &\approx y_{10} = 1.2479. \end{aligned}$$

Za određivanje prave greške moramo riješiti diferencijalnu jednadžbu, pa imamo $\frac{dy}{y} = \frac{xdx}{2}$ i opće je rješenje $y = C \cdot e^{x^2/4}$. Kako je $y(0) = 1$ imamo $C = 1$, pa je rješenje diferencijalne jednadžbe $y = e^{x^2/4}$. Prava greška u točki $x = 0.5$ je sada:

$$|y(0.5) - y_5| = |1.06449 - 1.0509| = 0.14 \cdot 10^{-2}.$$

11.2. Runge-Kuttine metode

Koristeći sličnu ideju kao u Eulerovoj metodi, diferecijalnu jednadžbu (11.1) na intervalu $[a,b]$, možemo rješavati tako da podijelimo interval $[a,b]$ na n jednakih podintervala, označivši

$$h = \frac{b-a}{n}, \quad x_i = a + ih, \quad i = 0, \dots, n.$$

Sada y_{i+1}, aproksimaciju rješenja u točki x_{i+1}, računamo iz y_i korištenjem aproksimacije oblika

$$y(x+h) \approx y(x) + h\Phi(x, y(x), h; f), \tag{11.3}$$

te dobivamo rekurziju:

$$y_{i+1} = y_i + h\Phi(x_i, y_i, h; f), \quad i = 0, \dots, n-1. \tag{11.4}$$

Funkciju Φ nazivamo funkcija prirasta, a različit izbor te funkcije definira različite metode. Uočimo da je funkcija f iz diferencijalne jednadžbe (11.1) parametar od Φ (tj. Φ ovisi o f). Tako je npr. u Eulerovoj metodi

$$\Phi(x, y(x), h; f) = f(x, y).$$

Metode oblika (11.4) zovemo jednokoračne metode (jer za aproksimaciju y_{i+1} koristimo samo vrijednost y_i u prethodnoj točki x_i, tj. u jednom koraku dobijemo y_{i+1} iz y_i). Da bismo pojednostavili zapis, ubuduće ćemo f izostaviti kao argument funkcije Φ.

Najpoznatije jednokoračne metode su Runge-Kuttine metode. Kod njih je funkcija Φ oblika

$$\Phi(x, y, h) = \frac{1}{h}\sum_{j=1}^{r} w_j K_j(x, y, h),$$

a K_j su zadani s

$$K_j(x, y, h) = hf\left(x + c_j h, y + \sum_{l=1}^{r} a_{jl} K_l(x, y, h)\right), \quad j = 1, \dots, r. \tag{11.5}$$

Broj r zovemo broj stadija Runge-Kuttine (RK) metode, i on označava koliko puta moramo računati funkciju f u svakom koraku.

Različiti izbor koeficijenata w_j, c_j i a_{jl} definira različite metode. Ovi koeficijenti se najčešće biraju tako da metode bude što točnija (greška je najmanja moguća). Iz izraza (11.5) vidimo da se K_j nalazi na lijevoj i na desnoj strani jednadžbe, tj. zadan je implicitno te govorimo o implicitnoj Runge-Kuttinoj metodi. U praksi se najviše koriste metode gdje je $a_{jl} = 0$ za $l \geq j$. Tada K_j možemo izračunati preko $K_1, \dots, K_{j-1}$, tj. funkcije K_j su zadane eksplicitno. Takve RK metode nazivamo eksplicitnima. Nadalje, obično se dodaje uvjet

$$\sum_{l=1}^{r} a_{jl} = c_j.$$

Primjer odabira koeficijenata prikazat ćemo na RK metodi s dva stadija:

$$\begin{aligned}
\Phi(x, y, h) &= \frac{1}{h}[w_1 K_1(x, y, h) + w_2 K_2(x, y, h)], \\
K_1(x, y, h) &= hf(x, y), \\
K_2(x, y, h) &= hf(x + ah, y + aK_1).
\end{aligned}$$

Da bi metoda bila reda 2 ($|y(x_i) - y_i| \leq ch^2$), u Taylorovom razvoju od K_2 po varijabli h mora biti:

$$\begin{aligned} 1 - w_1 - w_2 &= 0, \\ \frac{1}{2} - w_2 a &= 0, \end{aligned}$$

pa uvođenjem slobodnog koeficijenta t rješenje ove dvije jednadžbe možemo napisati u obliku:

$$w_2 = t \neq 0, \quad w_1 = 1 - t, \quad a = \frac{1}{2t}.$$

Ukoliko je $w_2 = 0$, radi se o metodi s jednim stadijem, i to upravo o Eulerovoj metodi.

Ako rekurziju (11.4) napišemo u obliku $y_{i+1} = y_i + \Delta y_i$, za $t = 1/2$ dobivamo Heunovu metodu:

$$\begin{aligned} \Delta y_i &= h\Phi = \frac{1}{2}(K_1^{(i)} + K_2^{(i)}), \\ K_1^{(i)} &= hf(x_i, y_i), \\ K_2^{(i)} &= hf(x_i + h, y_i + K_1^{(i)}), \end{aligned}$$

dok se za $t = 1$ dobiva modificirana Eulerova metoda:

$$\Delta y_i = h\Phi = hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{hf(x_i, y_i)}{2}\right).$$

Primjer 11.2. *Modificiranom Eulerovom metodom približno riješite diferencijalnu jednadžbu $y' = y - 1$ na intervalu $[0, 0.5]$, za početne uvjete $x_0 = 0$, $y_0 = 1.10$ i $h = 0.1$. Odredite pravu grešku u točki $x = 0.3$.*

Rješenje.

$$y_{i+1} = y_i + 0.1(y_i + 0.05(y_i - 1) - 1) = 1.105y_i - 0.105,$$

pa imamo

$$\begin{aligned} y(0.1) &\approx y_1 = 1.11050, \\ y(0.2) &\approx y_2 = 1.12210, \\ y(0.3) &\approx y_3 = 1.13492, \\ y(0.4) &\approx y_4 = 1.14909, \\ y(0.5) &\approx y_5 = 1.16474. \end{aligned}$$

Za određivanje prave greške moramo riješiti diferencijalnu jednadžbu, pa imamo $\frac{dy}{y-1} = dx$ i opće je rješenje $y = C \cdot e^x + 1$. Kako je $y(0) = 1.10$ imamo $C = 0.1$, pa je rješenje diferencijalne jednadžbe $y = 0.1 \cdot e^x + 1$. Prava greška u točki $x = 0.3$ je sada:

$$|y(0.3) - y_3| = |1.13498 - 1.13492| = 0.6 \cdot 10^{-4}.$$

Najraširenije su metode sa četiri stadija. Od njih najpolpularnija je "klasična" Runge-Kutta metoda, koja se u literaturi najčešće naziva Runge-Kutta ili RK-4 metoda:

$$\begin{aligned}
\Delta y_i = h\Phi &= \frac{1}{6}(K_1^{(i)} + 2K_2^{(i)} + 2K_3^{(i)} + K_4^{(i)}),\\
K_1^{(i)} &= hf(x_i, y_i),\\
K_2^{(i)} &= hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{K_1^{(i)}}{2}\right),\\
K_3^{(i)} &= hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{K_2^{(i)}}{2}\right),\\
K_4^{(i)} &= hf(x_i + h, y_i + K_3^{(i)}).
\end{aligned}$$

Primjer 11.3. *Runge-Kuttinom metodom riješite diferencijalnu jednadžbu $y' = x + 0.1y^2$ na intervalu $[1.8, 2.4]$, za početne uvjete $x_0 = 1.8,\ y_0 = 0$ i $h = 0.3$.*

Rješenje.

$$\begin{aligned}
K_1^{(0)} &= 0.3(1.8 + 0) = 0.54,\\
K_2^{(0)} &= 0.3\left(1.8 + \frac{0.3}{2} + 0.1\left(0 + \frac{0.54}{2}\right)^2\right) = 0.58,\\
K_3^{(0)} &= 0.3\left(1.8 + \frac{0.3}{2} + 0.1\left(0 + \frac{0.58}{2}\right)^2\right) = 0.59,\\
K_4^{(0)} &= 0.3\left(1.8 + 0.3 + 0.1\,(0 + 0.59)^2\right) = 0.64,
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \Delta y_0 = 0.59 \Rightarrow x_1 = 2.1,\ \ y_1 = y_0 + \Delta y_0 = 0 + 0.59 = 0.59.$$

$$\begin{aligned}
K_1^{(1)} &= 0.3(2.1 + 0.1(0.59)^2) = 0.64,\\
K_2^{(1)} &= 0.3\left(2.1 + \frac{0.3}{2} + 0.1\left(0.59 + \frac{0.64}{2}\right)^2\right) = 0.70,\\
K_3^{(1)} &= 0.3\left(2.1 + \frac{0.3}{2} + 0.1\left(0.59 + \frac{0.70}{2}\right)^2\right) = 0.70,\\
K_4^{(1)} &= 0.3\left(2.1 + 0.3 + 0.1\,(0.59 + 0.70)^2\right) = 0.77,
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \Delta y_1 = 0.70 \Rightarrow x_2 = 2.4,\ y_2 = y_1 + \Delta y_1 = 0.59 + 0.70 = 1.29.$$

Programska realizacija

1. Riješite diferencijalnu jednadžbu $y' = y$ na intervalu $[0, 2]$ za $y(0) = 1$.
2. Riješite diferencijalnu jednadžbu $y' = -y$ na intervalu $[0, 2]$ za $y(0) = 1$.
3. Riješite diferencijalnu jednadžbu $y' = y - x$ na intervalu $[0, 2]$ za $y(0) = 1$.
4. Riješite diferencijalnu jednadžbu $y' = y + x$ na intervalu $[0, 2]$ za $y(0) = 1$.

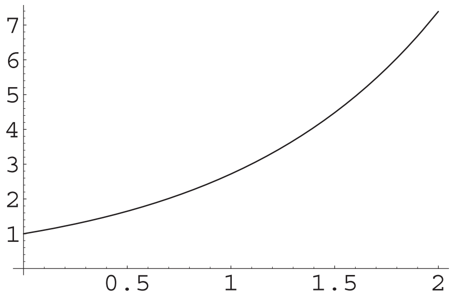
```
DSolve[{y'[x] == y[x], y[0] == 1}, y[x], x]

{{y[x] → ⅇ^x}}

NDSolve[{y'[x] == y[x], y[0] == 1}, y, {x, 0, 2}]

{{y → InterpolatingFunction[{{0., 2.}}, <>]}}

Plot[Evaluate[y[x] /. %], {x, 0, 2}]
```




```
- Graphics -
```

Slika 11.1.

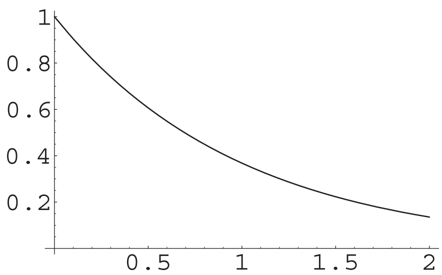
```
DSolve[{y'[x] == -y[x], y[0] == 1}, y[x], x]

{{y[x] → e^-x}}

NDSolve[{y'[x] == -y[x], y[0] == 1}, y, {x, 0, 2}]

{{y → InterpolatingFunction[{{0., 2.}}, <>]}}

Plot[Evaluate[y[x] /. %], {x, 0, 2}]
```




```
- Graphics -
```

Slika 11.2.

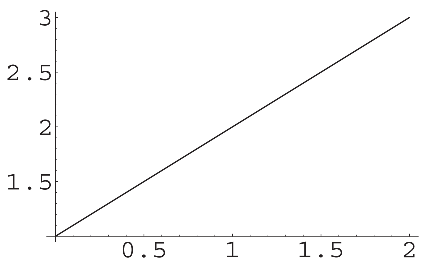
```
DSolve[{y'[x] == y[x] - x, y[0] == 1}, y[x], x]

{{y[x] → 1 + x}}

NDSolve[{y'[x] == y[x] - x, y[0] == 1}, y, {x, 0, 2}]

{{y → InterpolatingFunction[{{0., 2.}}, <>]}}

Plot[Evaluate[y[x] /. %], {x, 0, 2}]
```




```
- Graphics -
```

Slika 11.3.

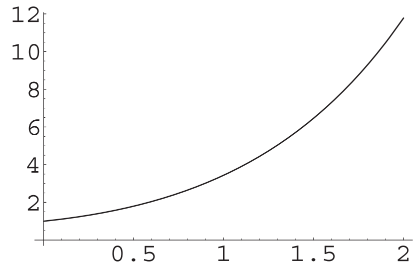
```
DSolve[{y'[x] == y[x] + x, y[0] == 1}, y[x], x]

{{y[x] → -1 + 2 e^x - x}}

NDSolve[{y'[x] == y[x] + x, y[0] == 1}, y, {x, 0, 2}]

{{y → InterpolatingFunction[{{0., 2.}}, <>]}}

Plot[Evaluate[y[x] /. %], {x, 0, 2}]
```




```
- Graphics -
```

Slika 11.4.

Zadaci za vježbu

1. Eulerovom metodom nađite četiri približna vrijednosti rješenja na intervalu $[0,2]$ diferencijalne jednadžbe $y' = y - 1,\ y(0) = 2$. Odredite pravu grešku za $x = 1$. (rj. $y(0.5) \approx 2.5,\ y(1) \approx 3.25,\ y(1.5) \approx 4.375,\ y(2) \approx 6.0625$)
2. Eulerovom metodom nađite četiri približna vrijednosti rješenja na intervalu $[0,2]$ diferencijalne jednadžbe $y' = y^2 + 1,\ y(0) = 0$. Odredite pravu grešku za $x = 1$. (rj. $y(0.5) \approx 0.5,\ y(1) \approx 1.125,\ y(1.5) \approx 2.25781,\ y(2) \approx 5.30667$)
3. Eulerovom metodom sastavite na intervalu $[1, 1.5]$ tablicu vrijednosti rješenja diferencijalne jednadžbe $y'' + \frac{y'}{2} = 0,\ y(1) = 0.77,\ y'(1) = 0.44$ uzimajući za korak $h = 0.1$. Odredite pravu grešku za $x = 1.2$. (rj. $y(1.1) \approx 0.814,\ y(1.2) \approx 0.8536,\ y(1.3) \approx 0.8896,\ y(1.4) \approx 0.9226,\ y(1.5) \approx 0.9535$)
4. Eulerovom metodom sastavite na intervalu $[1, 1.5]$ tablicu vrijednosti rješenja diferencijalne jednadžbe $y'' - \frac{1}{x} = 0,\ y(1) = 1,\ y'(1) = 1$ uzimajuq'ci za korak $h = 0.1$. Odredite pravu grešku za $x = 1.2$. (rj. $y(1.1) \approx 1.1,\ y(1.2) \approx 1.21,\ y(1.3) \approx 1.329,\ y(1.4) \approx 1.4563,\ y(1.5) \approx 1.5913$)
5. Metodom Runge-Kutta nađite rješenje diferencijalne jednadžbe $y' = 0.25y^2 + x^2,\ y(0) = -1$ na intervalu $[0, 0.2]$ uzimajući za korak $h = 0.1$.
6. Metodom Runge-Kutta nađite rješenje diferencijalne jednadžbe $y' = \frac{y}{1+x} - y^2,\ y(0) = 1$ na intervalu $[0, 0.2]$ uzimajući za korak $h = 0.1$.

7. Metodom Runge-Kutta nađite rješenje diferencijalne jednadžbe $y' = y + 2x - x^2$, $y(0) = 1$ na intervalu $[0, 0.2]$ uzimajući za korak $h = 0.1$. (rj. $y(0.1) \approx 1.11517$, $y(0.2) \approx 1.26140$)

8. Metodom Runge-Kutta nađite rješenje diferencijalne jednadžbe $y' = y + x - 0.5x^2$, $y(0) = 1$ na intervalu $[0, 0.2]$ uzimajući za korak $h = 0.1$. (rj. $y(0.1) \approx 1.11017$, $y(0.2) \approx 1.24140$)

9. Metodom Runge-Kutta nađite približno rješenje diferencijalne jednadžbe $y' = y + 4x - 2x^2$, $y(0) = 1$ na intervalu $[0, 0.1]$ uzimajući za korak $h = 0.1$. (rj. $y(0.1) \approx 1.12517$)

10. Eulerovom metodom nađite približno rješenje diferencijalne jednadžbe $y' = y - \frac{2x}{y}$, $y(0) = 1$ u točki $x = 0.5$ s korakom $h = 0.1$. (rj. $y(0.5) \approx 1.43514$)

11. Metodom Runge-Kutta riješite diferencijalnu jednadžbu $y' = 1 + \frac{1}{2(y-x)}$, $y(1) = 2$ na intervalu $[1, 1.2]$ s korakom $h = 0.1$. (rj $y(1.1) \approx 2.14880$, $y(1.2) \approx 2.29544$)

12. Eulerovom metodom riješite diferencijalnu jednadžbu $y' = \frac{2y^2}{(x-2)^2}$, $y(1) = -1$ na intervalu $[1, 1.2]$ s korakom $h = 0.05$. Izračunajte pravu grešku u točki $x = 1.2$. (rj $y(1.05) \approx -0.9$, $y(1.1) \approx -0.81$, $y(1.15) \approx -0.729$, $y(1.2) \approx -0.655$)

13. Diferencijalnu jednadžbu $y' = e^{-2x}$, $y(0) = -\frac{1}{2}$ na intervalu $[0, 0.2]$ s korakom $h = 0.1$ riješite Eulerovom metodom i metodom Runge-Kutta, te ocjenite koja je metoda točnija u točki $x = 0.2$ (izračunajte pravu grešku). (rj. $y_E(0.2) \approx -0.31813$, $y_R(0.2) \approx -0.33517$)

14. Diferencijalnu jednadžbu $y' = xy$, $y(0) = 1$ na intervalu $[0, 0.2]$ s korakom $h = 0.1$ riješite Eulerovom metodom i metodom Runge-Kutta, te ocjenite koja je metoda točnija u točki $x = 0.2$ (izračunajte pravu grešku). (rj. $y_E(0.2) \approx 1.01$, $y_R(0.2) \approx 1.0202$)

15. Diferencijalnu jednadžbu $y' + \frac{2y}{x} = x^3$, $y(1) = 0$ na intervalu $[1, 1.2]$ s korakom $h = 0.1$ riješite Eulerovom metodom i metodom Runge-Kutta, te ocjenite koja je metoda točnija u točki $x = 1.2$ (izračunajte pravu grešku). (rj. $y_E(1.2) \approx 0.2149$, $y_R(1.2) \approx 0.23302$)

16. Diferencijalnu jednadžbu $yy' = 1 - x^2$, $y(1) = 1$ na intervalu $[1, 1.2]$ s korakom $h = 0.1$ riješite Eulerovom metodom i metodom Runge-Kutta, te ocjenite koja je metoda točnija u točki $x = 1.2$ (izračunajte pravu grešku). (rj. $y_E(1.2) \approx 0.98091$, $y_R(1.2) \approx 0.96324$)

17. Diferencijalnu jednadžbu $(x+1)y' - y + y^2 = 0$, $y(0) = 2$ na intervalu $[0, 0.2]$ s korakom $h = 0.1$ riješite Eulerovom metodom i metodom Runge-Kutta, te ocjenite koja je metoda točnija u točki $x = 0.2$ (izračunajte pravu grešku). (rj. $y_E(0.2) \approx 1.66909$, $y_R(0.2) \approx 1.71428$)

18. Diferencijalnu jednadžbu $y' = \frac{x^2-y}{x}$, $y(1) = 1$ na intervalu $[1, 2]$ s korakom $h = 0.5$ riješite Eulerovom metodom, te Picardovom metodom u tri iteracije i ocjenite koja je metoda točnija u točki $x = 2$ (izračunajte pravu grešku). (rj. $y_E(2) \approx 1$, $y_P(2) \approx 1.644$)
19. Diferencijalnu jednadžbu $y' = x + y$, $y(0) = 1$ na intervalu $[0, 1]$ s korakom $h = 0.5$ riješite modificiranom Eulerovom metodom, te Picardovom metodom u dvije iteracije i ocjenite koja je metoda točnija u točki $x = 1$ (izračunajte pravu grešku). (rj. $y_E(1) \approx 3.16667$, $y_P(1) \approx 3.28125$)
20. Diferencijalnu jednadžbu $y' = x - y$, $y(0) = 1$ na intervalu $[0, 1]$ s korakom $h = 0.5$ riješite modificiranom Eulerovom metodom, te Picardovom metodom u dvije iteracije i ocjenite koja je metoda točnija u točki $x = 1$ (izračunajte pravu grešku). (rj. $y_E(1) \approx 0.83333$, $y_P(1) \approx 0.78125$)
21. Diferencijalnu jednadžbu $y' = y - \frac{2x}{y}$, $y(0) = 1$ na intervalu $[0, 1]$ s korakom $h = 0.5$ riješite Eulerovom metodom, te Picardovom metodom u dvije iteracije i ocjenite koja je metoda točnija u točki $x = 1$ (izračunajte pravu grešku). (rj. $y_E(1) \approx 1.91667$, $y_P(1) \approx 1$)
22. Metodom Runge-Kutta odredite približnu vrijednost dif. jednadžbe $y' = xy^2 + 2y$, $y(0) = 4$, na intervalu $[0, 0.4]$ sa korakom $h = 0.2$, te odredite pravu grešku. (rj $y(0.2) \approx 6.66464$, $y(0.4) \approx 19.46834$)
23. Diferencijalnu jednadžbu $2y' = xy$, $y(0) = 1$ na intervalu $[0, 0.2]$ s korakom $h = 0.1$ riješite Eulerovom metodom i metodom Runge-Kutta, te ocjenite koja je metoda točnija u točki $x = 0.1$ (izračunajte pravu grešku). (rj. $y_E(0.1) \approx 1$, $y_R(0.1) \approx 1.0025$)
24. Diferencijalnu jednadžbu $y' = 3y + 3x$, $y(0) = 1$ na intervalu $[0, 0.2]$ s korakom $h = 0.1$ riješite Eulerovom metodom, te Runge-Kutta metodom i ocjenite koja je metoda točnija u točki $x = 0.1$ (izračunajte pravu grešku). (rj. $y_E(0.1) \approx 1.3$, $y_R(0.1) \approx 1.3345$)
25. Diferencijalnu jednadžbu $y' = e^{-2x} - 2y$, $y(0) = \frac{1}{10}$ na intervalu $[0, 0.2]$ s korakom $h = 0.1$ riješite Eulerovom metodom, te Runge-Kutta metodom i ocjenite koja je metoda točnija u točki $x = 0.1$ (izračunajte pravu grešku). (rj. $y_E(0.1) \approx 0.18$, $y_R(0.1) \approx 0.1638$)
26. Diferencijalnu jednadžbu $y' = y\sqrt{1 + y^2}$, $y(0) = 1$ na intervalu $[0, 0.2]$ s korakom $h = 0.1$ riješite Eulerovom metodom, te Runge-Kutta metodom i ocjenite koja je metoda točnija u točki $x = 0.1$ (izračunajte pravu grešku). (rj. $y_E(0.1) \approx 1.14142$, $y_R(0.1) \approx 1.15828$)
27. Diferencijalnu jednadžbu $y' = \frac{xy-x^3-4}{x^2}$, $y(2) = 9$ na intervalu $[2, 2.1]$ s korakom $h = 0.05$ riješite Eulerovom metodom i metodom Runge-Kutta i ocjenite koja je metoda točnija u točki $x = 2.05$ (izračunajte pravu grešku). (rj. $y_E(2.05) \approx 9.075$, $y_R(2.05) \approx 9.0731$)

28. Diferencijalnu jednadžbu $2y' = x - y,\ y(0) = 1$ na intervalu $[0, 0.2]$ s korakom $h = 0.1$ riješite Eulerovom metodom i Picardovom metodom u tri koraka i ocjenite koja je metoda točnija u točki $x = 0.1$ (izračunajte pravu grešku). (rj. $y_E(0.1) \approx 0.95,\ y_P(0.1) \approx 0.95369$)

29. Diferencijalnu jednadžbu $y' = e^{-2x} - 2y,\ y(0) = 1/10$ na intervalu $[0, 0.2]$ s korakom $h = 0.1$ riješite Eulerovom metodom i Picardovom metodom u tri koraka i ocjenite koja je metoda točnija u točki $x = 0.1$ (izračunajte pravu grešku). (rj. $y_E(0.1) \approx 0.18,\ y_P(0.1) \approx 0.16377$)

30. Diferencijalnu jednadžbu $y' = xy^2 + 2y,\ y(0) = 4$ na intervalu $[0, 0.2]$ s korakom $h = 0.1$ riješite Eulerovom metodom i Picardovom metodom u tri koraka i ocjenite koja je metoda točnija u točki $x = 0.1$ (izračunajte pravu grešku). (rj. $y_E(0.1) \approx 4.8,\ y_P(0.1) \approx 5.1488$)

31. Diferencijalnu jednadžbu $y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x},\ y(1) = 1$ na intervalu $[1, 1.2]$ s korakom $h = 0.1$ riješite Eulerovom metodom i Runge-Kutta metodom i ocjenite koja je metoda točnija u točki $x = 1.1$ (izračunajte pravu grešku). (rj. $y_E(1.1) \approx 1.2,\ y_R(1.1) \approx 1.2003$)

32. Za diferencijalnu jednadžbu $y' = -2y,\ y(0) = 100$ na intervalu $[0, 0.5]$ skicirajte graf rješenja, te približno riješite Eulerovom metodom i Runge-Kutta metodom s korakom $h = 0.25$. Izračunajte prave greške u čvorovima.

33. Za diferencijalnu jednadžbu $y' = 3y,\ y(0) = 100$ na intervalu $[0, 0.5]$ skicirajte graf rješenja, te približno riješite Eulerovom metodom s korakom $h = 0.25$ i Picardovom metodom u tri koraka. Izračunajte prave greške u čvorovima.

34. Diferencijalnu jednadžbu $(x + 1)y' - y + y^2 = 0,\ y(0) = 2$ na intervalu $[0, 0.2]$ s korakom $h = 0.1$ riješite Eulerovom metodom i metodom Runge-Kutta, te ocjenite koja je metoda točnija u točki $x = 0.1$ (izračunajte pravu grešku). (rj. $y_E(0.1) \approx 1.8,\ y_R(0.1) \approx 1.716$)

35. Diferencijalnu jednadžbu $y' = 3y + 3x,\ y(0) = 1$ na intervalu $[0, 0.2]$ s korakom $h = 0.1$ riješite Eulerovom metodom i metodom Runge-Kutta, te ocjenite koja je metoda točnija u točki $x = 0.1$ (izračunajte pravu grešku). (rj. $y_E(0.1) \approx 1.3,\ y_R(0.1) \approx 1.36645$)