MATEMATIKA

seminari

smjer: **Nutricionizam**

Sadržaj

1 Realne funkcije realne varijable

Neka je $D \subseteq \mathbf{R}$. Funkcije oblika $f : D \to \mathbf{R}$ nazivamo realnim funkcijama (vrijednosti su u skupu realnih brojeva) realne varijable.

Primjer 1 *Navedite neke primjere realnih funkcija realne varijable? Što u tim primjerima može biti D?*

1. $f(x) = x^2$; $D \subseteq \mathbf{R}$.
2. $f(x) = \frac{1}{x}$; $D \subseteq \mathbf{R} \setminus \{0\}$.
3. *Izračunajte* $f(0)$, $f(-1)$, $f(1.9)$, $f(2.01)$, $f(-5)$, *ako je* $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$.
4. *Navedite primjer racionalne, trigonometrijske, eksponencijalne funkcije?*

U realnom području funkcije ćemo najčešće zadavati samo pravilom pridruživanja $x \mapsto f(x)$. U tom slučaju definiramo prirodnu domenu $\mathcal{D}(f)$ i sliku $\mathcal{R}(f)$ funkcije f sa:

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}(f) &= \{x \in \mathbf{R} \ : f(x) \in \mathbf{R}\} \\
\mathcal{R}(f) &= \{y \in \mathbf{R} \ : \exists x \in \mathbf{R}, \quad f(x) = y\} \\
\mathcal{N}(f) &= \{x \in \mathcal{D}(f) \ : f(x) = 0\}
\end{aligned}$$

Osnovne operacije sa funkcijama:

1. Naslijeđene od osnovnih računskih operacija (zbrajanje, oduzimanje, množenje i dijeljenje funkcija: Oznake: $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$.
2. Kompozicija funkcija, invertiranje funkcija: Oznake: $f \circ g$, f^{-1}.

Zadatak 1 *Neka je* $f(x) = x + 2$, $g(x) = 3 - x^2$. *a) Odredite* $f + g$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$, $\frac{g}{f}$. *b) Vrijedi li* $f \circ g = g \circ f$? *Za koje* $x \in \mathbf{R}$ *vrijedi* $(g \circ f)(x) = (f \circ g)(x)$?

Rješenje:

$$(f \circ g)(x) = f[g(x)] = f(3 - x^2) = (3 - x^2) + 2 = 5 - x^2.$$

$$(g \circ f)(x) = g[f(x)] = g(x + 2) = 3 - (x + 2)^2 = -x^2 - 4x - 1.$$

Kako je $(f \circ g)(0) = 5$ i $(g \circ f)(0) = -1$, to slijedi $f \circ g \neq g \circ f$.

Iz $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$ se dobije $5 - x^2 = -x^2 - 4x - 1$, što daje $x = -3/2$. □

Zadatak 2 *Neka je* $f(x) = 2x^2 + 5$. *a) Odredite* $f(x + h) - f(x)$. *b) Odredite* $f(2 + h) - f(2)$.

Rješenje:

$$\begin{aligned} a) \qquad f(x+h)-f(x) &= 2(x+h)^2+5-(2x^2+5) \\ &= 2x^2+4xh+2h^2+5-2x^2-5 = 4xh+2h^2 \end{aligned}$$

Koristeći $a)$ za $x=2$ dobivamo:

$$b)\ \ f(2+h)-f(2) = 4\cdot 2\cdot h + 2h^2 = 8h+2h^2$$

$\square$

Zadatak 3 *Neka je $f(x)=x^2-x$. Odredite a) $f(f(x))$ b) $f(f(f(-1)))$.*

Rješenje:

$$\begin{aligned} a) \qquad f(f(x)) &= f(x^2-x) = (x^2-x)^2-(x^2-x) \\ &= (x^4-2x^3+x^2)-x^2+x = x^4-2x^3+x. \\ b) \qquad f(f(f(-1))) &= f(f(2)) = f(2) = 2. \end{aligned}$$

Zadatak pod $b)$ možemo riješiti i ovako: koristeći a), dobivamo da je $f(f(-1)) = (-1)^4-2(-1)^3-1 = 2$ pa onda

$$f(f(f(-1))) = f(2) = 2$$

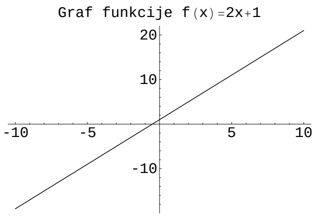
$\square$

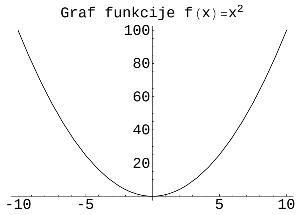
Zadatak 4 *Prikažite kao kompoziciju elementarnijih funkcija sljedeće funkcije a) $f(x)=\sqrt[3]{3+\sqrt{1-x}}$ b) $f(x)=5^{(3x+1)^2}$ c) $f(x)=1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+x}}$.*

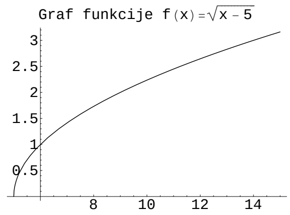
Rješenje: a) $f_1(x)=1-x$, $f_2(x)=\sqrt{x}$, $f_3(x)=3+x$, $f_4(x)=\sqrt[3]{x}$. Lako se provjeri da je $f(x)=(f_4\circ f_3\circ f_2\circ f_1)(x)$.
b) $f_1(x)=3x+1$, $f_2(x)=x^2$, $f_3(x)=5^x$. Lako se provjeri da je $f(x)=(f_3\circ f_2\circ f_1)(x)$.
c) $f_1(x)=1+x$, $f_2(x)=\frac{1}{x}$. Lako se provjeri da je $f(x)=(f_1\circ f_2\circ f_1\circ f_2\circ f_1)(x)$. $\square$

Zadatak 5 *Odredite prirodnu domenu $\mathcal{D}(f)$ i sliku $\mathcal{R}(f)$ funkcija a) $f(x)=2x+1$ b) $f(x)=x^2$ c) $f(x)=\sqrt{x-5}$.*

Rješenje: Kod jednostavnih, elementarnih funkcija kao što su ove, prirodna domena i slika mogu se očitati s grafa funkcija. Pritom se domena očitava na x-osi a slika na y-osi.







$$
\begin{array}{ll}
a) & \mathcal{D}(f)=\mathbb{R}, \quad \mathcal{R}(f)=\mathbb{R} \\
b) & \mathcal{D}(f)=\mathbb{R}, \quad \mathcal{R}(f)=[0,+\infty\rangle \\
c) & x-5\geq 0 \ \Rightarrow \ \mathcal{D}(f)=[5,+\infty\rangle, \quad \mathcal{R}(f)=[0,+\infty\rangle
\end{array}
$$

$\square$

Zadatak 6 *Odredite prirodnu domenu $\mathcal{D}(f)$ i sliku $\mathcal{R}(f)$ funkcija*
a) (DZ) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x-4}}$ *b)* $f(x)=\sqrt{x^2+x+1}$ *c) (DZ)* $f(x)=\frac{1}{x^2+x+2}$
d) $f(x)=\frac{1}{x^2+x-6}$.

Rješenje: Koristit ćemo činjenicu da je slika funkcije domena njoj inverzne funkcije, tj. $\mathcal{R}(f)=\mathcal{D}(f^{-1})$. Kako bi našli sliku funkcije f, potrebno je najprije odrediti njoj inverznu funkciju f^{-1} te zatim njoj odrediti domenu koja je zapravo slika početne funkcije.

$$a) \quad \mathcal{D}(f) ... x-4>0 \Leftrightarrow x>4 \Rightarrow \mathcal{D}(f)=\langle 4,\infty\rangle.$$

$$\mathcal{R}(f) ... f(x)=y \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x-4}}=y \Leftrightarrow \left(\frac{1}{y}=\sqrt{x-4} \ \& \ y\neq 0\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{y^2}=x-4 \ \& \ y\geq 0 \ \& \ y\neq 0\right) \Leftrightarrow \left(x=\frac{1}{y^2}+4, \ \& \ y>0\right) \Rightarrow \mathcal{R}(f)=\langle 0,\infty\rangle.$$

$$b) \quad \mathcal{D}(f) ... x^2+x+1>0, \ D=b^2-4ac=-3<0 \Rightarrow \mathcal{D}(f)=\mathbf{R}.$$

$$\mathcal{R}(f) ... \sqrt{x^2+x+1}=y \Leftrightarrow \left(x^2+x+1=y^2 \ \& \ y\geq 0\right) \Leftrightarrow (x^2+x+1-y^2=0 \ \& \ y\geq 0).$$

Posljednja jednadžba će imati realna rješenja (po x) akko je $D=1-4(1-y^2)\geq 0$ što lako daje $|y|\geq\sqrt{3}/2$. Uvažavajući uvjet $y\geq 0$ dobije se $\mathcal{R}(f)=[\sqrt{3}/2,\infty\rangle$.

$$c) \quad \mathcal{D}(f) ... x^2+x+2\neq 0, \ D=-7<0 \Rightarrow \mathcal{D}(f)=\mathbf{R}.$$

$$\mathcal{R}(f)...y = \frac{1}{x^2+x+2} \Leftrightarrow \left(x^2+x+2-\frac{1}{y}=0 \;\&\; y \neq 0\right).$$

Jednadžba $x^2+x+2-\frac{1}{y}=0$ ima realna rješenja akko $D = 1-4(2-\frac{1}{y} \geq 0 \Leftrightarrow -7+\frac{4}{y} \geq 0 \Leftrightarrow 0 < y \leq 4/7 \Rightarrow \mathcal{R}(f) = \langle 0, 4/7]$.

d) $\mathcal{D}(f)...x^2+x-6 \neq 0 \Leftrightarrow (x \neq -3,\ x \neq 2) \Rightarrow \mathcal{D}(f) = \mathbf{R} \setminus \{-3, 2\}$.

$$\mathcal{R}(f)...\frac{1}{x^2+x-6} = y \Leftrightarrow \left(x^2+x-6-\frac{1}{y}=0,\ \&\ y \neq 0\right).$$

Jednadžba $x^2+x-6-\frac{1}{y}=0$ ima realna rješenja akko $D = 1-4(-6-\frac{1}{y}) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{25y+4}{y} \geq 0 \Leftrightarrow (y \leq -4/25 \vee y > 0) \Rightarrow \mathcal{R}(f) = \langle -\infty, -4/25] \cup \langle 0, \infty\rangle$.

Slika funkcija zadanih pod a), b) i c) može se naći i na jednostavniji način.
a) Znamo da: $0 \leq \sqrt{x-4} < +\infty$. Odatle slijedi:

$$0 < \frac{1}{\sqrt{x-4}} < +\infty \quad \Rightarrow \quad \mathcal{R}(f) = \langle 0, \infty\rangle$$

b) Odredimo najprije sliku funkcije $g(x) = x^2+x+1$. Znamo da je $x^2+x+1 > 0$. Točka u kojoj konveksna kvadratna funkcija postiže minimalnu vrijednost je njeno tjeme: $x_T = -\frac{b}{2a} = -\frac{1}{2}$ i ta vrijednost iznosi $y_T = g(x_T) = \frac{1}{4}-\frac{1}{2}+1 = \frac{3}{4}$. To znači da:

$$\frac{3}{4} \leq x^2+x+1 < +\infty$$

Budući je korijenska funkcija monotona slijedi:

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \leq \sqrt{x^2+x+1} < +\infty \quad \Rightarrow \quad \mathcal{R}(f) = \left[\frac{\sqrt{3}}{2}, \infty\right\rangle$$

c) Slično kao pod b): znamo $x^2+x+2 > 0$. Minimalna vrijednost te funkcije je

$$y_T = c - \frac{b^2}{4a} = 2 - \frac{1}{4} = \frac{7}{4}$$

pa odatle

$$\frac{7}{4} \leq x^2+x+2 < +\infty.$$

Konačno, slijedi

$$0 < \frac{1}{x^2+x+2} \leq \frac{4}{7} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{R}(f) = \left\langle 0, \frac{4}{7}\right].$$

Pogledajmo zašto ovakva jednostavna "procedura" ne prolazi za funkciju zadanu pod d). Za razliku od kvadratne funkcije u nazivniku zadane pod c), funkcija $g(x) = x^2 + x - 6$ ima nultočke. To znači da joj predznak nije konstantan, odnosno da nije uvijek pozitivna. Procedura prolazi do koraka kada zaključujemo da

$$-\frac{25}{4} \leq x^2 + x - 6 < +\infty.$$

Sada bi trebalo množiti sa $x^2 + x - 6$, no to ne možemo upravo zbog toga što predznak te funkcije nije konstantan, već je za $x \in \langle -3, 2\rangle$ negativan a za $x \in \langle -\infty, -3\rangle \cup \langle 2, +\infty\rangle$ pozitivan. Morali bismo razlučiti 2 slučaja:

$$\begin{array}{llcl} 1) & -\frac{25}{4} \leq x^2 + x - 6 < 0 & \Leftrightarrow & -\infty < \frac{1}{x^2+x-6} \leq -\frac{4}{25} \\ 2) & 0 < x^2 + x - 6 < +\infty & \Leftrightarrow & 0 < \frac{1}{x^2+x-6} < +\infty \end{array}$$

pa odatle zaključujemo

$$\mathcal{R}(f) = \left\langle -\infty, -\frac{4}{25}\right] \cup \langle 0, +\infty\rangle$$

□

Napomena 1 *Provedite proceduru za nalaženje slike funkcije iz Zadatka 6 za funkcije iz Zadatka 5.*

Zadatak 7 *(predavanja) Odredite ograničenost funkcija, te* $\Gamma(f)$, $\inf f =$? $\sup f =$?
$\min f =$? $\max f =$?

$$a)\ f(x) = \arccos x, \quad b)\ f(x) = \operatorname{arctg} x, \quad c)\ f(x) = \frac{1}{1+2^x}.$$

Rješenje:

$$\begin{array}{ll} a) & 0 \leq \arccos x \leq \pi, \quad \forall x \in [-1, 1] \\ & \max f = \pi, \quad \min f = 0 \\ b) & -\pi/2 < \operatorname{arctg} x < \pi/2, \quad \forall x \in \mathbf{R} \\ & \sup f = \pi/2, \quad \inf f = -\pi/2 \\ c) & \frac{x^2+x+6}{x^2+x+1} = 1 + \frac{5}{x^2+x+1} \leq 1 + \frac{5}{\frac{3}{4}} = \frac{23}{3} \\ & \Rightarrow \inf f = 1,\ \max f = (\sup f) = \frac{23}{3} \end{array}$$

Tjeme: $T\left(-\frac{b}{2a}, c-\frac{b^2}{4a}\right)$

- povezati sa slikom $\mathcal{R}(f)$ $\square$

Zadatak 8 *(predavanja) Skicirajte graf funkcije f, odredite ograničenost funkcija, te* $\inf f = ?$ $\sup f = ?$ $\min f = ?$ $\max f = ?$ *ako je a)* $f(x)=\frac{x-2}{3+x}$ *b)* $f(x)=\sqrt{6x-x^2}$ *c)* $f(x)=e^{-x^2}$ *d)* $f(x)=3\sin(\pi x)$.

Zadatak 9 *Odredite $\mathcal{D}(f)$ ako je* $f(x)=\sqrt{3-x}+\sqrt[3]{x+5}+\frac{1}{\sqrt[4]{2+x}}$.

Rješenje:

$$D_1 ... 3-x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 3,$$
$$D_2 ... x+5 \in \mathbf{R} \Leftrightarrow x \in \mathbf{R},$$
$$D_3 ... 2+x > 0 \Leftrightarrow x > -2.$$

Odavde je $\mathcal{D}(f)=D_1 \cap D_2 \cap D_3 = \langle -2, 3]$. $\square$

Zadatak 10 *Odredite $\mathcal{D}(f)$, $\mathcal{R}(f)$, $\mathcal{N}(f)$ i $f^{-1}(x)$ funkcije* $f(x)=\dfrac{x+1}{2x-3}$.

Rješenje:

* $f(x)=0 \ \Leftrightarrow \ x=-1$
* $2x-3 \neq 0 \ \Leftrightarrow \ x \neq 3/2 \ \Rightarrow \ \mathcal{D}(f)=\mathbf{R}\backslash\{3/2\}$
* $x=f(f^{-1}(x))=\dfrac{f^{-1}(x)+1}{2f^{-1}(x)-3} \ \Leftrightarrow f^{-1}(x)=\dfrac{3x+1}{2x-1}$
 $\Rightarrow \mathcal{R}(f)=\mathbf{R}\backslash\{1/2\}$

$\square$

ODREDITE DOMENE SLJEDEĆIH FUNKCIJA:

Zadatak 11

$$f(x)=\ln|\sin x-\cos x|+\sqrt[3]{\sin x-\cos x}+\sqrt[4]{14x-40-x^2}$$

Rješenje:

$$\mathcal{D}_1 \quad \ldots \quad |\sin x-\cos x|>0 \Leftrightarrow \sin x \neq \cos x \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{4}+k\pi, k \in \mathbf{Z}$$
$$\mathcal{D}_2 \quad \ldots \quad -x^2+14x-40 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in [4,10]$$
$$x_{1,2}=\frac{-14 \pm \sqrt{196-160}}{-2}=\frac{-14 \pm 6}{-2} \Rightarrow x_1=10, \quad x_2=4$$
$$\Longrightarrow \qquad \mathcal{D}(f)=\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2=[4,10] \setminus \left\{\frac{9\pi}{4}\right\}$$
$$\left(\frac{5\pi}{4} \approx 3.93 < 4, \quad \frac{13\pi}{4} \approx 10.21 > 10\right)$$

$\square$

Zadatak 12

$$f(x) = \arcsin \frac{1-x^2}{1+x^2} + (1 - \log_2^2 x)^{-2}$$

Rješenje:

$$\begin{array}{llcl}
\mathcal{D}_1 \ldots & -1 & \leq \dfrac{1-x^2}{1+x^2} \leq & 1 \\[2ex]
\Leftrightarrow & -1-x^2 & \leq 1-x^2 \leq & 1+x^2 \\
 & \Downarrow & & \Downarrow \\
 & 0 \leq 2 & & 2x^2 \geq 0
\end{array}$$

$$\mathcal{D}_2 \ldots \quad x > 0$$

$$\begin{array}{llll}
\mathcal{D}_3 \ldots & 1 - \log_2^2 x \neq 0 & \Leftrightarrow \log_2^2 x \neq 1 & \Leftrightarrow \log_2 x \neq \pm 1 \\
 & \Rightarrow x \neq 2 & \quad x \neq \frac{1}{2} &
\end{array}$$

$$\Rightarrow \mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2 \cap \mathcal{D}_3 = \langle 0, +\infty \rangle \setminus \left\{ \frac{1}{2}, 2 \right\}$$

□

Zadatak 13

$$f(x) = (\log_{e-2} \operatorname{arctg} e^x)^{-1/2}$$

Rješenje: $0 < e-2 < 1$ te zaključujemo da je ova logaritamska funkcija padajuća. Mora vrijediti

$$\log_{e-2} \operatorname{arctg} e^x > 0 \Leftrightarrow 0 < \operatorname{arctg} e^x < 1$$

Lijeva nejednakost je zadovoljena za $\forall x \in \mathbf{R}$ budući je $e^x > 0, \forall x \in \mathbf{R}$, a desna:

$$\operatorname{arctg} e^x < 1 \Leftrightarrow e^x < \operatorname{tg} 1 \Leftrightarrow x < \ln \operatorname{tg} 1$$

Domena ove funkcije je stoga: $\mathcal{D}(f) = \langle -\infty, \ln \operatorname{tg} 1 \rangle$ □

Zadatak 14

$$f(x) = \sqrt{x + 3\sqrt{x+1}}$$

Rješenje:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{D}_1 \;\ldots\; x+1 \geq 0 \;\Leftrightarrow\; \mathbf{x} \geq \mathbf{-1}\\
&\mathcal{D}_2 \;\ldots\; x+3\sqrt{x+1} \geq 0 \;\Leftrightarrow\; \sqrt{x+1} \geq -\frac{x}{3}
\end{aligned}$$

Za $x \geq 0$ nejednadžba je zadovoljena. Kad je $x < 0$, nejednadžbu možemo kvadrirati te dobivamo:

$$x+1 \geq \frac{x^2}{9} \;\Leftrightarrow\; x^2 - 9x - 9 \geq 0 \;\Leftrightarrow\; x \in \left[\frac{3}{2}(3-\sqrt{13}),\; \frac{3}{2}(3+\sqrt{13})\right]$$

što znači da je $\mathcal{D}_2 \;\ldots\; x \in \left[\frac{3}{2}(3-\sqrt{13}), +\infty\right\rangle$. Uočimo: $3(3-\sqrt{13})/2 \approx -0.91$, pa zaključujemo

$$\mathcal{D}(f) = \mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2 = \mathcal{D}_2 = x \in \left[\frac{3}{2}(3-\sqrt{13}), +\infty\right\rangle$$

NAPOMENA: Skiciranjem krivulja $y = 3\sqrt{x+1}$ i $y = -x$, očitajte rješenje grafički. $\square$

Zadatak 15 *(DZ)*

$$f(x) = \left[\log_{1/3}\left(x^2 - 1/2\right)\right]^{1/2}$$

Rješenje: Mora vrijediti:

$$\begin{aligned}
&\log_{1/3}\left(x^2 - 1/2\right) \geq 0 \;\Leftrightarrow\; 0 < x^2 - 1/2 \leq 1\\
&\mathcal{D}_1 \;\ldots\; x^2 > 1/2 \;\Leftrightarrow\; |x| > \sqrt{2}/2 \;\Leftrightarrow\; x \in \langle -\infty, -\sqrt{2}/2\rangle \cup \langle \sqrt{2}/2, +\infty\rangle\\
&\mathcal{D}_2 \;\ldots\; x^2 \leq 3/2 \;\Leftrightarrow\; |x| \leq \sqrt{6}/2 \;\Leftrightarrow\; x \in [-\sqrt{6}/2, \sqrt{6}/2]\\
&\Rightarrow \mathcal{D}(f) = \mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2 = [-\sqrt{6}/2, -\sqrt{2}/2\rangle \cup \langle \sqrt{2}/2, \sqrt{6}/2]
\end{aligned}$$

$\square$

2 Granična vrijednost funkcije jedne varijable

Koristeći graničnu vrijednost funkcije ispitujemo ponašanje funkcije na rubovima domene (v. vertikalne asimptote, horizontalne asimptote, kose asimptote; uspoređivanje beskonačno malih veličina, uspoređivanje beskonačno velikih veličina; "razotkrivanje neodređenih oblika"

$$\frac{0}{0},\; \frac{\infty}{\infty},\; 0\cdot\infty,\; \infty-\infty,\; 0^0,\; 1^\infty,\; \infty^0.$$

Primjer 2 *a)* $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, $x_0 = 0, +\infty, -\infty$. *b)* $f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$, $x_0 = 0, +\infty$. *c)* $f(x) = (1+x)^{1/x}$, $x_0 = -1, 0, +\infty$.

Primjer 3 *Sljedeći oblici se također javljaju kod ispitivanja graničnog ponašanja funkcija:*

$$+\infty + \infty,\ \infty \cdot \infty,\ \frac{0}{\infty},\ \frac{\infty}{0},\ c^{\infty},\ c \neq 1,\ c^0,\ c \neq 0, \infty.$$

Jesu li i to neodređeni oblici?

Definicija 1 *Kaže se da je* $A \in \mathbf{R}$ *granična vrijednost (limes) funkcije* $f : D \to \mathbf{R}$ *u točki* $a \in D' = D \cup \partial D$ *ako za svaki* $\varepsilon > 0$ *postoji* $\delta > 0$*, tako da za svaki* $x \in D$ *za koji je* $0 < |x - a| < \delta$ *vrijedi* $|f(x) - A| < \varepsilon$.
Piše se: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$.

-osnovni limesi
-svojstva limesa
-definicija neprekidnosti
-neprekidnost elementarnih funkcija na svojoj domeni
-limes slijeva, limes zdesna

2.1 $a = \pm\infty$

Zadatak 16 *Izračunajte* $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3x^2 - x + 1}{5x^2 + x - 1}$.

Rješenje:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{3x^2 - x + 1 \mid : x^2}{5x^2 + x - 1 \mid : x^2} = \lim_{x \to \infty} \frac{3 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}{5 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}} = \frac{3}{5}$$

□

Zadatak 17 *Izračunajte* $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{x^3}{3x^2 - 4} - \dfrac{x^2}{3x + 2} \right)$.

Rješenje:

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^3}{3x^2 - 4} - \frac{x^2}{3x + 2} \right) = |\infty - \infty| = \lim_{x \to \infty} \frac{3x^4 + 2x^3 - 3x^4 + 4x^2}{(3x^2 - 4)(3x + 2)}$$
$$= \lim_{x \to \infty} \frac{2x^3 + 4x^{2|:x^3}}{(3x^2 - 4)(3x + 2)^{|:x^3}} = \lim_{x \to \infty} \frac{2 + \frac{4}{x}}{\left(3 - \frac{4}{x^2}\right)\left(3 + \frac{2}{x}\right)} = \frac{2}{9}.$$

Primjetite da u slučaju $x \to +\infty$ imamo oblik neodređenosti $+\infty - \infty$, dok u slučaju $x \to -\infty$ imamo oblik neodređenosti $-\infty + \infty$. □

Zadatak 18 *Izračunajte a)* $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ *b)* $\lim_{x\to-\infty} f(x)$, *ako je* $f(x) = \sqrt{x^2+2x+3} - \sqrt{x^2-2x+3}$.

Rješenje: Racionalizacijom brojnika se dobije $f(x) = \frac{4x}{\sqrt{x^2+2x+3}+\sqrt{x^2-2x+3}}$.

a)

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{4x}{\sqrt{x^2+2x+3}+\sqrt{x^2-2x+3}} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right|$$

$$= 4\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x}{\sqrt{x^2}}}{\frac{\sqrt{x^2+2x+3}+\sqrt{x^2-2x+3}}{\sqrt{x^2}}} = 4\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}} = \frac{4}{2} = 2.$$

b)

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{4x}{\sqrt{x^2+2x+3}+\sqrt{x^2-2x+3}} = \left|\frac{-\infty}{\infty}\right|$$

$$= 4\lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{x}{\sqrt{x^2}}}{\frac{\sqrt{x^2+2x+3}+\sqrt{x^2-2x+3}}{\sqrt{x^2}}} = 4\lim_{x\to-\infty} \frac{-1}{\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}} = \frac{-4}{2} = -2.$$

□

Zadatak 19 *Izračunajte*
a) $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt[3]{x^3+3x^2}-x)$, b) (DZ) $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-2x}-x)$.

Rješenje: a)

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt[3]{x^3+3x^2}-x) = |\infty-\infty| = \lim_{x\to+\infty}(\sqrt[3]{x^3+3x^2}-x)\frac{\sqrt[3]{(x^3+3x^2)^2}+x\sqrt[3]{x^3+3x^2}+x^2}{\sqrt[3]{(x^3+3x^2)^2}+x\sqrt[3]{x^3+3x^2}+x^2}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2}{\sqrt[3]{(x^3+3x^2)^2}+x\sqrt[3]{x^3+3x^2}+x^2} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right|$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2 \quad |:x^2}{\sqrt[3]{(x^3+3x^2)^2}+x\sqrt[3]{x^3+3x^2}+x^2 \quad |:x^2} = 3\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{(1+\frac{3}{x})^2}+\sqrt[3]{1+\frac{3}{x}}+1} = 1.$$

b)

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-2x}-x) = |\infty-\infty| = \lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-2x}-x)\frac{\sqrt{x^2-2x}+x}{\sqrt{x^2-2x}+x}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{-2x}{\sqrt{x^2-2x}+x} = \left|\frac{-\infty}{\infty}\right| = -2\lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2-2x}+x} = -2\lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{2}{x}}+1} = -1.$$

□

Zadatak 20 *Ako je* $f(x)=\frac{3^x-3^{-x}}{3^x+3^{-x}}$, *izračunajte a)* $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ *b)* $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

Rješenje:

$$\text{a)}\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{3^x-3^{-x}}{3^x+3^{-x}}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=\lim_{x\to+\infty}\frac{3^x-3^{-x}\quad |:3^x}{3^x+3^{-x}\quad |:3^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\left(\frac{1}{9}\right)^x}{1+\left(\frac{1}{9}\right)^x}=1.$$

$$\text{b)}\quad \lim_{x\to-\infty}\frac{3^x-3^{-x}}{3^x+3^{-x}}=\left|\frac{-\infty}{+\infty}\right|=\lim_{x\to-\infty}\frac{3^x-3^{-x}\quad |:3^{-x}}{3^x+3^{-x}\quad |:3^{-x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{9^x-1}{9^x+1}=-1.$$

□

2.2 Granična vrijednost i neprekidnost. "Tablične" granične vrijednosti

Definicija 2 *Kaže se da je funkcija* $f:D\to\mathbf{R}$ *neprekidna u* $x_0\in D$ *ako je* $\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

Kaže se da je funkcija f *neprekidna ako je neprekidna za svaki* $x_0\in D$.

Teorem 1 *Svaka elementarna funkcija je neprekidna na svojoj prirodnoj domeni.*

Zadatak 21 *Izračunajte a)* $\lim_{x\to-1} f(x)$ *b)* $\lim_{x\to2} f(x)$ *c)* $\lim_{x\to3} f(x)$ *d)* $\lim_{x\to0} f(x)$, *ako je* $f(x)=\frac{x^3-3x-2}{x+x^2}$.

Rješenje: a)

$$\lim_{x\to-1}\frac{x^3-3x-2}{x+x^2}=\left|\frac{0}{0}\right|=\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)^2(x-2)}{x(x+1)}=\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)(x-2)}{x}=\left|\frac{0}{-1}\right|=0.$$

$$\text{b)}\ \lim_{x\to2}\frac{x^3-3x-2}{x+x^2}=\left|\frac{0}{6}\right|=0.\qquad \text{c)}\ \lim_{x\to3}\frac{x^3-3x-2}{x+x^2}=\left|\frac{4}{3}\right|=\frac{4}{3}.$$

$$\text{d)}\quad \lim_{x\to0}\frac{x^3-3x-2}{x+x^2}=\left|\frac{-2}{0}\right|=\infty.$$

□

Zadatak 22 *(DZ) Izračunajte* $\lim_{x\to3}\frac{x^3-4x^2-3x+18}{x^3-5x^2+3x+9}$.

Rješenje:

$$\lim_{x\to3}\frac{x^3-4x^2-3x+18}{x^3-5x^2+3x+9}=\left|\frac{0}{0}\right|=\lim_{x\to3}\frac{(x-3)^2(x+2)}{(x-3)^2(x+1)}=\lim_{x\to3}\frac{x+2}{x+1}=\frac{5}{4}.$$

□

Zadatak 23 *Izračunajte a)* $\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{3x-3}-3}{4-x}$ *b)* $\lim_{x\to 4}\sqrt[3]{\frac{\sqrt{3x-3}-3}{4-x}}$.

Rješenje:

$$\text{a)}\ \lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{3x-3}-3}{4-x}=\left|\frac{0}{0}\right|=\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{3x-3}-3}{4-x}\cdot\frac{\sqrt{3x-3}+3}{\sqrt{3x-3}+3}$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{3(x-4)}{(4-x)(\sqrt{3x-3}+3)}=3\lim_{x\to 4}\frac{x-4}{4-x}\lim_{x\to 4}\frac{1}{\sqrt{3x-3}+3}=3\cdot(-1)\cdot\frac{1}{6}=-\frac{1}{2}.$$

$$\text{b)}\ \lim_{x\to 4}\sqrt[3]{\frac{\sqrt{3x-3}-3}{4-x}}=\sqrt[3]{\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{3x-3}-3}{4-x}}=-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}.$$

□

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1\quad\Rightarrow\quad\lim_{x\to x_0}\frac{\sin\varphi(x)}{\varphi(x)}=1,\ \text{ako}\ \lim_{x\to x_0}\varphi(x)=0.}$$

Zadatak 24 *Izračunajte a)* $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 6x}{x}$ *b)* $\lim_{x\to 0}\frac{\sin\pi x}{\sin(10x)}$.

Rješenje:

$$\text{a)}\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin 6x}{x}=\left|\frac{0}{0}\right|=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 6x}{6x}\cdot 6=6\lim_{x\to 0}\frac{\sin 6x}{6x}=6.$$

$$\text{b)}\lim_{x\to 0}\frac{\sin\pi x}{\sin 10x}=\left|\frac{0}{0}\right|=\lim_{x\to 0}\frac{\sin\pi x}{\pi x}\cdot\frac{10x}{\sin 10x}\cdot\frac{\pi}{10}=\frac{\pi}{10}\frac{\lim_{x\to 0}\frac{\sin\pi x}{\pi x}}{\lim_{x\to 0}\frac{\sin 10x}{10x}}=\frac{\pi}{10}.$$

□

Zadatak 25 *Izračunajte a)* $\lim_{x\to 0}\frac{2x+\sin 5x}{3x-\sin 4x}$ *b)* $\lim_{x\to\infty}\frac{2x+\sin 5x}{3x-\sin 4x}$.

Rješenje:

$$\text{a)}\lim_{x\to 0}\frac{2x+\sin 5x}{3x-\sin 4x}=\left|\frac{0}{0}\right|=\lim_{x\to 0}\frac{2+\frac{\sin 5x}{5x}\cdot 5}{3-\frac{\sin 4x}{4x}\cdot 4}=\frac{2+5}{3-4}=-7.$$

$$\text{b)}\lim_{x\to\infty}\frac{2x+\sin 5x}{3x-\sin 4x}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{\sin 5x}{x}}{3-\frac{\sin 4x}{x}}=\frac{2}{3}.$$

□

Zadatak 26 *Izračunajte a)* $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}$ *b) (DZ)* $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x+8}-2}{\sin 5x}$.

Rješenje:

$$\text{a)} \lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}} = \left|\frac{0}{0}\right| = \lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{x}\lim_{x\to 0}(\sqrt{x+2}+2) = 4\cdot 2\sqrt{2} = 8\sqrt{2}.$$

$$\text{b)} \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x+8}-2}{\sin 5x} = \left|\frac{0}{0}\right| = \lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin 5x}\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt[3]{(x+8)^2}+2\sqrt[3]{x+8}+4} = \frac{1}{5}\frac{1}{12} = \frac{1}{60}.$$

$\square$

Zadatak 27 *Izračunajte a) (DZ)* $\lim_{x\to 6}\frac{\sin(6-x)}{x^2-36}$ *b) (DZ)* $\lim_{x\to 6}\frac{6-x}{\sin(x^2-36)}$ *c)* $\lim_{x\to -2}\frac{\sin(8+4x)}{\sin(6x+12)}$.

Rješenje:

$$\text{a)} \quad \lim_{x\to 6}\frac{\sin(6-x)}{x^2-36} = \left|\frac{0}{0}\right| = \lim_{x\to 6}\frac{\sin(6-x)}{(x-6)(x+6)} = \lim_{x\to 6}\frac{\sin(6-x)}{x-6}\lim_{x\to 6}\frac{1}{x+6}$$

$$= -\frac{1}{12}\lim_{x\to 6}\frac{\sin(x-6)}{x-6} = -\frac{1}{12}.$$

$$\text{b)} \lim_{x\to 6}\frac{6-x}{\sin(x^2-36)} = \lim_{x\to 6}\frac{x^2-36}{\sin(x^2-36)}\cdot\frac{6-x}{x^2-36} = -1\cdot\lim_{x\to 6}\frac{1}{x+6} = -\frac{1}{12}.$$

$$\text{c)} \quad \lim_{x\to -2}\frac{\sin(8+4x)}{\sin(6x+12)} = \left|\frac{0}{0}\right| = \lim_{x\to -2}\frac{\sin 4(x+2)}{\sin 6(x+2)} = \lim_{x\to -2}\frac{\sin 4(x+2)}{4(x+2)}\cdot\frac{6(x+2)}{\sin 6(x+2)}\cdot\frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

$\square$

Zadatak 28 *Izračunajte a)* $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$ *b)* $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}$ *c)* $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^3}$.

Rješenje:

$$\text{a)} \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \left|\frac{0}{0}\right| = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2} = 2\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{x}\right)^2 = 2\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{x}\right)^2 = 2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}.$$

$$\text{b)} \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot x = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}\lim_{x\to 0} x = \frac{1}{2}\cdot 0 = 0.$$

$$\text{c)} \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot\frac{1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}\lim_{x\to 0}\frac{1}{x} = \frac{1}{2}\cdot\infty = \infty.$$

$\square$

$$\boxed{\lim_{x\to x_0}\frac{1-\cos\varphi(x)}{\varphi^2(x)} = \frac{1}{2}, \quad \text{ako} \quad \lim_{x\to x_0}\varphi(x) = 0.}$$

Zadatak 29 *Izračunajte a)* $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{3x}$ *b)* $\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}(3x)-\sin(3x)}{x^3}$.

Rješenje:

$$\text{a)}\quad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{3x}=\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{16x^2}\cdot 16x=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 16\cdot 0=0.$$

$$\text{b)}\quad \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}(3x)-\sin(3x)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x)\left(\frac{1}{\cos(3x)}-1\right)}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x)(1-\cos(3x))}{x^3\cos(3x)}=27\lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x)}{3x}\frac{1-\cos(3x)}{(3x)^2}\frac{1}{\cos(3x)}=27\cdot 1\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1}=\frac{27}{2}.$$

□

Zadatak 30 *Izračunajte* $\lim_{x\to\pi/6}\frac{2\sin x-1}{\cos(3x)}$.

Rješenje:

$$\lim_{x\to\pi/6}\frac{2\sin x-1}{\cos(3x)}=\left|\frac{0}{0}\right|=\left|\text{supst. } t=x-\frac{\pi}{6}\to 0;\ x=t+\frac{\pi}{6}\right|=\lim_{t\to 0}\frac{2\sin(t+\pi/6)-1}{\cos(3t+\pi/2)}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{3}\sin t+\cos t-1}{-\sin(3t)}=-\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{3}\frac{\sin t}{t}-\frac{1-\cos t}{t}}{\frac{\sin(3t)}{3t}3}=-\frac{\sqrt{3}-0}{1\cdot 3}=-\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

□

Zadatak 31 *Izračunajte a)* $\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}$ *b) (DZ)* $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} x}{x}$.

Rješenje:

$$a)\quad \lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=\left|\frac{0}{0}\right|=|\text{supst. } t=\arcsin x\to 0,\quad x=\sin t|=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\sin t}$$

$$=\frac{1}{\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}}=1$$

$$b)\quad \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} x}{x}=\left|\frac{0}{0}\right|=|\text{supst. } t=\operatorname{arctg} x\to 0,\quad x=\operatorname{tg} t|=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\operatorname{tg} t}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\cos t}{\frac{\sin t}{t}}=1$$

□

Zadatak 32 *(predavanja) Znajući da je* $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$ *pokažite da je* $\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$.

Rješenje:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = |1^\infty| = |\text{supst. } t=-x\to+\infty| = \lim_{t\to+\infty}\left(1-\frac{1}{t}\right)^{-t}$$

$$= \lim_{t\to+\infty}\left(\frac{t}{t-1}\right)^t = \lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t-1}\right)^t = \lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t-1}\right)^{t-1}\left(1+\frac{1}{t-1}\right) = e\cdot 1 = e.$$

□

$$\boxed{\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e \quad\Rightarrow\quad \lim_{x\to x_0}(1+\varphi(x))^{\frac{1}{\varphi(x)}} = e, \text{ ako } \lim_{x\to x_0}\varphi(x)=0.}$$

Zadatak 33 *(predavanja) Izračunajte a)* $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}$ *b)* $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}$.

Rješenje:

a) $$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = \left|\frac{0}{0}\right| = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln(1+x) = \lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln\left(\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right) = \ln e = 1.$$

b) $$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = \left|\frac{0}{0}\right| = |\text{supst. } t=e^x-1\to 0,\ \ x=\ln(t+1)| = \lim_{t\to 0}\frac{t}{\ln(t+1)}$$

$$= \frac{1}{\lim_{t\to 0}\frac{\ln(t+1)}{t}} = \frac{1}{1} = 1.$$

□

$$\boxed{\lim_{x\to x_0}\frac{\ln(1+\varphi(x))}{\varphi(x)} = 1, \quad \lim_{x\to x_0}\frac{e^{\varphi(x)}-1}{\varphi(x)} = 1 \text{ ako } \lim_{x\to x_0}\varphi(x)=0.}$$

Zadatak 34 *Izračunajte a)* $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{x^2}$ *b)* $\lim_{x\to\pi/2}(\sin x)^{\operatorname{tg} x}$.

Rješenje:

$$\text{a) } \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{x^2} = |1^\infty| = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x^2-1}\right)^{x^2}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{2}{x^2-1}\right)^{\frac{x^2-1}{2}}\right)^{\frac{2}{x^2-1}\cdot x^2} = e^{\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2}{x^2-1}} = e^2.$$

$$\text{b) } \lim_{x\to\pi/2} = (\sin x)^{\operatorname{tg} x} = |1^\infty| = \lim_{x\to\pi/2}(1+\sin x-1)^{\operatorname{tg} x}$$

$$= \lim_{x\to\pi/2}\left((1+\sin x-1)^{\frac{1}{\sin x-1}}\right)^{(\sin x-1)\operatorname{tg} x} = e^{\lim_{x\to\pi/2}(\sin x-1)\operatorname{tg} x} = e^{\lim_{t\to 0}\frac{\cos t-1}{-\sin t}} = e^0 = 1.$$

□

Zadatak 35 *Izračunajte* $\lim_{x\to 0}\frac{3^x-1}{5^x-1}$.

Rješenje:

$$\lim_{x\to 0}\frac{3^x-1}{5^x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x\ln 3}-1}{e^{x\ln 5}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{e^{x\ln 3}-1}{x\ln 3}\cdot\ln 3}{\frac{e^{x\ln 5}-1}{x\ln 5}\cdot\ln 5}=\frac{1\cdot\ln 3}{1\cdot\ln 5}=\frac{\ln 3}{\ln 5}.$$

$\square$

Zadatak 36 *Izračunajte a)* $\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x^2-x+1)}{\ln(x^{10}+x+1)}$ *b)* $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x^2-x+1)}{\ln(x^{10}+x+1)}$.

Rješenje:

$$\text{a)}\quad \lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x^2-x+1)}{\ln(x^{10}+x+1)}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left[x^2\left(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)\right]}{\ln\left[x^{10}\left(1+\frac{1}{x^9}+\frac{1}{x^{10}}\right)\right]}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x^2+\ln\left(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{\ln x^{10}+\ln\left(1+\frac{1}{x^9}+\frac{1}{x^{10}}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{\ln\left(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{\ln|x|}}{10+\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x^9}+\frac{1}{x^{10}}\right)}{\ln|x|}}=\frac{1}{5}.$$

$$\text{b)}\quad \lim_{x\to 0}\frac{\ln(x^2-x+1)}{\ln(x^{10}+x+1)}=\left|\frac{0}{0}\right|$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2-x)}{x^2-x}\,\frac{x+x^{10}}{\ln(1+x+x^{10})}\,\frac{x^2-x}{x+x^{10}}=1\cdot 1\cdot(-1)=-1.$$

$\square$

Zadatak 37 *Izračunajte a)* $\lim_{x\to 1}\frac{\arcsin(1-x^2)}{x^2+x-2}$ *b)* $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\sin(3x))}{x}$.

Rješenje: Koristeći "tablični" limes iz Zadatka 31(a), dobivamo

$$a)\quad \lim_{x\to 1}\frac{\arcsin(1-x^2)}{x^2+x-2}=\left|\frac{0}{0}\right|=\lim_{x\to 1}\frac{\arcsin(1-x^2)}{1-x^2}\cdot\frac{1-x^2}{x^2+x-2}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\arcsin(1-x^2)}{1-x^2}\cdot\lim_{x\to 1}\frac{-(x+1)}{x+2}=1\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)=-\frac{2}{3}$$

$$b)\quad \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\sin(3x))}{x}=\left|\frac{0}{0}\right|=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\sin(3x))}{\sin 3x}\cdot\frac{\sin 3x}{x}$$

$$=1\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}\cdot 3=3$$

$\square$

3 Diferencijalni račun funkcije jedne varijable

Definicija 3 *Derivacija funkcije $y = f(x)$ u točki x_0 je limes (ako postoji)*

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$$

Pritom je

$$\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

totalni prirast funkcije f, odnosno prirast zavisne varijable, dok je Δx prirast nezavisne varijable.

OZNAKE: y', $\dfrac{dy}{dx}$

Zadatak 38 *Odredite po definiciji $f'(0)$ i $f'(1)$ ako je $f(x) = \sqrt{1+x}$.*

Rješenje:

$$f'(0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{1+\Delta x} - 1}{\Delta x} = \left(\frac{0}{0}\right) \cdot \frac{\sqrt{1+\Delta x}+1}{\sqrt{1+\Delta x}+1} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1+\Delta x - 1}{\Delta x(\sqrt{1+\Delta x}+1)} = \frac{1}{2}$$

$$f'(1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{2+\Delta x} - \sqrt{2}}{\Delta x} = \left(\frac{0}{0}\right) \cdot \frac{\sqrt{2+\Delta x}+\sqrt{2}}{\sqrt{2+\Delta x}+\sqrt{2}} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{(\sqrt{2+\Delta x}+\sqrt{2})} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

□

Zadatak 39 *Odredite po definiciji $f'(2)$ ako je $f(x) = \ln(1+x)$.*

Rješenje:

$$f'(2) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\ln(3+\Delta x) - \ln 3}{\Delta x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\ln\left(1+\frac{\Delta x}{3}\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\ln\left(1+\frac{\Delta x}{3}\right)}{\frac{\Delta x}{3} \cdot 3} = \frac{1}{3}$$

□

Zadatak 40 *Odredite po definiciji $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$ ako je $f(x) = \sin x$.*

Rješenje:

$$\begin{aligned} f'\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\Delta x\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\Delta x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos\Delta x - 1}{\Delta x} \\ &= -\lim_{\Delta x \to 0} \frac{1-\cos\Delta x}{(\Delta x)^2} \cdot \Delta x = -\frac{1}{2} \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

□

$$\boxed{\begin{aligned}
&(f \pm g)' = f' \pm g' \\
&(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g' \\
&(c \cdot f)' = c \cdot f', \qquad c \in \mathbf{R} \\
&\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}, \qquad g \neq 0
\end{aligned}}$$

Zadatak 41 *Odredite $f'(x)$ ako je*

$$\begin{array}{ll}
a)\ f(x) = 5x^2 - 2x + 3, & Rj : f'(x) = 10x - 2 \\
b)\ f(x) = x^2 \cdot \ln x & Rj : f'(x) = x(2\ln x + 1) \\
c)\ f(x) = \dfrac{3^x}{\cos x}, & Rj : f'(x) = \dfrac{3^x \cdot \ln 3 \cdot \cos x + 3^x \cdot \sin x}{\cos^2 x} \\
d)\ f(x) = x\sqrt{x} + \dfrac{2}{x^2}, & Rj : f'(x) = \dfrac{3}{2}\sqrt{x} - \dfrac{4}{x^3}
\end{array}$$

Zadatak 42 *Ako je $f(x) = e^x \sin x$, izračunajte $f'(0)$.*

Rješenje:

$$f'(x) = e^x \sin x + e^x \cos x, \quad f'(0) = 1$$

$\square$

3.1 Derivacija složene funkcije

Vrijedi :

$$\boxed{[g(f(x))]' = g'(f(x)) \cdot f'(x)}$$

Zadatak 43 *Odredite $f'(x)$ ako je*

$$\begin{array}{ll}
a)\ f(x) = \cos^5 x & Rj : f'(x) = -5\cos^4 x \cdot \sin x \\
b)\ f(x) = \ln \operatorname{tg} \dfrac{x}{2} & Rj : f'(x) = \dfrac{1}{\sin x}
\end{array}$$

Zadatak 44 *Odredite $f'(x)$ ako je $f(x) = \ln|x|$.*

Rješenje: $f(x) = \begin{cases} \ln x, & x > 0, \\ \ln(-x), & x < 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{x}, \quad x \neq 0$ □

Zadatak 45 *Odredite $f'(x)$ ako je $f(x) = \sin^6 x + \cos^6 x$.*

Rješenje:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 6\sin^5 x \cdot \cos x - 6\cos^5 x \cdot \sin x = 6 \sin x \cos x (\sin^2 x - \cos^2 x)(\sin^2 x + \cos^2 x) \\ &= -3 \sin 2x \cos 2x = -\frac{3}{2} \sin 4x \end{aligned}$$

□

3.2 Logaritamsko deriviranje

- predavanja

Zadatak 46 $y = (1+x)^{\frac{1}{x}}$ *(domena!)*

Rješenje:

$$y = e^{\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}} = e^{\frac{1}{x} \cdot \ln(1+x)} \quad \Rightarrow \quad y' = (1+x)^{\frac{1}{x}-1} \cdot \frac{x - (1+x)\ln(1+x)}{x^2}$$

□

Zadatak 47 $y = (\cos x)^x + x^{\cos x}$

Rješenje:

$$\begin{aligned} & y = e^{x \cdot \ln(\cos x)} + e^{\cos x \cdot \ln x} \\ & \Rightarrow y' = (\cos x)^x \cdot [\ln(\cos x) - x \operatorname{tg} x] + x^{\cos x} \cdot \left[-\sin x \cdot \ln x + \frac{\cos x}{x} \right] \end{aligned}$$

□

Zadatak 48 $y = \operatorname{arctg}(x^x)$

Rješenje:

$$y = \operatorname{arctg}(e^{x \cdot \ln x}) \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{x^x \cdot (\ln x + 1)}{1 + x^{2x}}$$

□

Zadatak 49 $\quad y = x^{x^x}$

Rješenje:

$$\ln y = x^x \cdot \ln x \quad \Rightarrow \quad \ln(\ln y) = x \cdot \ln x + \ln(\ln x)\Big|'$$
$$\Rightarrow \frac{1}{\ln y} \cdot \frac{1}{y} \cdot y' = \ln x + x \cdot 1x + \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x}$$
$$\Rightarrow y' = y \ \ln y \left(\ln x + 1 + \frac{1}{x \cdot \ln x} \right) = x^{x^x} \cdot x^x \cdot \ln x \left(\ln x + 1 + \frac{1}{x \cdot \ln x} \right)$$

□

3.3 Derivacije višeg reda

Vrijedi:

$$\boxed{\begin{array}{l} y'' = (y')' \\[2ex] y^{(n)} = (y^{(n-1)})' = \dfrac{d^n y}{dx^n} = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right) \end{array}}$$

Zadatak 50 *Ako je* $y = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$*, odredite* y''*.*

Rješenje:

$$y' = \frac{1}{1+x^2}, \quad y'' = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$$

□

Zadatak 51 *Ako je* $f(x) = \frac{1}{5x+2}$*, odredite* $f^{(5)}(1)$*.*

Rješenje:

$$f'(x) = -\frac{5}{(5x+2)^2}, \quad f''(x) = \frac{2 \cdot 5^2}{(5x+2)^3}, \quad f'''(x) = -\frac{3! \cdot 5^3}{(5x+2)^4},$$
$$f^{(4)}(x) = \frac{4! \cdot 5^4}{(5x+2)^5}, \quad f^{(5)}(x) = -\frac{5! \cdot 5^5}{(5x+2)^6}$$
$$\Rightarrow \quad f^{(5)}(1) = -\frac{5! \cdot 5^5}{(5 \cdot 1 + 2)^6} = -\frac{375000}{117649}$$

□

4 Primjena diferencijalnog računa funkcije jedne varijable

4.1 Tangenta, normala, kut među krivuljama

Jednadžba tangente na krivulju $y = f(x)$ s diralištem $D(x_D, y_D)$ glasi:

$$t \dots y - y_D = f'(x_D)(x - x_D).$$

Jednadžba normale glasi:

$$n \dots y - y_D = -\frac{1}{f'(x_D)}(x - x_D).$$

Zadatak 52 *Odredite one tangente krivulje $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + x$ koje su paralelne s pravcem $p \dots y = -x$.*

Rješenje: Označimo dirališne točke traženih tangenata sa (x_D, y_D). Iz uvjeta paralelnosti slijedi jednakost koeficijenata smjera $k_t = k_p$, što daje $y'(x_D) = k_p$ odnosno $x_D^2 - 3x_D + 1 = -1$. Rješavanjem dobijemo $x_{D_1} = 1$, $x_{D_2} = 2$. Koordinate dirališni točaka su: $D_1(1, -1/6)$, $D_2(2, -4/3)$. Jednadžbe traženih tangenata su:

$$t_1 \dots y + \frac{1}{6} = -1(x - 1) \Leftrightarrow y = -x + \frac{5}{6},$$

$$t_2 \dots y + \frac{4}{3} = -1(x - 2) \Leftrightarrow y = -x + \frac{2}{3}.$$

□

Zadatak 53 *Odredite jednadžbu tangente na krivulju $y = \frac{x-1}{x}$ koja prolazi točkom $T(4, 1)$.*
Ekvivalentna formulacija: Odredite $k \in \mathbf{R}$ tako da je pravac $y - 1 = k(x - 4)$ tangenta krivulje $y = \frac{x-1}{x}$.

Rješenje: Označimo dirališnu točku tražene tangente sa $D(x_D, y_D)$ pri čemu je $y_D = \frac{x_D - 1}{x_D}$. Kako je $y' = \frac{1}{x^2}$ to jednadžba tangente glasi

$$t \dots y - \frac{x_D - 1}{x_D} = \frac{1}{x_D^2}(x - x_D).$$

Kako tangenta t prolazi točkom $T(4, 1)$ to uvrštavanjem u jednadžbu tangente dobivamo

$$1 - \frac{x_D - 1}{x_D} = \frac{1}{x_D^2}(4 - x_D)$$

što rješavanjem daje $x_D = 2$. Odavde je dirališna točka $D(2, \frac{1}{2})$. Jednadžba tražene tangente je

$$t \ldots y - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}(x-2) \Leftrightarrow y = \frac{1}{4}x.$$

□

Zadatak 54 *Ishodištem koordinatnog sustava prolazi tangenta krivulje $y = \sqrt{x-1}$. Koliki kut zatvara ta tangenta s osi apscisa?*

Rješenje: Označimo $x-$koordinatu dirališne točke sa x_D odnosno $D(x_D, \sqrt{x_D - 1})$. Kako je $y' = \frac{1}{2\sqrt{x-1}}$ to jednadžba tangente glasi

$$t \ldots y - \sqrt{x_D - 1} = \frac{1}{2\sqrt{x_D - 1}}(x - x_D).$$

Kako tangenta prolazi ishodištem koordinatnog sustava $O(0,0)$ uvrštavanjem dobije se jednadžba

$$0 - \sqrt{x_D - 1} = \frac{1}{2\sqrt{x_D - 1}}(0 - x_D) \Leftrightarrow -2(x_D - 1) = -x_D \Leftrightarrow x_D = 2$$

čime se dobije $D(2,1)$, te $\operatorname{tg}\alpha = k_t = y'(2) = \frac{1}{2}$. Traženi kut je $\alpha = \operatorname{arctg}\frac{1}{2} = 0.4636 = 26°33'54''$. □

Zadatak 55 *(DZ) Pod kojim kutom krivulja $y = e^{-2x}$ presijeca os ordinata?*

Rješenje: Presječna točka je očito $T(0,1)$. Kako je $y' = -2e^{-2x}$, to je $y'(0) = -2$. Odavde je $\operatorname{tg}\alpha = k_t = y'(0) = -2$ (pri čemu je α kut između tangente i pozitivnog smjera $x-$osi). Slijedi $\alpha = 116°33'54''$. Iz slike se lako vidi da traženi kut iznosi $\alpha - 90° = 26°33'54''$. □

Zadatak 56 *Odredite kut među krivuljama $x^2 + y^2 = 8$, $y^2 = 2x$.*

Rješenje: Rješavanjem sustava $x^2 + y^2 = 8$, $y^2 = 2x$ dobiju se presječne točke zadanih krivulja $S_1(2,2)$, $S_2(2,-2)$. Kako su krivulje zrcalno simetrične s obzirom na $x-$os dovoljno je naći kut u točki S_1 (jednak kutu u S_2).

Iz $x^2 + y^2 = 8$ deriviranjem slijedi $y' = -x/y$ odakle je koeficijent smjera tangente na prvu krivulju u točki S_1 jednak $k_1 = y'(2) = -2/2 = -1$.

Iz $y^2 = 2x$ deriviranjem slijedi $y' = 1/y$, odakle je koeficijent smjera tangente na drugu krivulju u S_1 jednak $k_2 = y'(2) = 1/2$.

Konačno, tangens traženog kuta je

$$\operatorname{tg}\varphi = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}\right| = 3$$

što daje $\varphi = \operatorname{arctg} 3 = 71°33'54'' = 1.249$. □

Zadatak 57 *(DZ) Dokažite da su familije krivulja $y = ax$ i $x^2 + y^2 = b^2$ ortogonalne tj. da svaka krivulja iz prve familije siječe svaku krivulju iz druge familije pod pravim kutom.*

Rješenje: Neka je sa $S(x_s, y_s)$ označeno proizvoljno sjecište tih krivulja.

Iz $y = ax$ dobije se $y' = a$ odakle je koeficijent smjera tangente na krivulju $y = ax$ u S jednak $k_1 = y'(x_s) = a$.

Iz $x^2 + y^2 = b^2$ deriviranjem se dobije $y' = -x/y$ odakle je koeficijent smjera tangente na krivulju $x^2 + y^2 = b^2$ u S jednak $k_2 = y'(x_s) = -x_s/y_s = -1/a$ ($S(x_s, y_s)$ leži i na $y = ax$).

Kako je odavde $k_1 k_2 = -1$ slijedi ortogonalnost zadanih krivulja. □

Zadatak 58 *(DZ) Dokažite da su familije hiperbola $xy = a^2$ i $x^2 - y^2 = b^2$ ortogonalne.*

Zadatak 59 *(DZ) U sjecištu krivulje $y = \sqrt{2-x}$ s osi ordinata položena je tangenta na krivulju. Kolika je udaljenost te tangente od ishodišta?*

Rješenje: Uvrštavanjem $x = 0$ u jednadžbu krivulje (gornji dio parabole) $y = \sqrt{2-x}$ dobije se presječna točka krivulje i $y-$osi $D(0, \sqrt{2})$, koja je i dirališna točka tangente. Kako je $y' = -\frac{1}{2\sqrt{2-x}}$ to jednadžba tražene tangente glasi

$$t \ldots y - \sqrt{2} = -\frac{\sqrt{2}}{4}(x - 0)$$

ili u implicitnom obliku

$$t \ldots \sqrt{2}x + 4y - 4\sqrt{2} = 0.$$

Iz formule za udaljenost točke od pravca slijedi

$$d(O(0,0), t) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|\sqrt{2} \cdot 0 + 4 \cdot 0 - 4\sqrt{2}|}{\sqrt{2 + 16}} = \frac{4}{3}.$$

□

Zadatak 60 *(DZ) Odredite jednadžbu one normale krivulje $y = x \ln x$ koja je okomita na pravac $p \ldots 2x - 2y - 3 = 0$.*

Rješenje: Dovoljno je naći tangente koje su paralelne sa pravcem p. Kao u prethodnom zadatku iz jednakosti koeficijenata smjera (koristeći da je $y' = \ln x + 1$) dobiva se jednadžba $\ln x_D + 1 = 1$, što daje $x_D = 0$ pa onda i $y_D = 0$. Jednadžba normale glasi

$$n \ldots y - 0 = -1(x - 1) \Leftrightarrow y = -x + 1.$$

□

Zadatak 61 *(DZ) Pod kojim se kutom sijeku krivulje $y = \sqrt{2x}$ i $y = \frac{1}{2}x^2$.*

4.2 Diferencijal funkcije i njegova primjena

Ako funkcija f u x_0 ima $n-$tu derivaciju tada se diferencijal $n-$tog reda u x_0 za prirast nezavisne varijable Δx definira sa

$$d^n f(x_0) = f^{(n)}(x_0)(\Delta x)^n,$$

pri čemu diferencijal prvog reda $d^1 f(x_0)$ pišemo $df(x_0)$ i nazivamo totalnim diferencijalom ili samo diferencijalom.

Kako je za funkciju $f(x) = x$

$$df(x) = f'(x)\Delta x = \Delta x$$

to se dobije $dx = \Delta x$ pa možemo pisati

$$d^n f(x_0) = f^{(n)}(x_0)(dx)^n, \;\; df(x_0) = f'(x_0)dx.$$

Iz $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$ ako je $f'(x_0) \neq 0$ se dobije linearna aproksimacija (u smislu linearnog prirasta nezavisne varijable Δx

$$\Delta f(x_0) \approx f'(x_0)\Delta x = df(x_0)$$

odnosno

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + df(x_0) = f(x_0) + f'(x_0)\Delta x.$$

Analogno uz uvjet $f''(x_0) \neq 0$ se dobije kvadratna aproksimacija

$$f(x_0+\Delta x) \approx f(x_0)+df(x_0)+\frac{1}{2!}d^2 f(x_0) = f(x_0)+f'(x_0)\Delta x+\frac{1}{2!}f''(x_0)(\Delta x)^2$$

ili općenito uz uvjet $f^{(n)}(x_0) \neq 0$ aproksimacija $n-$tog reda

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + df(x_0) + \frac{1}{2!}d^2 f(x_0) + \cdots + \frac{1}{n!}d^n f(x_0).$$

Zadatak 62 *Za funkciju* $f(x) = x^3 - 2x + 1$ *odredite* $\Delta f(1)$, $df(1)$, $d^2 f(1)$, $d^3 f(1)$, *te provjerite jednakost*

$$\Delta f(1) = df(1) + \frac{1}{2!}d^2 f(1) + \frac{1}{3!}d^3 f(1).$$

Rješenje:

$$\Delta f(1) = f(1+\Delta x)-f(1) = (1+\Delta x)^3-2(1+\Delta x)^2+1-0 = \Delta x+3(\Delta x)^2+(\Delta x)^3.$$

Kako je $f'(x) = 3x^2 - 2$, $f''(x) = 6x$, $f'''(x) = 6$, to je

$$df(1) = f'(1)\Delta x = \Delta x, \; d^2 f(1) = f''(1)(\Delta x)^2 = 6(\Delta x)^2,$$

$$d^3f(1) = f'''(1)(\Delta x)^3 = 6(\Delta x)^3$$

pa je

$$df(1) + \frac{1}{2!}d^2f(1) + \frac{1}{3!}d^3f(1) = \Delta x + 3(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3.$$

Uspoređivanjem dobivenih izraza za $\Delta f(1)$ i $df(1)+\frac{1}{2!}d^2f(1)+\frac{1}{3!}d^3f(1)$ slijedi tražena jednakost. $\square$

Zadatak 63 *(DZ) Za funkciju* $f(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 5$ *odredite* $\Delta f(2)$, $df(2)$, $d^2f(2)$, $d^3f(2)$, $d^4f(2)$, *te provjerite jednakost*

$$\Delta f(2) = df(2) + \frac{1}{2!}d^2f(2) + \frac{1}{3!}d^3f(2) + \frac{1}{4!}d^4f(2).$$

Iskoristite dobivenu jednakost da polinom $f(x)$ *raspišete po potencijama od* $x - 2$.

Zadatak 64 *Odredite približnu vrijednost za* $\sqrt[3]{1.2}$ *koristeći a) linearnu aproksimaciju b) kvadratnu aproksimaciju.*

Rješenje: Stavljajući $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $x_0 = 1$, $\Delta x = 0.2$, te uzimajući u obzir $f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$, $f''(x) = -\frac{2}{9}\frac{1}{\sqrt[3]{x^5}}$, dobiva se

a)

$$\sqrt[3]{1.2} \approx \sqrt[3]{1} + \frac{1}{3\sqrt[3]{1^2}}0.2 \approx 1.06667.$$

b)

$$\sqrt[3]{1.2} \approx \sqrt[3]{1} + \frac{1}{3\sqrt[3]{1^2}}0.2 - \frac{1}{2}\frac{2}{9}\frac{1}{\sqrt[3]{1^5}}0.2^2 \approx 1.06223.$$

$\square$

Zadatak 65 *Izračunajte približnu vrijednost za* $\sin 29^\circ$ *koristeći a) linearnu aproksimaciju b) kvadratnu aproksimaciju.*

Rješenje: Stavljajući $f(x) = \sin x$, $x_0 = \frac{\pi}{6}$, $\Delta x = -1^\circ = -\frac{\pi}{180}$ dobivamo

a)

$$\sin 29^\circ \approx \sin\frac{\pi}{6} + \cos\frac{\pi}{6}\cdot\left(-\frac{\pi}{180}\right) = \frac{1}{2} - \frac{\pi\sqrt{3}}{360} \approx 0.48489.$$

b)

$$\sin 29^\circ \approx \sin\frac{\pi}{6} + \cos\frac{\pi}{6}\cdot\left(-\frac{\pi}{180}\right) - \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{6}\left(-\frac{\pi}{180}\right)^2 = \frac{1}{2} - \frac{\pi\sqrt{3}}{360} - \frac{\pi^2}{4\cdot 180^2}$$
$$\approx 0.48481.$$

$\square$

4.3 Primjena lokalnih ekstrema

Definicija 4 *Funkcija f ima u x_0 stacionarnu točku ako je $f'(x_0) = 0$.*

Neka je x_0 stacionarna točka funkcije f. Ako je $f''(x_0) > 0$, tada u točki $(x_0, f(x_0))$ funkcija postiže lokalni minimum, a ako je $f''(x_0) < 0$ tada funkcija u toj točki postiže lokalni maksimum.

Funkcija postiže svoje ekstremalne vrijednosti (maksimum i minimum) na intervalu ili na rubu intervala ili u svojim stacionarnim točkama.

Zadatak 66 *Odredite lokalne i globalne ekstreme funkcije $f(x) = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 1$ na $[-1, 2]$.*

Rješenje:

$$\begin{aligned}
&f'(x) = 5x^4 - 20x^3 + 15x^2\\
&f'(x) = 0 \ \Leftrightarrow\ 5x^2(x^2 - 4x + 3) = 0 \ \Leftrightarrow\ x_{1,2} = 0,\ \ x_3 = 1,\ \ x_4 = 3 \notin [-1, 2]\\
&f''(x) = 20x^3 - 60x^2 + 30x\\
&f''(0) = 0, \quad f''(1) = -25 < 0 \ \Rightarrow M(1, 2)\ \text{ lokalni maksimum}\\
&f(-1) = -10, \quad f(2) = -7 \ \Rightarrow m(-1, -10)\ \text{ globalni minimum}
\end{aligned}$$

□

Zadatak 67 *(DZ) Odredite lokalne i globalne ekstreme funkcije $f(x) = \frac{x}{x^2+2x+4}$.*

Rješenje: maksimum u $M(2, 1/6)$, minimum u $m(-2, -1/2)$ □

Zadatak 68 *Odredite duljine stranica pravokutnika maksimalne površine upisanog u lik $2|y| \leq x \leq 6 - |y|$ pri čemu su stranice pravokutnika paralelne s koordinatnim osima.*

Rješenje:

$$\begin{aligned}
&P = 2ab, \quad a = 6 - y - 2y = 6 - 3y,\ y > 0,\\
&\qquad\qquad b = y\\
&\Rightarrow\ P(y) = 2(6 - 3y) \cdot y = 12y - 6y^2,\ y > 0,\\
&P'(y) = 12 - 12y = 0 \ \Leftrightarrow\ y = 1\\
&P''(y) = -12 < 0 \ \ \Rightarrow\ \text{u } x = 1 \ \text{ postiže se maksimum}\\
&P_{max} = P(1) = 6, \quad a_{max} = 3, \quad b_{max} = 1
\end{aligned}$$

□

Zadatak 69 *(DZ) U lik omeđen lukom krivulje* $y = \sqrt{12 - x}$ *i koordinatnim osima upišite pravokutnik maksimalne površine. Kolike su stranice i površina tog pravokutnika?*

Rješenje:

$$P(x) = x \cdot y = x \cdot \sqrt{12 - x} = \sqrt{12x^2 - x^3}, \quad 0 < x < 12$$

Kako je korijenska funkcija monotona (rastuća), to je dovoljno promatrati funkciju ispod korijena: $f(x) = 12x^2 - x^3$. Tražimo njene stacionarne točke:

$$f'(x) = 24x - 3x^2 = 0 \;\Leftrightarrow\; x_1 = 0, \;\; x_2 = 8$$
$$f''(x) = 24 - 6x \;\Rightarrow\; f''(8) = -24 < 0$$

što znači da se za $x = 8$ postiže maksimum. Dakle, duljine stranica pravokutnika maksimalne površine upisanog u zadani lik su: $x_{max} = 8, \;\; y_{max} = 2$. Sama površina iznosi: $P_{max} = P(8) = 16$. □

Zadatak 70 *Koja je točka grafa funkcije* $y = \sqrt{-\ln x}$ *najbliža ishodištu?*

Rješenje: Udaljenost proizvoljne točke sa zadane krivulje od ishodišta je:

$$d(O,T) = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2 - \ln x}$$

dovoljno je gledati: $f(x) = x^2 - \ln x, \;\; x \in \langle 0, 1]$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = +\infty, \quad f(1) = 1$$

$$f'(x) = \frac{2x^2 - 1}{x} = 0 \;\Leftrightarrow\; 2x^2 - 1 = 0 \;\Rightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$f''(x) = 2 + \frac{1}{x^2} > 0, \;\; \forall x \;\Rightarrow\; \text{minimum}$$

$$f\left(\sqrt{2}/2\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\ln 2 = \frac{1}{2}(1 + \ln 2) < \frac{1}{2} \cdot 2 = 1 \;\Rightarrow\; m\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{\ln\sqrt{2}}\right)$$

□

Zadatak 71 *(DZ) Među svih pravokutnicima opsega* $2a$*, odredite duljine stranica onog maksimalne površine.*

Rješenje:

$$O = 2x + 2y = 2a \;\Rightarrow\; y = a - x$$
$$P(x) = x \cdot y = x \cdot (a - x) = ax - x^2, \;\; 0 < x < a$$
$$P'(x) = a - 2x = 0 \;\Leftrightarrow\; x = \frac{a}{2}$$
$$P''(x) = -2 \;\Rightarrow\; x_{max} = \frac{a}{2}, \;\; P_{max} = P\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{a^2}{4} \quad \text{KVADRAT!}$$

□

Zadatak 72 *Iz okruglog papira izrezati kružni isječak koji savijen daje ljevak najvećeg volumena.*

Rješenje: uvedimo oznake: R - polumjer okruglog papira, r-polumjer baze stošca, H- visina stošca

$$
\begin{aligned}
&2r\pi = R\alpha \;\Rightarrow\; r = \frac{R}{2\pi}\alpha \\
&H = \sqrt{R^2 - r^2} = R\sqrt{1 - \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^2} \\
&V = \frac{1}{3}\, r^2\pi \cdot H = \frac{1}{12\pi}\,\alpha^2 \cdot R^3\sqrt{1 - \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^2}, \quad 0 \leq \alpha \leq 2\pi \\
&\text{dovoljno je gledati: } g(\alpha) = \alpha^4 - \frac{\alpha^6}{4\pi^2} \\
&g'(\alpha) = 4\alpha^3 - \frac{3\alpha^5}{2\pi^2} = 0 \;\Rightarrow\; \alpha = 0,\;\; \alpha = \frac{2\sqrt{6}}{3}\pi \\
&g''(\alpha) = 12\alpha^2 - \frac{15\alpha^4}{2\pi^2} \;\Rightarrow\; g''\left(\frac{2\pi\sqrt{6}}{3}\right) = -\frac{64}{3}\pi^2 < 0 \\
&V_{max} = V\left(\frac{2\pi\sqrt{6}}{3}\right) = \frac{2\sqrt{3}}{27}R^3\pi
\end{aligned}
$$

□

Zadatak 73 *(DZ) U kuglu polumjera R upišite stožac maksimalnog volumena. Koliko iznosi polumjer baze i visina tog stošca?*

Rješenje: r - polumjer baze stošca, h - visina stošca

$$V(h) = \frac{\pi}{3}(2Rh^2 - h^3),\;\; h_{max} = \frac{4R}{3},\;\; r_{max} = \frac{R}{3}\cdot 2\sqrt{2}$$

□

Zadatak 74 *(DZ) Među svim pravokutnim trokutima opsega $2S$, odredite duljine stranica onog maksimalne površine.*

4.4 L'Hospitalovo pravilo

[L'Hospitalovo pravilo za neodređeni oblik $\frac{0}{0}$] Neka su $f, g : (a, b) \setminus \{x_0\} \mapsto \mathbf{R}$ derivabilne funkcije pri čemu je $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$ i $g'(x) \neq 0$

za svaki $x \in (a,b)\backslash\{x_0\}$. Ako postoji $\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$, tada postoji i $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$ i vrijedi

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Napomena 2 *L'Hospitalovo pravilo vrijedi i za slučaj neodređenosti $\frac{\infty}{\infty}$ tj. i u slučaju kada je $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} = \infty$. U oba slučaja neodređenosti L'Hospitalovo pravilo se može primjeniti i ako je $x_0 = \infty$.*

Definicija 5 *Funkcija f ima u x_0 nul-točku kratnosti n ako je n takav da je $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{(x-x_0)^n} \neq 0, \infty$.*

Primjer 4 *Odredite red beskonačno malih veličina (tj. kratnost nul-točke funkcije) u $x_0 = 0$:*

1. $f(x) = x - \sin x$
   Rješenje: Kako je

   $$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3} = \left|\frac{0}{0}\right| = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2} = \left|\frac{0}{0}\right| = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x} = \frac{1}{6}$$

   to $f(x) = x - \sin x$ ima u $x_0 = 0$ nul-točku kratnosti 3. □

2. $f(x) = \cos x - 1 + \frac{1}{2}x^2$

3. $f(x) = x - \ln(1+x)$

Napomena 3 *Prije upotrebe L'Hospitalovog pravila dobro je imati u vidu sljedeće primjere.*

1. *Obrat L'Hospitalovog pravila ne vrijedi tj. iz postojanja $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$ ne može se zaključiti postojanje $\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.*

   Primjer: Lako se vidi da je $\lim_{x\to\infty}\frac{2x-\sin x}{2x+\sin x} = 1$, dok $\lim_{x\to\infty}\frac{2-\cos x}{2+\cos x}$ ne postoji.

2. *Kod primjene L'Hospitalovog pravila nužno je provjeravati neodređenosti.*

   Primjer: Očito je $\lim_{x\to\pi/2}\frac{\sin x}{x} = \frac{\sin\pi/2}{\pi/2} = 2/\pi$, dok je $\lim_{x\to\pi/2}\frac{\cos x}{1} = 0$.

3. *Iako L'Hospitalovo pravilo u mnogim slučajevima daje jednostavniju proceduru za izračunavanje graničnih vrijednosti funkcija, ne smiju se "zaboraviti" osnovne metode.*

Primjer: Očito je $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+3}}=1$ *dok L'Hospital daje:*

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2+1})'}{(\sqrt{x^2+3})'}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+3}}{\sqrt{x^2+1}}$$

što nas vraća na polazni problem.

Zadatak 75 *Izračunajte a)* $\lim_{x\to\infty}\frac{e^{2x}}{x^4}$ *b)* $\lim_{x\to 0}\frac{e^{-1/x^2}}{x^2}$.

Rješenje: a)

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}}{x^4}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=\lim_{x\to\infty}\frac{2e^{2x}}{4x^3}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=\frac{1}{2}\lim_{x\to\infty}\frac{2e^{2x}}{3x^2}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|$$
$$=\frac{1}{3}\lim_{x\to\infty}\frac{2e^{2x}}{2x}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=\frac{1}{3}\lim_{x\to\infty}\frac{2e^{2x}}{1}=\infty.$$

b)

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{-1/x^2}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x^2}}{e^{\frac{1}{x^2}}}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{2}{x^3}}{-\frac{2}{x^3}e^{\frac{1}{x^2}}}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{e^{\frac{1}{x^2}}}=0.$$

□

Zadatak 76 *Izračunajte* $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x-\sin x}$.

Rješenje:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x-\sin x}=\left|\frac{0}{0}\right|=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos^2 x}-\cos x}{1-\cos x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^3 x}{\cos^2 x(1-\cos x)}=\lim_{x\to 0}\frac{1+\cos x+\cos^2 x}{\cos^2 x}=3.$$

□

Zadatak 77 *Izračunajte* $\lim_{x\to 1}\ln x\cdot\ln(x-1)$.

Rješenje:

$$\lim_{x\to 1}\ln x\cdot\ln(x-1)=|0\cdot(-\infty)|=\lim_{x\to 1}\frac{\ln(x-1)}{\frac{1}{\ln x}}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x-1}}{-\frac{1}{\ln^2 x}\cdot\frac{1}{x}}=-\lim_{x\to 1}\frac{\ln^2 x}{x-1}=\left|\frac{0}{0}\right|=-\lim_{x\to 1}\frac{2\ln x\cdot\frac{1}{x}}{1}=0.$$

□

Zadatak 78 *Izračunajte* $\lim_{x\to\pi/2}\left(\frac{x}{\operatorname{ctg} x}-\frac{\pi}{2\cos x}\right)$.

Rješenje:

$$\lim_{x\to\pi/2}\left(\frac{x}{\operatorname{ctg} x}-\frac{\pi}{2\cos x}\right)=|\infty-\infty|=\lim_{x\to\pi/2}\frac{2x\cos x-\pi\frac{\cos x}{\sin x}}{\frac{\cos x}{\sin x}\cdot 2\cos x}$$
$$=\lim_{x\to\pi/2}\frac{2x\sin x\cos x-\pi\cos x}{2\cos^2 x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to\pi/2}\frac{2x\sin x-\pi}{\cos x}=\left|\frac{0}{0}\right|$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to\pi/2}\frac{2\sin x+2x\cos x}{-\sin x}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2\cdot 1+2\cdot\frac{\pi}{2}\cdot 0}{-1}=-1.$$

□

Zadatak 79 *Izračunajte* $\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)$.

Rješenje:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)=|\infty-\infty|=\lim_{x\to 1}\frac{x\ln x-x+1}{(x-1)\ln x}=\left|\frac{0}{0}\right|=\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{\ln x+\frac{x-1}{x}}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x\ln x+(x-1)}=\left|\frac{0}{0}\right|=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}}{1+\ln x+1}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}.$$

□

Zadatak 80 *Izračunajte a)*$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}$ *b)* $\lim_{x\to\infty}(x-\ln x)$.

Rješenje: a)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=0.$$

b)

$$\lim_{x\to\infty}(x-\ln x)=|\infty-\infty|=\lim_{x\to\infty}x\left(1-\frac{\ln x}{x}\right)=|\infty\cdot(1-0)=\infty\cdot 1|=\infty.$$

□

Zadatak 81 *Izračunajte a)* $\lim_{x\to\infty}x^{\frac{1}{x}}$ *b)* $\lim_{x\to 0}x^x$.

Rješenje: a)

$$\lim_{x\to\infty}x^{\frac{1}{x}}=\left|\infty^0\right|=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{1}{x}\ln x}=e^{\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=e^{\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}}=e^0=1.$$

b)

$$\lim_{x\to 0}x^x=\left|0^0\right|=\lim_{x\to 0}e^{x\ln x}=e^{\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}}=e^{\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}}=e^{-\lim_{x\to 0}x}=1.$$

□

4.5 Asimptote

1. VERTIKALNE ASIMPTOTE
   - u konačnim rubovima domene

   Ako je $\lim\limits_{x\to c+} f(x) = \pm\infty$ ili $\lim\limits_{x\to c-} f(x) = \pm\infty$, tada je pravac $x = c$ vertikalna asimptota (s lijeva, s desna ili s obje strane)

2. HORIZONTALNE ASIMPTOTE

   Ako je $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = a$, tada je pravac $y = a$ horizontalna asimptota u $+\infty$. Ako je $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = a$, tada je pravac $y = a$ horizontalna asimptota u $-\infty$.

3. KOSA ASIMPTOTA - pravac oblika $y = kx + l$ pri čemu

   $$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad l = \lim_{x\to+\infty} [f(x) - kx]$$

   je kosa asimptota u $+\infty$. Analogno kao kod horizontalnih asimptota, može se dobiti i kosa asimptota u $-\infty$. Specijalno, ako je $k = 0$, tada je $l = \lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$ i zapravo imamo horizontalnu asimptotu $y = l$.
   Ako postoji horizontalna asimptota u nekoj ∞, tada u toj istoj ∞ nema "pravih" kosih asimptota.

Zadatak 82 *Nađite asimptote krivulje* $y = \dfrac{x^3}{x^2+1}$.

Rješenje:

$\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \quad \Rightarrow$ nema vertikalnih asimptota

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3}{x^2+1} = \left(\frac{\pm\infty}{+\infty}\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3 \mid : x^3}{x^2+1 \mid : x^3} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}} = \pm\infty$$

$\Rightarrow$ nema horizontalnih asimptota

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3 \mid : x^3}{x^3 + x \mid : x^3} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{x^2}} = 1$$

$$l = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{x^3}{x^2+1} - x\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-x \mid : x^2}{x^2+1 \mid : x^2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-\frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x^2}} = 0$$

$\Rightarrow$ $y = x$ kosa asimptota

$\square$

Zadatak 83 *Nađite asimptote krivulje* $y = \dfrac{\sin(5\pi x)\cdot\sin(7\pi x)}{(x+x^3)^2}$.

Rješenje:

$$\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}\backslash\{0\}, \quad \text{funkcija je parna}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{\sin(5\pi x)\cdot\sin(7\pi x)}{(x+x^3)^2} = \lim_{x\to+\infty} \sin(5\pi x)\cdot\sin(7\pi x)\cdot\frac{1}{(x+x^3)^2} = 0,$$

budući imamo produkt funkcija od kojih su prve dvije ograničene a treća teži u 0. Dakle, $y = 0$ je horizontalna asimptota. Nadalje,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(5\pi x)\cdot\sin(7\pi x)}{x^2(1+x^2)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(5\pi x)}{5\pi x}\cdot 5\pi\cdot\frac{\sin(7\pi x)}{7\pi x}\cdot 7\pi\cdot\frac{1}{(1+x^2)^2} = 35\pi^2$$

pa vidimo da pravac $x = 0$ nije vertikalna asimptota. □

Zadatak 84 *Nađite asimptote krivulje* $y = x\cdot\operatorname{arctg}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$.

Rješenje:

$$\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}\backslash\{0\}$$

$$\lim_{x\to 0+} x\cdot\operatorname{arctg}\left(1+\frac{1}{x}\right) = 0\cdot\frac{\pi}{2} = 0, \quad \lim_{x\to 0-} x\cdot\operatorname{arctg}\left(1+\frac{1}{x}\right) = 0\cdot\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$\Rightarrow$ nema vertikalnih asimptota

$$\lim_{x\to\pm\infty} x\cdot\operatorname{arctg}\left(1+\frac{1}{x}\right) = \pm\infty\cdot\operatorname{arctg}1 = \pm\infty\cdot\frac{\pi}{4} = \pm\infty$$

$\Rightarrow$ nema ni horizontalnih asimptota

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x\cdot\operatorname{arctg}\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \operatorname{arctg}\left(1+\frac{1}{x}\right) = \operatorname{arctg}1 = \frac{\pi}{4}$$

$$l = \lim_{x\to\pm\infty}\left[x\cdot\operatorname{arctg}\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{\pi}{4}x\right] = \lim_{x\to\pm\infty} x\cdot\left[\operatorname{arctg}\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{\pi}{4}\right] = (\pm\infty)\cdot 0$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\operatorname{arctg}\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{\pi}{4}}{\frac{1}{x}} = \left(\frac{0}{0}\right) = \text{L'H} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{1}{1+(1+1/x)^2}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow$ $y = \dfrac{\pi}{4}x + \dfrac{1}{2}$ je kosa asimptota!

□

Zadatak 85 *Nađite asimptote krivulje* $y = (1+x)^{1/x}$.

Rješenje:

$$y = e^{\frac{1}{x}\cdot\ln(1+x)} \quad\Rightarrow\quad \mathcal{D}(f) = \langle -1, +\infty\rangle \backslash \{0\}$$

$$\lim_{x\to -1+} e^{\frac{1}{x}\cdot\ln(1+x)} = e^{\lim\limits_{x\to -1+}\frac{1}{x}\cdot\ln(1+x)} = (e^{-1\cdot(-\infty)}) = (e^{+\infty}) = +\infty$$

$\Rightarrow\ x = -1$ je vertikalna asimptota (s desne strane)

Znamo da je $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = e$, pa je $\lim\limits_{x\to 0-}(1+x)^{1/x} = \lim\limits_{x\to 0+}(1+x)^{1/x} = e$ što znači da pravac $x = 0$ NIJE vertikalna asimptota (ni s jedne strane).

$$\lim_{x\to +\infty} e^{\frac{1}{x}\cdot\ln(1+x)} = e^{\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\cdot\ln(1+x)} = e^{(0\cdot(+\infty))} = e^0 = 1$$

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{\ln(1+x)}{x} = \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right) = L'H = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1+x} = 0$$

$\Rightarrow\ y = 1$ je horizontalna asimptota (kosih nema!)

□

Zadatak 86 *Nađite asimptote krivulje* $y = \sqrt[3]{x(x-1)^2}$.

Rješenje:

$\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\sqrt[3]{x(x-1)^2} = \sqrt[3]{\lim_{x\to\pm\infty} x(x-1)^2} = (\pm\infty\cdot(+\infty)) = \pm\infty$$

$\Rightarrow$ nema horizontalnih asimptota

$$k = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{\sqrt[3]{x(x-1)^2}}{x} = \sqrt[3]{\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x(x-1)^2}{x^3}} = \sqrt[3]{\lim_{x\to\pm\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^2} = 1$$

$$l = \lim_{x\to\pm\infty}(\sqrt[3]{x(x-1)^2} - x) = (\pm\infty \mp \infty)$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty}(\sqrt[3]{x(x-1)^2} - x)\cdot\frac{\sqrt[3]{x^2(x-1)^4} + x\sqrt[3]{x(x-1)^2} + x^2}{\sqrt[3]{x^2(x-1)^4} + x\sqrt[3]{x(x-1)^2} + x^2}$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x(x-1)^2 - x^3}{\sqrt[3]{x^2(x-1)^4} + x\sqrt[3]{x(x-1)^2} + x^2}$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x - 2x^2 \mid : x^2}{\sqrt[3]{x^2(x-1)^4} + x\sqrt[3]{x(x-1)^2} + x^2 \mid : x^2}$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{1}{x} - 2}{\sqrt[3]{(1-\frac{1}{x})^4} + \sqrt[3]{(1-\frac{1}{x})^2} + 1} = -\frac{2}{3}$$

$\Rightarrow\ y = x - \dfrac{2}{3}$ je obostrana kosa asimptota

□

4.6 Kvalitativni graf funkcije

POSTUPAK:

1. odrediti domenu i nultočke funkcije (ako postoji)
2. provjeriti da li je funkcija periodična, parna ili neparna
3. ponašanje na rubovima domene (vertikalne, horizontalne, kose asimptote)
4. lokalni ekstremi i monotonost
5. konveksnost, konkavnost, točke infleksije

Zadatak 87 *Nacrtajte kvalitativni graf funkcije* $y = \dfrac{x^2-2x+2}{x-1}$.

Rješenje:

1. $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}\backslash\{1\}, \qquad \mathcal{N}(f) = \emptyset,$

2. - funkcija nije ni parna ni neparna

3. $\lim\limits_{x\to 1+} \dfrac{x^2-2x+2}{x-1} = \dfrac{1}{0+} = +\infty, \quad \lim\limits_{x\to 1-} \dfrac{x^2-2x+2}{x-1} = \dfrac{1}{0-} = -\infty$

$\Rightarrow$ pravac $x = 1$ je vertikalna asimptota (s obje strane)

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2-2x+2 \mid : x}{x-1 \mid : x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x-2+\frac{2}{x}}{1-\frac{1}{x}} = \pm\infty$$

$\Rightarrow$ nema horizontalnih asimptota

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2-2x+2 \mid : x^2}{x(x-1) \mid : x^2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1-\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}{1-\frac{1}{x}} = 1$$

$$l = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{x^2-2x+2}{x-1} - x\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2-x \mid : x}{x-1 \mid : x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{2}{x}-1}{1-\frac{1}{x}} = -1$$

$\Rightarrow$ pravac $y = x-1$ je kosa asimptota (s obje strane)

4. $f'(x) = \dfrac{x^2-2x}{(x-1)^2} = 0 \Leftrightarrow x(x-2) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0,\ x_2 = 2$

♠ intervali monotonosti:

$\langle -\infty, 0\rangle : \quad f'(-1) = \dfrac{(+)}{(+)} > 0 \quad \Rightarrow f$ raste

$\langle 0,1\rangle$: $\quad f'(1/2) = \dfrac{(-)}{(+)} < 0 \quad \Rightarrow f$ pada

$\langle 1,2\rangle$: $\quad f'(3/2) = \dfrac{(-)}{(+)} < 0 \quad \Rightarrow f$ pada

$\langle 2,+\infty\rangle$: $\quad f'(3) = \dfrac{(+)}{(+)} > 0 \quad \Rightarrow f$ raste

$\Rightarrow$ u $x = 0$ lokalni maksimum : $M(0,-2)$, u $x = 2$ lokalni minimum : $m(2,2)$

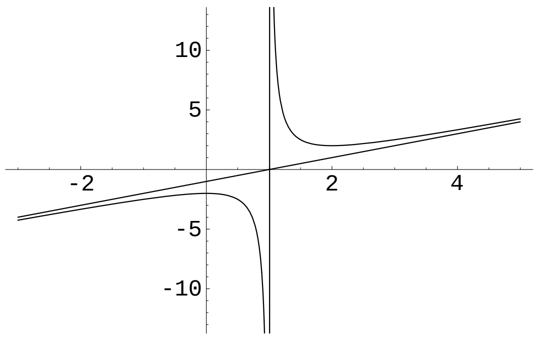
5. $f''(x) = \dfrac{2}{(x-1)^3} \neq 0$

♣ intervali konveksnosti i konkavnosti:

$\langle -\infty,1\rangle$: $\quad f''(0) < 0 \quad \Rightarrow f$ je konkavna

$\langle 1,+\infty\rangle$: $\quad f''(2) > 0 \quad \Rightarrow f$ je konveksna

□



Zadatak 88 *Nacrtajte kvalitativni graf funkcije* $y = \sqrt{x^2+1}$.

Rješenje:

1. $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}, \qquad f(x) > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$

2. funkcija je parna - graf je simetričan s obzirom na os y

3. vertikalnih asimptota nema

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} \sqrt{x^2+1} = +\infty \ \Rightarrow$ nema horizontalnih asimptota

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x}$$

$$k_1=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x}=1,\quad k_2=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x}=-1$$

$$l_1=\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+1}-x)=(\infty-\infty)=\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+1}-x)\cdot\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}+x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=\frac{1}{\infty}=0$$

$$l_2=\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+1}+x)=(\infty-\infty)=\ldots=0$$

$\Rightarrow$ pravci $y=x$ i $y=-x$ su kose asimptote

4. $y'=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}\ \Rightarrow\ f'(x)=0\ \Leftrightarrow\ x=0$

♠ intervali monotonosti:

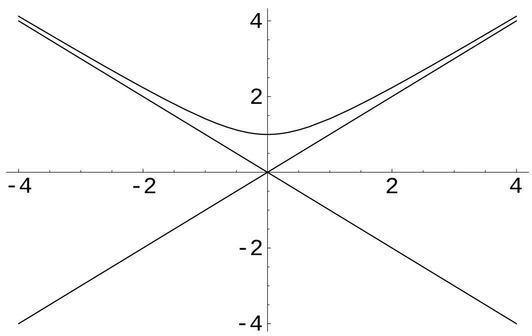
$\langle-\infty,0\rangle:\quad f'(-1)=\dfrac{(-)}{(+)}<0\quad\Rightarrow f$ pada

$\langle 0,+\infty\rangle:\quad f'(1)=\dfrac{(+)}{(+)}>0\quad\Rightarrow f$ raste

$\Rightarrow$ u $x=0$ lokalni minimum : $m(0,1)$

5. $y''=\dfrac{1}{\sqrt{(x^2+1)^3}}>0\ \Rightarrow$ konveksna je na cijeloj domeni, nema točaka infleksije

□



Zadatak 89 *Nacrtajte kvalitativni graf funkcije* $y=e^{\frac{1}{2x}}$.

Rješenje:

1. $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}\backslash\{0\}$, $\qquad f(x) > 0,\ \forall x \in \mathcal{D}(f)$

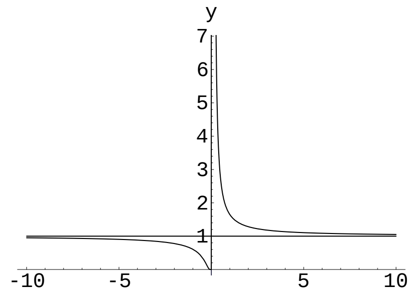
2. funkcija nije ni parna ni neparna, ni periodična

3. $\lim\limits_{x\to 0+} e^{\frac{1}{2x}} = (e^{+\infty}) = +\infty, \quad \lim\limits_{x\to 0-} e^{\frac{1}{2x}} = (e^{-\infty}) = 0,$
   $\Rightarrow$ pravac $x = 0$ je vertikalna asimptota s desne strane
   $\lim\limits_{x\to\pm\infty} e^{\frac{1}{2x}} = e^0 = 1$
   $\Rightarrow$ pravac $y = 1$ je horizontalna asimptota s obje strane (kosih stoga nema)

4. $f'(x) = e^{\frac{1}{2x}} \cdot \left(-\dfrac{1}{2x^2}\right) < 0,\ \forall x \in \mathcal{D}(f)$
   $\Rightarrow$ pada na cijeloj domeni, nema ekstrema

5. $f''(x) = e^{\frac{1}{2x}} \cdot \dfrac{1+4x}{4x^4} \ \Rightarrow\ f''(x) = 0 \Leftrightarrow 1 + 4x = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{1}{4}$
   ♣ intervali konveksnosti i konkavnosti:
   $\langle -\infty, -\frac{1}{4}\rangle : \quad f''(-1) = (+) \cdot \dfrac{(-)}{(+)} < 0 \quad \Rightarrow f$ konkavna
   $\langle -\frac{1}{4}, 0\rangle : \quad f''(-1/6) = (+) \cdot \dfrac{(+)}{(+)} > 0 \quad \Rightarrow f$ konveksna
   $\langle 0, +\infty\rangle : \quad f''(1) = (+) \cdot \dfrac{(+)}{(+)} > 0 \quad \Rightarrow f$ konveksna
   $\Rightarrow \quad T\left(-1/4,\ e^{-2}\right)$ je točka infleksije budući f'' mijenja predznak prilikom prolaska kroz nju

$\square$



Zadatak 90 *Nacrtajte kvalitativni graf funkcije* $y = \dfrac{x}{\ln x}$.

Rješenje:

1. $\mathcal{D}(f) = \langle 0, 1\rangle \cup \langle 1, +\infty\rangle$

3. $\lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{x}{\ln x} = \left(\dfrac{0}{-\infty}\right) = \lim\limits_{x\to 0+} x \cdot \dfrac{1}{\ln x} = 0 \cdot 0 = 0$

   $\Rightarrow$ pravac $x = 0$ nije vertikalna asimptota

   $\lim\limits_{x\to 1-} \dfrac{x}{\ln x} = \left(\dfrac{1}{0-}\right) = -\infty, \quad \lim\limits_{x\to 1+} \dfrac{x}{\ln x} = \left(\dfrac{1}{0+}\right) = +\infty$

   $\Rightarrow$ pravac $x = 1$ je vertikalna asimptota s obje strane

   $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x}{\ln x} = \left(\dfrac{+\infty}{+\infty}\right) = L'H = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to +\infty} x = +\infty$

   $\Rightarrow$ nema horizontalnih asimptota

   $k = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{\ln x} = \left(\dfrac{1}{+\infty}\right) = 0 \quad \Rightarrow$ nema ni kosih asimptota

4. $f'(x) = \dfrac{\ln x - 1}{\ln^2 x} \;\Rightarrow\; f'(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; \ln x - 1 = 0 \;\Leftrightarrow\; x = e$

   ♠ intervali monotonosti

   $\langle 0, 1\rangle : \quad f'(1/2) = \dfrac{(-)}{(+)} < 0 \quad \Rightarrow f$ pada

   $\langle 1, e\rangle : \quad f'(2) = \dfrac{(-)}{(+)} < 0 \quad \Rightarrow f$ pada

   $\langle e, +\infty\rangle : \quad f'(3) = \dfrac{(+)}{(+)} > 0 \quad \Rightarrow f$ raste

   $\Rightarrow \quad m\,(e, e)$ je lokalni minimum

5. $f''(x) = \dfrac{2 - \ln x}{x \cdot \ln^3 x} \;\Rightarrow\; f''(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; 2 - \ln x = 0 \;\Leftrightarrow\; x = e^2$

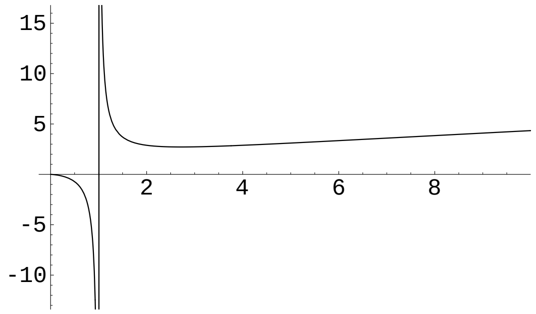
   ♣ intervali konveksnosti i konkavnosti:

   $\langle 0, 1\rangle : \quad f''(1/2) = \dfrac{(+)}{(-)} < 0 \quad \Rightarrow f$ konkavna

   $\langle 1, e^2\rangle : \quad f''(2) = \dfrac{(+)}{(+)} > 0 \quad \Rightarrow f$ konveksna

   $\langle e^2, +\infty\rangle : \quad f''(8) = \dfrac{(-)}{(+)} < 0 \quad \Rightarrow f$ konkavna

$$\Rightarrow \quad T\left(e^2, \frac{e^2}{2}\right) \text{ točka infleksije}$$



$\square$

5 Neodređeni integral

5.1 Pojam neodređenog integrala

Definicija 6 *Za funkciju $F : \langle a, b\rangle \to \mathbf{R}$ kažemo da je* **primitivna funkcija** *(antiderivacija) funkcije $f : \langle a, b\rangle \to \mathbf{R}$ ako je $F'(x) = f(x)$ za svaki $x \in \langle a, b\rangle$.*

Primjer 5 *1. Neka je $f(x) = x^3$. Provjerite da su $F_1(x) = \frac{1}{4}x^4$, $F_2(x) = \frac{1}{4}x^4 + 1$, $F_3(x) = \frac{1}{4}x^4 + \sqrt[4]{\pi}$ primitivne funkcije funkcije f.*

2. Neka je $f(x) = \frac{1}{x}$. Pokažite da je funkcija $F(x) = \ln(C|x|)$ primitivna funkcija funkcije f za svaki $C > 0$.

3. Pokažite da je funkcija $F(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}}\right)$ primitivna funkcija funkcije $f(x) = \frac{1}{1+\cos^2 x}$ za $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$.

Teorem 2 *Neka su $F, G : \langle a, b\rangle \to \mathbf{R}$ dvije primitivne funkcije funkcije $f : \langle a, b\rangle \to \mathbf{R}$, tj. $F'(x) = G'(x) = f(x)$ za svaki $x \in \langle a, b\rangle$. Tada postoji konstanta $C \in \mathbf{R}$ tako da je $G(x) = F(x) + C$ za svaki $x \in \langle a, b\rangle$.*

Rješenje: Slijedi iz Lagrangeovog teorema srednje vrijednosti primjenjenog na funkciju $H(x) = G(x) - F(x)$. $\square$

Definicija 7 *Skup svih primitivnih funkcija funkcije f zovemo* **neodređenim integralom** *i označavamo sa (v. Teorem 1):*

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

pri čemu je F bilo koja primitivna funkcija funkcije f. Kažemo da je $f(x)$ podintegralna funkcija, $f(x)dx$ podintegralni izraz, x varijabla integracije i C konstanta integracije.

Zadatak 91 *Odredite neodređene integrale a) $\int x^6\,dx$ b) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}}$ c) $\int \sin(3x)dx$.*

Rješenje: Deriviranjem desne strane jednakosti lako se provjeri da je a) $\int x^6\,dx = \frac{1}{7}x^7 + C$. b) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$. c) $\int \sin(3x)dx = -\frac{1}{3}\cos(3x) + C$.
$\square$

5.2 Osnovna svojstva neodređenog integrala. Neposredna integracija

Osnovna svojstva neodređenog integrala su:

1. $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx \Leftrightarrow \left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$
   npr. $d\int \ln x dx = \ln x dx$.

2. $\int dF(x) = F(x) + C \Leftrightarrow \int F'(x)dx = F(x) + C$
   npr. $\int d(\sin x) = \sin x + C$

3. $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx, \quad k \in \mathbf{R}$
   npr. $\int \frac{3}{x}dx = 3\int \frac{dx}{x} = 3\ln|x| + C$

4. $\int (f_1(x) + f_2(x))dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx$
   npr. $\int (x^3 + 2^x - 1)dx = \int x^3dx + \int 2^xdx - \int dx = \frac{x^4}{4} + \frac{2^x}{\ln 2} - x + C$

5. $$\int f(\phi(x))\phi'(x)\,dx = F(\phi(x)) + C \qquad (1)$$
   pri čemu je $F'(x) = f(x)$.

Metoda neposredne integracije sastoji se u tome da korištenjem gornjih osnovnih svojstava neodređenog integrala neke neodređene integrale svedemo na tablične.

Zadatak 92

$$\int \frac{x^2\,dx}{1+x^2} = \int \frac{x^2+1-1}{1+x^2}dx = \int dx - \int \frac{dx}{1+x^2} = x - \operatorname{arctg} x + C.$$

Zadatak 93 *(DZ)*

$$\begin{aligned}\int \frac{\cos 2x}{\sin^2 x \cos^2 x}dx &= \int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x}dx - \int \frac{\sin^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x}dx \\ &= \int \frac{dx}{\sin^2 x} - \int \frac{dx}{\cos^2 x} = -\operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x + C.\end{aligned}$$

Zadatak 94

$$\int \frac{(1-x)^2}{x\sqrt{x}}dx = \int \frac{dx}{x\sqrt{x}} - 2\int \frac{x}{x\sqrt{x}}dx + \int \frac{x^2}{x\sqrt{x}} = -\frac{2}{\sqrt{x}} - 4\sqrt{x} + \frac{2}{3}x\sqrt{x} + C.$$

Zadatak 95

$$\int \frac{2x-3}{x^2-3x+5}dx = \left\{ \begin{array}{c} t = x^2-3x+5 \\ dt = (2x-3)dx \end{array} \right\} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|x^2-3x+5| + C.$$

Je li potrebna apsolutna vrijednost?

Zadatak 96

$$\int \frac{\cos x}{(1+\sin x)^3}dx = \left\{ \begin{array}{c} t = 1+\sin x \\ dt = \cos x dx \end{array} \right\} = \int \frac{dt}{t^3} = -\frac{1}{2t^2} + C = -\frac{1}{2(1+\sin x)^2} + C.$$

Zadatak 97

$$\int \frac{x^2}{1+x^6}dx = \left\{ \begin{array}{c} t = x^3 \\ dt = 3x^2 dx \end{array} \right\} = \int \frac{dt}{3(1+t^2)} = \frac{1}{3}\operatorname{arctg} t + C = \frac{1}{3}\operatorname{arctg}(x^3) + C.$$

Zadatak 98

$$\int \frac{dx}{5+x^2} = \frac{1}{5}\int \frac{dx}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{5}\int \frac{d\left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right)}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{5}} + C.$$

Zadatak 99

$$\begin{aligned}\int 5^{2-3x}dx &= \int 5^{2-3x}\left(-\frac{1}{3}d(2-3x)\right) = \left\{ \begin{array}{c} t = 2-3x \\ dt = -3dx \end{array} \right\} \\ &= -\frac{1}{3}\int 5^t dt = -\frac{1}{3}\frac{5^t}{\ln 5} + C = -\frac{1}{3}\frac{5^{2-3x}}{\ln 5} + C.\end{aligned}$$

Zadatak 100

$$\int x\sqrt{2+x^2}dx = \left\{ \begin{array}{c} t = 2+x^2 \\ dt = 2xdx \end{array} \right\} = \int \sqrt{t}\frac{dt}{2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}t\sqrt{t} + C = \frac{1}{3}(2+x^2)\sqrt{2+x^2} + C.$$

Zadatak 101

$$\int \frac{\arcsin x + x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int \frac{\arcsin x dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \int \arcsin x d\arcsin x - \frac{1}{2}\int (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} d(1-x^2) = \frac{1}{2}\arcsin^2 x - \sqrt{1-x^2} + C.$$

Zadatak 102

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sin x} &= \int \frac{dx}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \int \frac{dx}{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}} = \int \frac{d(\operatorname{tg}\frac{x}{2})}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}} \\ &= \int d\left(\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|\right) = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C.\end{aligned}$$

Zadatak 103 *(DZ) Analognim transformacijam kao u prethodnom zadatku odredite a)* $\int \frac{dx}{\cos x}$ *b)* $\int \frac{dx}{1+\sin x}$ *c)* $\int \frac{dx}{1+\cos x}$.

5.3 Metoda supstitucije

Korištenjem formule za derivaciju kompozicije funkcija i formule za derivaciju inverzne funkcije dobije se:

$$\int f(x)\,dx = \left\{ \begin{array}{c} x = \varphi(t) \\ dx = \varphi'(t)dt \end{array} \right\} = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt.$$

Ili preciznije: Ako je $F(t)$ primitivna funkcija funkcije $f(\varphi(t))\varphi'(t)$, onda je $F(\varphi^{-1}(x))$ primitivna funkcija funkcije $f(x)$, odnosno $\int f(x)dx = F(\varphi^{-1}(x)) + C$ pri čemu je $F'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t)$.
Napomena: Usporedi formulu u metodi supstitucije sa (1) u osnovnim svojstvima neodređenog integrala.

Zadatak 104 *Riješite* $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$ *supstitucijom a)* $x = \frac{1}{t}$ *b)* $x = \operatorname{tg} t$.

Rješenje: a)

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}} = \left\{ \begin{array}{c} x = \frac{1}{t} \\ dx = -\frac{1}{t^2}dt \end{array} \right\} = \int \frac{-\frac{dt}{t^2}}{\frac{1}{t}\sqrt{1+\frac{1}{t^2}}} = -\int \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}$$

$$= -\ln\left(t + \sqrt{1+t^2}\right) + C = -\ln\left(\frac{1}{x} + \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right) + C.$$

b)

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}} = \left\{ \begin{array}{c} x = \operatorname{tg} t \Rightarrow t = \operatorname{arctg} x \\ dx = \frac{dt}{\cos^2 t} \end{array} \right\} = \int \frac{\frac{dt}{\cos^2 t}}{\operatorname{tg} t\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 t}}$$

$$= \int \frac{dt}{\sin t} = \int \frac{d\left(\operatorname{tg}\frac{t}{2}\right)}{\operatorname{tg}\frac{t}{2}} = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{t}{2}\right| + C = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{\operatorname{arctg} x}{2}\right| + C.$$

□

Usporedite oblike primitivnih funkcija u prethodnom zadatku pod a) i b). S obzirom na Teorem 2 što zaključujete?

Zadatak 105 *Riješite korištenjem trig. supstitucije oblika* $x = a\sin t$ *a)* $\int \sqrt{2-x^2}dx$ *b)* $\int \sqrt{5-x^2}dx$.

Rješenje: a)

$$\int \sqrt{2-x^2}dx = \left\{ \begin{array}{c} x = \sqrt{2}\sin t \Rightarrow t = \arcsin\frac{x}{\sqrt{2}} \\ dx = \sqrt{2}\cos t dt \end{array} \right\} = \int \sqrt{2-2\sin^2 t}\sqrt{2}\cos t\; dt$$

$$= 2\int \cos^2 t\; dt = \int (1+\cos 2t)dt = t + \frac{1}{2}\sin 2t + C$$

$$= t + \sin t\sqrt{1-\sin^2 t} + C = \arcsin\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{x}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\frac{x^2}{2}} + C = \arcsin\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}x\sqrt{2-x^2} + C.$$

b)

$$\int \sqrt{5-x^2}dx = \left\{ \begin{array}{c} x = \sqrt{5}\sin t \Rightarrow t = \arcsin\frac{x}{\sqrt{5}} \\ dx = \sqrt{5}\cos t dt \end{array} \right\} = \int \sqrt{5-5\sin^2 t}\cos t\; dt$$

$$= \sqrt{5}\int \cos^2 t\; dt = \sqrt{5}\int \frac{1+\cos 2t}{2}dt = \frac{\sqrt{5}}{2}\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right) + C$$

$$= \frac{\sqrt{5}}{2}(t + \sin t\sqrt{1-\sin^2 t}) + C = \frac{\sqrt{5}}{2}(\arcsin x + x\sqrt{1-x^2}) + C.$$

□

5.4 Metoda parcijalne integracije

Integrirajući formulu za deriviranje produkta funkcija dobije se formula parcijalne integracije izražena u sljedećem teoremu.

Teorem 3 *Neka su f i g neprekidno derivabilne na $\langle a, b\rangle$. Tada vrijedi sljedeća jednakost neodređenih integrala*

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)dx.$$

Pokrata: U primjeni formula parcijalne integracije se najčešće zapisuje u diferencijalnom obliku:

$$\int udv = uv - \int vdu.$$

Oblici

$$\int P_n(x)\left\{\begin{array}{c} e^{ax} \\ \sin \alpha x \\ \cos \beta x \end{array}\right\} dx.$$

Zadatak 106 *Odredite a) $\int x \sin(\pi x) dx$ b) $\int x^2 e^{-3x} dx$.*

Rješenje: a)

$$\int x\sin(\pi x)dx = \left\{\begin{array}{c} u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = \sin(\pi x)dx \Rightarrow v = -\frac{1}{\pi}\cos(\pi x) \end{array}\right\}$$

$$= -\frac{1}{\pi}x\cos(\pi x) + \frac{1}{\pi}\int \cos(\pi x)dx = -\frac{1}{\pi}x\cos(\pi x) + \frac{1}{\pi^2}\sin(\pi x) + C.$$

b)

$$\int x^2 e^{-3x}dx = \left\{\begin{array}{c} u = x^2 \Rightarrow du = 2xdx \\ dv = e^{-3x}dx \Rightarrow v = -\frac{1}{3}e^{-3x} \end{array}\right\} = -\frac{1}{3}x^2e^{-3x} + \frac{2}{3}\int xe^{-3x}dx$$

$$= \left\{\begin{array}{c} u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = e^{-3x}dx \Rightarrow v = -\frac{1}{3}e^{-3x} \end{array}\right\} = -\frac{1}{3}x^2e^{-3x} + \frac{2}{3}\left[-\frac{1}{3}xe^{-3x} + \frac{1}{3}\int e^{-3x}dx\right]$$

$$= -\frac{1}{3}x^2e^{-3x} - \frac{2}{9}xe^{-3x} - \frac{2}{27}e^{-3x} + C = -\frac{1}{3}e^{-3x}\left[x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{2}{9}\right] + C.$$

□

Zadatak 107 *(DZ) Odredite $\int \frac{x^2-3x+5}{e^{4x}}dx$.*

Oblici

$$\int P_n(x)\left\{\begin{array}{c} \ln(ax) \\ \arcsin(\alpha x) \\ \mathrm{arctg}(\beta x) \end{array}\right\} dx.$$

Zadatak 108 *Odredite a)* $\int x \ln 2x dx$ *b)* $\int \arcsin x dx$.

Rješenje: a)

$$\int x \ln(2x) dx = \left\{ \begin{array}{c} u = \ln(2x) \Rightarrow du = \frac{dx}{x} \\ dv = x dx \Rightarrow v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right\} = \frac{x^2}{2} \ln(2x) - \frac{1}{2} \int x dx = \frac{1}{2} x^2 \ln(2x) - \frac{1}{4} x^2 + C.$$

b)

$$\int \arcsin x dx = \left\{ \begin{array}{c} u = \arcsin x \Rightarrow du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ dv = dx \Rightarrow v = x \end{array} \right\} = x \arcsin x - \int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= x \arcsin x + \frac{1}{2} \int (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} d(1-x^2) = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C.$$

□

▼ "CIKLIČKA" PARCIJALNA INTEGRACIJA

Zadatak 109 *Odredite a) (DZ)* $\int e^x \sin x dx$ *b)* $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1+x^2}}$.

Rješenje: a)

$$I = \int e^x \sin x dx = \left\{ \begin{array}{c} u = \sin x \Rightarrow du = \cos x dx \\ dv = e^x dx \Rightarrow v = e^x \end{array} \right\} = e^x \sin x - \int e^x \cos x dx$$

$$= \left\{ \begin{array}{c} u = \cos x \Rightarrow du = -\sin x dx \\ dv = e^x dx \Rightarrow v = e^x \end{array} \right\} = e^x \sin x - \left[e^x \cos x + \int e^x \sin x dx \right]$$

$$= e^x [\sin x - \cos x] - I.$$

Dobije se $I = e^x(\sin x - \cos x) - I$, što daje $I = \frac{1}{2} e^x(\sin x - \cos x) + C$.
b)

$$I = \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1+x^2}} = \int x \frac{x dx}{\sqrt{1+x^2}} = \left\{ \begin{array}{c} u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = \frac{x dx}{\sqrt{1+x^2}} \Rightarrow v = \sqrt{1+x^2} \end{array} \right\}$$

$$= x\sqrt{1+x^2} - \int \sqrt{1+x^2} dx = x\sqrt{1+x^2} - \int \frac{1+x^2}{\sqrt{1+x^2}} dx,$$

dobije se $I = x\sqrt{1+x^2} - \ln(x + \sqrt{1+x^2}) - I$, što daje $I = \frac{1}{2}(x\sqrt{1+x^2} - \ln(x + \sqrt{1+x^2})) + C$. □

Zadatak 110 *(DZ) Koristeći cikličku integraciju odredite a)* $\int \sqrt{1-x^2} dx$ *b)* $\int \sqrt{x^2-1} dx$ *c)* $\int \sqrt{x^2+1} dx$.

Rješenje: Uputa:

$$\int \sqrt{1-x^2} dx = \int \frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} - \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

pa dalje slično kao u prethodnom zadatku. □

6 Određeni integral

6.1 Osnovni pojmovi

Neka je $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ ograničena funkcija. Subdivizija D intervala $[a, b]$ je konačan niz točaka $x_0, x_1, \ldots, x_n$ tako da je $D...a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{i-1} < x_i \cdots < x_n = b$. Neka su dane međutočke $\bar{x}_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \ldots n$. Za navedene podatke definira se integralna (Riemannova) suma sa:

$$S(D) = \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Definicija 8 *Funkcija f je integrabilna na $[a, b]$ ako postoji*

$$\lim_{\mathrm{m}(D)\to 0} S(D) = \lim_{\mathrm{m}(D)\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)(x_i - x_{i-1})$$

pri čemu je očica subdivizije $\mathrm{m}(D)$ definirana sa $\mathrm{m}(D) = \max\{x_i - x_{i-1}; i = 1, \ldots n\}$.

U tom slučaju navedeni limes označavamo sa $\int_a^b f(x)dx$.

Zadatak 111 *Izračunajte približnu vrijednost od $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ koristeći ekvidistantnu subdiviziju sa $n = 4$.*

Rješenje:

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \approx \sum_{i=1}^{4} f(\bar{x}_i)(x_i - x_{i-1})$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{1+(1/4)^2} + \frac{1}{1+(1/2)^2} + \frac{1}{1+(3/4)^2} + \frac{1}{1+1^2}\right) = \frac{2449}{3400} \approx 0.72029.$$

Usporedite sa pravom vrijednošću $\pi/4$. □

Zadatak 112 *Po definiciji određenog integrala izračunajte $\int_0^1 x^2 dx$.*

Rješenje: Koristimo ekvidistantnu subdiviziju intervala $[0, 1]$ i za međutočke biramo desne rubove podintervala ($\bar{x}_i = x_i$). Imamo:

$$\int_0^1 x^2 dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^{n} i^2 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{1}{3}.$$

□

6.2 Newton-Leibnizova formula

Osnovna formula određenog integrala je Newton-Leibnizova formula koja predstavlja analitički izraz kojim se uspostavlja veza između određenog integrala i primitivne funkcije, tj.

Teorem 4 *Ako je funkcija $f(x)$ integrabilna na intervalu $[a,b]$ i ima na tom intervalu primitivnu funkciju $F(x)$, tj. $F'(x) = f(x)$, tada je vrijednost određenog integrala jednaka razlici vrijednosti primitivne funkcije za gornju i donju granicu integrala, tj.*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Zadatak 113

$$\int_{-1}^{1}(2x^2 - x^3)dx = \left(\frac{2x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right)\Big|_{-1}^{1} = \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{4}\right) - \left(-\frac{2}{3} - \frac{1}{4}\right) = \frac{4}{3}.$$

Zadatak 114

$$\int_{-2}^{2}\frac{dx}{x^2+4} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}\Big|_{-2}^{2} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}1 - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}(-1) = \frac{1}{2}\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

Zadatak 115

$$\int_{\pi/2}^{3\pi/4}\sin x dx = -\cos x\Big|_{\pi/2}^{3\pi/4} = -\cos\frac{3\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} + 0 = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Zadatak 116

$$\int_0^{100\pi}\sqrt{1-\cos 2x}dx = \int_0^{100\pi}\sqrt{2\sin^2 x}dx = 50\sqrt{2}\int_0^{2\pi}|\sin x|dx$$

$$= 50\sqrt{2}\int_0^{\pi}\sin x dx - 50\sqrt{2}\int_{\pi}^{2\pi}\sin x dx = -50\sqrt{2}\cos x\Big|_0^{\pi} + 50\sqrt{2}\cos x\Big|_{\pi}^{2\pi} = 200\sqrt{2}.$$

6.3 Supstitucija u određenom integralu

Jednostavna posljedica Newton-Leibnizove formule i formule za derivaciju kompozicije funkcija je sljedeći teorem koji daje uvjete za supstituciju u određenom integralu.

Teorem 5 *Neka je $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ neprekidna funkcija i neka je $\varphi : [\alpha, \beta] \to \mathbf{R}$ funkcija sa neprekidnom prvom derivacijom tako da je $\varphi(\alpha) = a$ i $\varphi(\beta) = b$. Tada je*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Zadatak 117

$$\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{dx}{5+4\cos x} = \left\{ \begin{array}{c} t=\operatorname{tg}\frac{x}{2} \quad t(\frac{2\pi}{3})=\sqrt{3} \quad t(0)=0 \\ dx=\frac{2dt}{1+t^2} \Rightarrow \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2} \end{array} \right\} =$$

$$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{5+4\frac{1-t^2}{1+t^2}} = 2\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dt}{9+t^2} = 2\cdot\frac{1}{3}\cdot\operatorname{arctg}\frac{t}{3}\Big|_0^{\sqrt{3}} = \frac{2}{3}\cdot\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{9}$$

Zadatak 118

$$\int_0^{100\pi} \frac{dx}{4+\cos x} = 50\cdot\int_0^{2\pi} \frac{dx}{4+\cos x} = \left\{ \begin{array}{c} x'=x-\pi \\ x=x'+\pi \end{array} \right\} = 50\cdot\int_{-\pi}^{\pi} \frac{dx'}{4-\cos x'} = 100\int_0^{\pi} \frac{dx'}{4-\cos x'}$$

$$\left\{ \begin{array}{c} t=\operatorname{tg}\frac{x'}{2}\in\langle 0,\infty\rangle \\ dx'=\frac{2dt}{1+t^2} \end{array} \right\} = 100\cdot\int_0^{\infty} \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{4-\frac{1-t^2}{1+t^2}} = 100\cdot\int_0^{\infty} \frac{2dt}{4+4t^2-1+t^2} = 100\int_0^{\infty} \frac{2dt}{3+5t^2} =$$

$$= 40\int_0^{\infty} \frac{dt}{\frac{3}{5}+t^2} = 40\cdot\sqrt{\frac{5}{3}}\cdot\operatorname{arctg}\frac{t\sqrt{5}}{\sqrt{3}}\Big|_0^{\infty} = 40\frac{\sqrt{15}}{3}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{20}{3}\sqrt{15}\pi$$

Zadatak 119

$$\int_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}dx = \left\{ \begin{array}{c} x=\frac{1}{\cos t} \\ dx=\frac{\sin t\,dt}{\cos^2 t} \end{array} \right\} = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt{\frac{1}{\cos^2 t}-1}}{\frac{1}{\cos t}}\frac{\sin t\;dt}{\cos^2 t}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}dt = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1-\cos^2 t}{\cos^2 t}dt = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos^2 t}dt - \int_0^{\frac{\pi}{3}} dt = \operatorname{tg} t\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} - t\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = \sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$$

Zadatak 120

$$\int_4^9 \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}dx = \left\{ \begin{array}{c} t^2=x \quad t(9)=3 \\ 2tdt=dx \quad t(4)=2 \end{array} \right\} = \int_2^3 \frac{1-t}{1+t}\cdot 2tdt = 2\int_2^3 \frac{t-t^2}{1+t}dt =$$

$$= -2\cdot\int_2^3 tdt + 4\cdot\int_2^3 dt - 4\cdot\int_2^3 \frac{dt}{1+t} = -2\cdot\frac{t^2}{2}\Big|_2^3 + 4t\Big|_2^3 - 4\ln|1+t|\Big|_2^3 =$$

$$= -9+4+12-8-4\ln|4|+4\ln|3| = -1+4\ln\frac{3}{4}$$

6.4 Parcijalna integracija u određenom integralu

Kako je $f(x)g(x)$ primitivna funkcija funkcije $f(x)g'(x)+f'(x)g(x)$ to korištenjem Newton-Leibnizove formule slijedi sljedeći teorem.

Teorem 6 *Neka su $f, g : [a, b] \to \mathbf{R}$ funkcije sa neprekidnom prvom derivacijom. Tada je*

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b g(x)f'(x)dx.$$

Zadatak 121

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{xdx}{\sin^2 x} = \left\{ \begin{array}{cc} u = x & dv = \frac{dx}{\sin^2 x} \\ du = dx & v = -\operatorname{ctg} x \end{array} \right\} = -x \operatorname{ctg} x \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{\sin x} dx =$$

$$= \left\{ \begin{array}{cc} t = \sin x & t(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2} \\ dt = \cos x dx & t(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{array} \right\} = -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\sqrt{3} + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1}{t} dt = -\frac{\pi}{4} + \frac{\sqrt{3}\pi}{6} + \ln|t| \Big|_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} =$$

$$= \frac{2\sqrt{3}\pi - 3\pi}{12} + \ln\sqrt{2}$$

Zadatak 122

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (x^{10} + x) \sin x dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^{10} \sin x dx + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx = 2 \int_0^{\pi/2} x \sin x \, dx$$

$$= \left\{ \begin{array}{cc} u = x & dv = \sin x dx \\ du = dx & v = -\cos x \end{array} \right\} =$$

$$= 2 \cdot \left(-x \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx \right) = 2 \cdot \left(0 + \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \right) = 2$$

7 Primjena određenog integrala

7.1 Kvadratura (površina ravninskih likova)

Ako je krivocrtni trapez u ravnini zadan sa

$$D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2; a \leq x \leq b, f_1(x) \leq y \leq f_2(x)\}$$

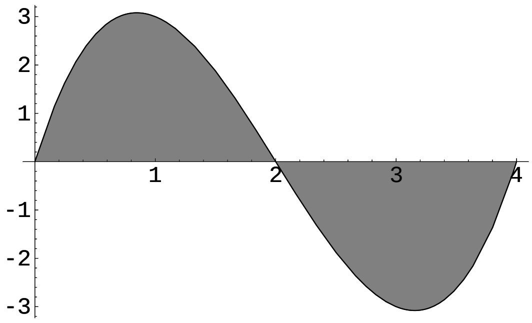
onda je površina od D dana sa

$$P = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx.$$

Zadatak 123 *Izračunajte površinu lika omeđenog sa* $y = x^3 - 6x^2 + 8x,\ y = 0.$

Rješenje:

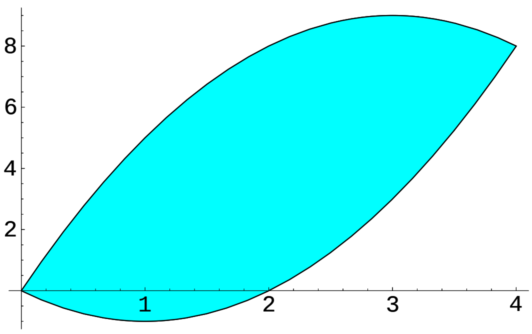
$$\begin{aligned} P &= \int_0^2 (x^3 - 6x^2 + 8x)dx - \int_2^4 (x^3 - 6x^2 + 8x)dx \\ &= \left(\frac{x^4}{4} - 2x^3 + 4x^2\right)\Big|_0^2 + \left(-\frac{x^4}{4} + 2x^3 - 4x^2\right)\Big|_2^4 = 8. \end{aligned}$$



∎

Zadatak 124 *Izračunajte površinu lika omeđenog sa* $y = 6x - x^2,\ y = x^2 - 2x.$

Rješenje:

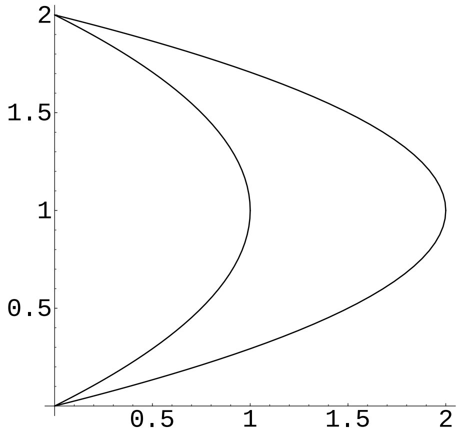


$$P = \int_0^4 [6x - x^2 - (x^2 - 2x)]dx = \int_0^4 (8x - 2x^2)dx = \left(4x^2 - \frac{2}{3}x^3\right)\Big|_0^4 = \frac{64}{3}.$$

∎

Zadatak 125 *Izračunajte površinu lika omeđenog sa* $2(y-1)^2 = 2 - x$, $(y-1)^2 = 1 - x$.

Rješenje:



$$P = \int_0^2 [2-2(y-1)^2-(1-(y-1)^2)]dy = \int_0^2 (-y^2+2y)dy = -\frac{y^3}{3}\Big|_0^2 + y^2\Big|_0^2 = \frac{4}{3}.$$

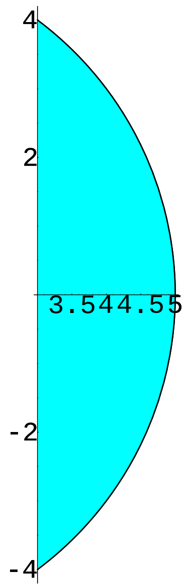
□

Zadatak 126 *Izračunajte površinu lika omeđenog sa* $x^2 + y^2 \leq 25,\ x \geq 3$.

Rješenje:

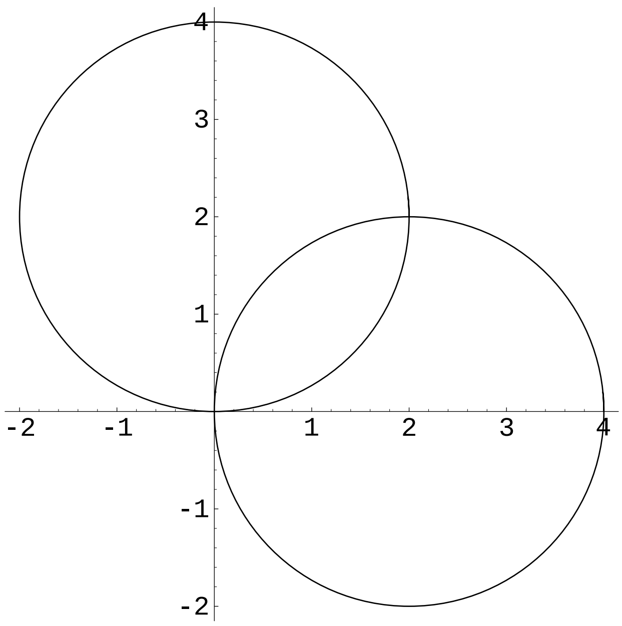
$$\begin{aligned} P &= 2\int_3^5 \sqrt{25-x^2}dx = \left\{ \begin{array}{c} x = 5\sin t,\ t = \arcsin\frac{x}{5} \\ dx = 5\cos t dt \end{array} \right\} \\ &= 50\int_{\arcsin(3/5)}^{\pi/2} \cos^2 t dt = 25\int_{\arcsin(3/5)}^{\pi/2} (1+\cos 2t)dt \\ &= 25t\Big|_{\arcsin(3/5)}^{\pi/2} + 25\sin t\sqrt{1-\sin^2 t}\Big|_{\arcsin(3/5)}^{\pi/2} = \frac{25\pi}{2} - 25\arcsin\frac{3}{5} - 12. \end{aligned}$$

□



Zadatak 127 *Izračunajte površinu lika omeđenog sa* $x^2+y^2 \leq 4y,\ x^2+y^2 \leq 4x$.

Rješenje:



Nađimo najprije sjecišta ovih kružnica. Dobivamo ih kao rješenja sustava:

$$x^2 + y^2 = 4y, \ x^2 + y^2 = 4x \quad \Rightarrow \quad S_1(0,0), \ \ S_2(2,2)$$

Tražena površina je jednaka:

$$\begin{aligned}
P &= \int_0^2 \left(\sqrt{4-(x-2)^2} - (2 - \sqrt{4-x^2})\right) dx \\
&= \int_0^2 \sqrt{4-(x-2)^2}dx - 2\int_0^2 dx + \int_0^2 \sqrt{4-x^2}dx = I_1 - 4 + I_2 \\
I_1 &= \int_0^2 \sqrt{4-(x-2)^2}dx = \left\{ \begin{array}{c} x-2 = 2\sin t, \\ dx = 2\cos t dt \end{array} \right\} = \int_{-\pi/2}^0 \sqrt{4-4\sin^2 t} \cdot 2\cos t dt \\
&= 4\int_{-\pi/2}^0 \cos^2 t dt = 2\int_{-\pi/2}^0 (1+\cos(2t))dt = 2 \cdot t\Big|_{-\pi/2}^0 + \sin(2t)\Big|_{-\pi/2}^0 = \pi \\
I_2 &= \int_0^2 \sqrt{4-x^2}dx = \left\{ \begin{array}{c} x = 2\sin t, \\ dx = 2\cos t dt \end{array} \right\} = \int_0^{\pi/2} \sqrt{4-4\sin^2 t} \cdot 2\cos t dt \\
& \quad = 4\int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt = 4\int_{-\pi/2}^0 \cos^2 t dt = I_2 = \pi \\
\Longrightarrow & \quad P = 2\pi - 4 \approx 2.28319
\end{aligned}$$

$\square$

Zadatak 128 *(DZ) Izračunajte površinu lika omeđenog sa* $x^2+y^2 \leq 2\sqrt{3}y, \ x^2+y^2 \leq 2x$. *(Rj:* $P = \frac{5\pi}{6} - \sqrt{3}$*)*

Zadatak 129 *(DZ) Izračunajte površinu lika određenog s* $x^2+y^2 \geq 2x, \ x^2+y^2 \leq 4x$. *(Rj:* $P = 3\pi$*)*

Zadatak 130 *(DZ) Izračunajte površinu područja* $0 \leq y \leq \dfrac{1}{x^2+3x+4}, \ x \in [1, 10^3]$. *Koliko bi ta površina iznosila da je* $x \in [1, \infty\rangle$ *?*

7.2 Rektifikacija (duljina luka krivulje)

Ako je krivulja zadana sa $y = f(x), x \in [a,b]$ onda je njezina duljina dana sa

$$s = \int_a^b \sqrt{1+y'(x)^2}dx.$$

Zadatak 131 *Izračunajte duljinu luka krivulje* $y = x^{3/2}$ *od* $x = 0$ *do* $x = 5$.

Rješenje:

$$s=\int_0^5\sqrt{1+\left(\frac{3}{2}x^{1/2}\right)^2}dx=\frac{1}{2}\int_0^5\sqrt{4+9x}dx=\frac{1}{18}\cdot\frac{2}{3}(4+9x)\sqrt{4+9x}\Big|_0^5=\frac{335}{27}.$$

□

Zadatak 132 *Izračunajte duljinu luka krivulje $y=x^{2/3}$ od $x=0$ do $x=8$.*

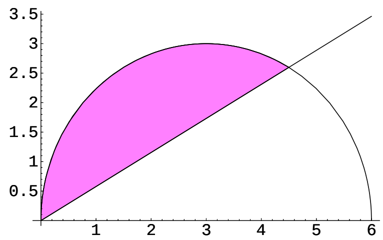
Rješenje:

$$s=\int_0^4\sqrt{1+\left(\frac{3}{2}y^{1/2}\right)^2}dy=\frac{1}{2}\int_0^4\sqrt{4+9y}dy=\frac{1}{18}\cdot\frac{2}{3}(4+9y)\sqrt{4+9y}\Big|_0^4=\frac{80\sqrt{10}}{27}.$$

□

Zadatak 133 *Izračunajte opseg lika određenog s $\frac{\sqrt{3}}{3}x\le y\le\sqrt{6x-x^2}$.*

Rješenje:



$$\begin{aligned}y&=\frac{\sqrt{3}}{3}x \quad\Rightarrow\quad y'=\frac{\sqrt{3}}{3}\\ y&=\sqrt{6x-x^2}\quad\Rightarrow\quad y'=\frac{3-x}{\sqrt{6x-x^2}}\end{aligned}$$

Presječne točke ovih dviju krivulja su: $S_1(0,0)$ i $S_2\left(\frac{9}{2},\ \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$.

Traženi opseg je:

$$s=s_1+s_2=\int_0^{9/2}\sqrt{1+\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}dx+\int_0^{9/2}\sqrt{1+\left(\frac{3-x}{\sqrt{6x-x^2}}\right)^2}dx$$

$$s_1 = \sqrt{\frac{4}{3}} \cdot x\Big|_0^{9/2} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{9}{2} = 3\sqrt{3}$$

$$s_2 = \int_0^{9/2} \sqrt{\frac{9}{6x - x^2}}\, dx = 3\int_0^{9/2} \frac{dx}{\sqrt{9-(3-x)^2}} = \int_0^{9/2} \frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{3-x}{3}\right)^2}}$$

$$= -3 \arcsin \frac{3-x}{3}\Big|_0^{9/2} = 3\left(\arcsin 1 - \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)\right) = 3\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}\right) = 2\pi$$

$$\Rightarrow s = 3\sqrt{3} + 2\pi$$

□

Zadatak 134 *(DZ) Izračunajte opseg lika određenog s* $|x| \leq y \leq 2$.

Zadatak 135 *(DZ) Izračunajte opseg lika određenog s* $x^2 \leq y \leq 4$.

7.3 Volumen (kubatura) rotacijskih tijela

• Rotacija oko osi paralelnih sa osi apscisa:
Ako područje

$$D = \{(x, y) : a \leq x \leq b,\ y_0 \leq y \leq f(x) \text{ ili } f(x) \leq y \leq y_0\}$$

(područje D je omeđeno sa krivuljom $y = f(x)$ i pravcima $x = a$, $x = b$, $y = y_0$) rotira oko pravca $y = y_0$ dobije se tijelo volumena

$$V_{y=y_0} = \pi \int_a^b [f(x) - y_0]^2\, dx = \pi \int_a^b [y - y_0]^2\, dx.$$

Specijalno ako je $y_0 = 0$ (rotacija oko $x-$osi) formula glasi

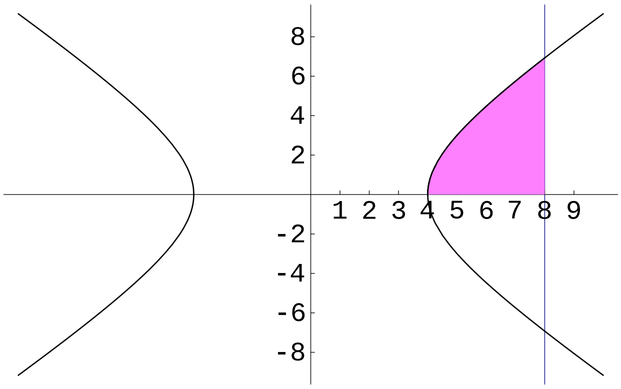
$$V_{y=0} = \pi \int_a^b f^2(x)dx = \pi \int_a^b y^2 dx.$$

Zadatak 136 *Površina omeđena sa* $x^2 - y^2 = 16,\ y = 0,\ x = 8$ *rotira oko* x*-osi. Odredite volumen nastalog rotacionog tijela.*

Rješenje:

$$V_{y=0} = \pi \int_4^8 (x^2 - 16)dx = \pi \left[\frac{x^3}{3}\Big|_4^8 - 16x\Big|_4^8\right] = \frac{256\pi}{3}.$$

□



- Ako područje

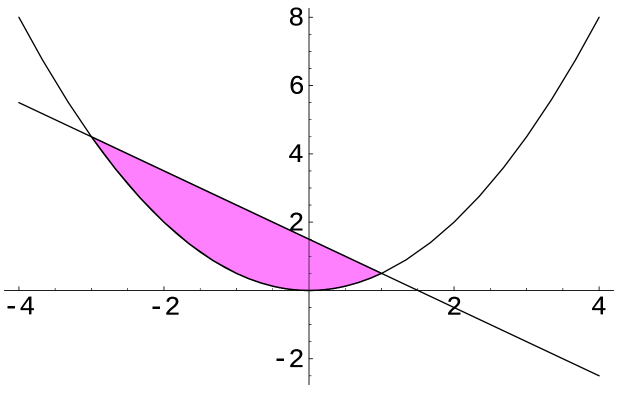
$$D = \{(x, y) : a \leq x \leq b, 0 \leq f(x) \leq y \leq g(x) \text{ ili } g(x) \leq y \leq f(x) \leq 0\}$$

(područje D je omeđeno krivuljama $y = f(x)$, $y = g(x)$ i pravcima $x = a$, $x = b$ i cijelo se nalazi ili "ispod" ili "iznad" osi apscisa pri čemu je krivulja $y = g(x)$ "udaljenija" od osi apscisa) rotira oko osi apscisa dobije se tijelo volumena

$$V_{y=0} = \pi \int_a^b [g^2(x) - f^2(x)]dx.$$

Zadatak 137 *Površina omeđena sa $y = \frac{x^2}{2}$, $y = \frac{3}{2} - x$ rotira oko x-osi. Odredite volumen nastalog rotacionog tijela.*

Rješenje:



$$V_{y=0} = \pi \int_{-3}^{1} \left[\left(\frac{3}{2} - x \right)^2 - \left(\frac{x^2}{2} \right)^2 \right] dx = \pi \int_{-3}^{1} \left(\frac{9}{4} - 3x + x^2 - \frac{x^4}{4} \right) dx$$

$$= \pi \left[\frac{9x}{4} - \frac{3x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{20}\right]\Big|_{-3}^{1} = \frac{89\pi}{15}.$$

□

• **Rotacija oko osi paralelne sa osi ordinata:**

Ako je područje D omeđeno krivuljom $y = f(x)$, pravcima $x = a$, $x = b$ i $y = 0$ i cijelo se nalazi ili sa "desne" ili sa "lijeve" strane pravca $x = x_0$, onda njegovom rotacijom oko pravca $x = x_0$ nastaje tijelo volumena

$$V_{x=x_0} = 2\pi \int_a^b |x - x_0|\ |f(x)| dx = 2\pi \int_a^b |x - x_0|\ |y| dx.$$

Specijalno, ako je $x_0 = 0$ (rotacija oko $y-$ osi) formula glasi

$$V_{x=0} = 2\pi \int_a^b |x||y| dx.$$

Najjednostavniji slučaj je kada se cijelo područje nalazi "iznad" osi apscisa ($y \geq 0$) i "desno" od osi ordinata ($x \geq 0$). U tom slučaju volumen tijela nastalog rotacijom područja

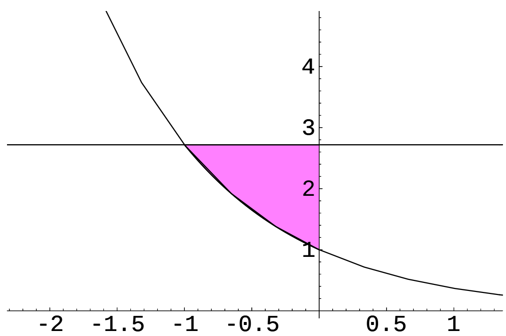
$$D = \{(x, y) : 0 \leq a \leq x \leq b,\ 0 \leq y \leq f(x)\}$$

oko osi ordinata glasi

$$V_{x=0} = 2\pi \int_a^b x f(x) dx.$$

Zadatak 138 *Površina omeđena sa* $y = e^{-x},\ y = e,\ x = 0$ *rotira oko* y*-osi. Odredite volumen nastalog rotacionog tijela.*

Rješenje:



Prvi način:

$$\begin{aligned}
V_{x=0} &= \pi\int_1^e(-\ln y)^2dy = \pi\int_1^e \ln^2 y dy = \left\{ \begin{array}{c} u=\ln^2 y \Rightarrow du = \frac{2\ln y}{y}dy \\ dv = dy \Rightarrow v = y \end{array} \right\} \\
&= \pi y\ln^2 y\Big|_1^e - 2\pi\int_1^e \ln y dy = \left\{ \begin{array}{c} u=\ln y \Rightarrow du = \frac{1}{y}dy \\ dv = dy \Rightarrow v = y \end{array} \right\} \\
&= e\pi - 2\pi y\ln y\Big|_1^e + 2\pi\int_1^e dy = e\pi - 2e\pi + 2\pi y\Big|_1^e = \pi(e-2).
\end{aligned}$$

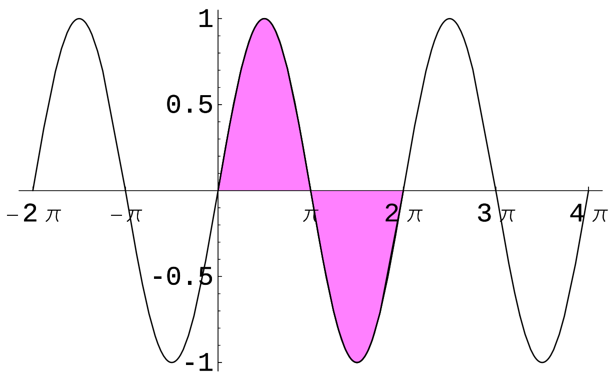
Drugi način:

$$\begin{aligned}
V_{x=0} &= 2\pi\int_{-1}^0 |x|(e-e^{-x})dx = 2\pi\left[\int_{-1}^0 xe^{-x}dx - e\int_0^1 xdx\right] \\
&= \left\{ \begin{array}{c} u=x \Rightarrow du = dx \\ dv = e^{-x}dx \Rightarrow v = -e^{-x} \end{array} \right\} = 2\pi\left[-xe^{-x}\Big|_{-1}^0 + \int_{-1}^0 e^{-x}dx - e\frac{x^2}{2}\Big|_{-1}^0\right] \\
&= 2\pi\left[-e - e^{-x}\Big|_{-1}^0 + \frac{e}{2}\right] = \pi(e-2).
\end{aligned}$$

□

Zadatak 139 *Površina omeđena sa $y=\sin x,\ y=0,\ 0\le x\le 2\pi$ rotira oko y-osi. Odredite volumen nastalog rotacionog tijela.*

Rješenje:

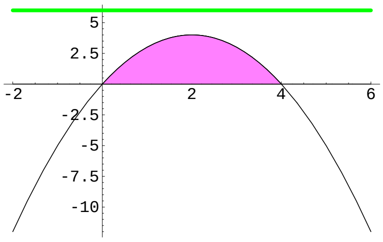


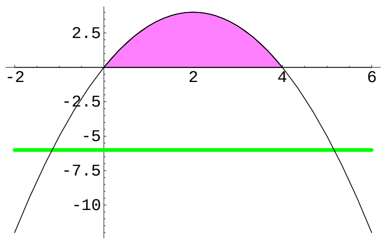
$$\begin{aligned}
V_{x=0} &= 2\pi\left[\int_0^\pi x\sin x dx + \int_\pi^{2\pi} x(-\sin x)dx\right] = \left\{ \begin{array}{c} u=x \Rightarrow du = dx \\ dv = \sin x dx \Rightarrow v = -\cos x \end{array} \right\} \\
&= 2\pi\left[-x\cos x\Big|_0^\pi + \int_0^\pi \cos x dx + x\cos x\Big|_\pi^{2\pi} - \int_\pi^{2\pi}\cos x dx\right] = 8\pi^2.
\end{aligned}$$

□

Zadatak 140 *Površina omeđena sa $y = 4x - x^2$, $y = 0$ rotira oko pravca a) $y = 6$, b) $y = -6$. Odredite volumen nastalog rotacionog tijela.*

Rješenje:



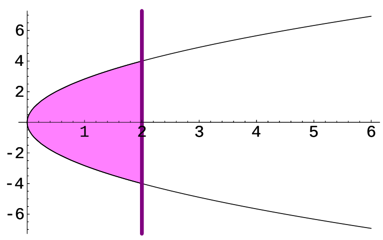


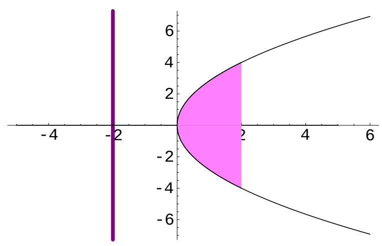
$$
\begin{aligned}
a)\ V_{y=6} &= \pi \int_0^4 [(-6)^2 - (4x - x^2 - 6)^2]dx = \pi \int_0^4 (-x^4 + 8x^3 - 28x^2 + 48x)dx \\
&= \pi \left[-\frac{x^5}{5} + 2x^4 - \frac{28x^3}{3} + 24x^2 \right] \Big|_0^4 = \frac{1408}{15}\pi \\
b)\ V_{y=-6} &= \pi \int_0^4 [(4x - x^2 + 6)^2 - 6^2]dx = \ldots = \frac{2432}{15}\pi
\end{aligned}
$$

□

Zadatak 141 *Površina omeđena sa $y^2 = 8x$, $x = 2$ rotira oko pravca a) $x = 2$, b) $x = -2$. Odredite volumen nastalog rotacionog tijela.*

Rješenje:





$$a) \qquad V_{x=2} = \pi \int_{-4}^4 \left(\frac{y^2}{8} - 2 \right)^2 dy = \frac{\pi}{64} \left[\frac{y^5}{5} - 32\frac{y^3}{3} + 256y \right] \Big|_{-4}^4 = \frac{256}{15}\pi.$$

$$b) \qquad V_{x=-2} = \pi \int_{-4}^4 \left[4^2 - \left(\frac{y^2}{8} + 2 \right)^2 \right] dy = \ldots = \frac{1024}{15}\pi.$$

Volumeni traženih tijela mogu se naći i ovako:

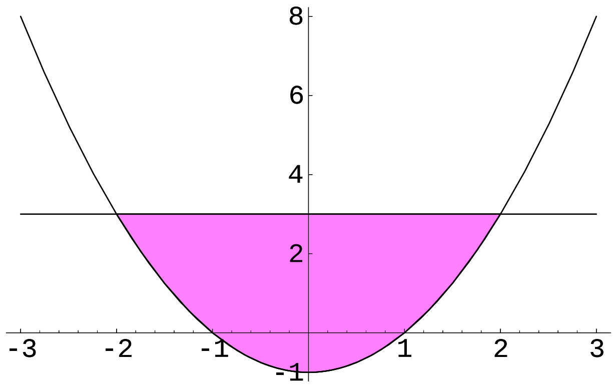
$$a) \qquad V_{x=2} = 2\pi \int_0^2 (2-x)\cdot 2\sqrt{8x}\,dx = \ldots = \frac{256}{15}\pi.$$

$$b) \qquad V_{x=-2} = 2\pi \int_0^2 (x+2)\cdot 2\sqrt{8x}\,dx = \ldots = \frac{1024}{15}\pi.$$

□

Zadatak 142 *Površina omeđena sa $y = x^2 - 1$, $y = 3$ rotira oko x-osi. Odredite volumen nastalog rotacionog tijela.*

Rješenje:



$$\begin{aligned} V_{y=0} &= 2\pi \int_0^2 9dx - 2\pi \int_1^2 (x^2-1)^2 dx = 18\pi x\Big|_0^2 - 2\pi \int_1^2 (x^4 - 2x^2 + 1)dx \\ &= 36\pi - 2\pi \left[\frac{x^5}{5} - \frac{3x^3}{3} + x\right]\Big|_1^2 = \frac{464\pi}{15} \end{aligned}$$

□

8 Obične diferencijalne jednadžbe

Obična diferencijalna $n-$tog reda dana je općenito izrazom

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0,$$

pri čemu se traži funkcija $y = y(x)$ koja uvrštavanjem u gornji izraz daje jednakost.

Ako se rješenje dade zapisati u obliku $f(x, y, C_1, C_2, \ldots, C_n) = 0$ (implicitni oblik) kažemo da je dobiveno opće rješenje. Ako se može opće rješenje je bolje zapisati u eksplicitnom obliku $y = f_1(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$.

Primjetite da se broj slobodnih konstanti u općem rješenju podudara sa redom dif. jednadžbe (red najviše derivacije koja se javlja u diferencijalnoj jednadžbi).

Zadatak 143 *Formirajte diferencijalnu jednadžbu čije opće rješenje je* $y = Cx^2 - x$.

Rješenje:

$$y' = 2Cx - 1 \Rightarrow C = \frac{y'+1}{2x} \Rightarrow y = \frac{y'+1}{2x}x^2 - x \Rightarrow xy' = 2y + x.$$

Dobivena dif. jednadžba je prvog reda, osim toga i linearna. □

Zadatak 144 *Formirajte diferencijalnu jednadžbu čije je opće rješenje* $y = C_1x^3 + C_2x + C_3$.

Rješenje: Kako dif. jedn. mora biti trećeg reda, derivirajmo tri puta dano rješenje. Dobije se:

$$y' = 3C_1x^2 + C_2,\ y'' = 6C_1x,\ y''' = 6C_1.$$

Eliminirajući C_1 iz zadnje dvije jednadžbe dobije se

$$y'' = xy'''.$$

I ova jednadžba je linerana. □

8.1 Obične diferencijalne jednadžbe prvog reda

8.1.1 Separacija varijabli

Ako se diferencijalna jednadžba prvog reda može zapisati u separiranom obliku

$$y' = f(x)g(y)$$

(u desnoj strani dif. jednadžbe smo separirali varijable) rješava se na sljedeći način:

$$y' = f(x)g(y) \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = f(x)g(y) \Leftrightarrow \frac{dy}{g(y)} = f(x)dx,$$

odakle se implicitni oblik rješenja dobije iz

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx$$

sa jednom slobodnom konstantom.

Zadatak 145 *Odredite opće rješenje diferencijalne jednadžbe* $(xy^2+y^2)dx+(x^2-x^2y)dy=0$.

Rješenje:

$$y^2(x+1)dx+x^2(1-y)dy=0/:x^2y^2 \Leftrightarrow \frac{x+1}{x^2}dx+\frac{1-y}{y^2}dy=0$$

$$\Leftrightarrow \int\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)dx+\int\left(\frac{1}{y^2}-\frac{1}{y}\right)dy=C \Leftrightarrow \ln x-\frac{1}{x}-\frac{1}{y}-\ln y=C$$

$$\Leftrightarrow \ln\frac{x}{y}-\frac{y+x}{xy}=C.$$

□

Zadatak 146 *Odredite opće rješenje diferencijalne jednadžbe* $2^{x+y}+3^{x-2y}y'=0$.

Rješenje:

$$2^x2^ydx+3^x3^{-2y}dy=0/:2^y3^x \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x dx+\left(\frac{1}{18}\right)^y dy=0$$

$$\Leftrightarrow \int\left(\frac{2}{3}\right)^x dx+\int\left(\frac{1}{18}\right)^y dy=C \Leftrightarrow \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^x}{\ln\frac{2}{3}}+\frac{\left(\frac{1}{18}\right)^y}{\ln\frac{1}{18}}=C$$

$$\Leftrightarrow \frac{2^x}{3^x(\ln 2-\ln 3)}-\frac{1}{18^y\ln 18}=C.$$

□

Zadatak 147 *Pod izvjesnim uvjetima šećer se pretvara u dekstrozu brzinom koja je proporcionalna količini nepretvorene količine šećera. Ako, od 75 grama u momentu $t=0$, 8 grama se pretvori za 30 minuta, odredite pretvorenu količinu šećera nakon 1.5 sati.*

Rješenje: Neka je x količina šećera pretvorena za t minuta. Tada je

$$\frac{dx}{dt}=k(75-x)\Leftrightarrow \frac{dx}{75-x}=kdt \Leftrightarrow \int\frac{dx}{75-x}=k\int dt+C$$

$$\Leftrightarrow -\ln(75-x)=kt+C.$$

U slučaju da ne znamo realne podatke (tj. da je $0\le x\le 75$ opće rješenje bi morali zapisati u obliku $|x-75|=C_1e^{-kt}$, $C_1>0$. Za $t=0$ imamo $x=0$ pa je $-\ln 75=C\Rightarrow -\ln(75-x)=kt-\ln 75$.

Za $t = 30$ imamo $x = 8$ pa je $-\ln 67 = 30k - \ln 75 \Rightarrow 30k = \ln 75 - \ln 67 \Rightarrow k = 0.0038$. Dakle,

$$-\ln(75 - x) = 0.0038t - \ln 75 \Leftrightarrow \ln(75 - x) = \ln 75 - 0.0038t.$$

Sada, za $t = 90$ imamo

$$\ln(75 - x) = \ln 75 - 0.0038 \cdot 90 \Leftrightarrow \ln(75 - x) = \ln(75 \cdot e^{-0.342})$$

$$\Leftrightarrow 75 - x = 75 \cdot e^{-0.342} \Leftrightarrow x = 75(1 - e^{-0.342}) = 21.7 \text{ grama.}$$

$\square$

8.1.2 Homogena diferencijalna jednadžba prvog reda

Ako se diferencijalna jednadžba dade zapisati u obliku

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

kažemo da je homogena. Svodi se na separaciju varijabli uvođenjem nove funkcije

$$z = \frac{y}{x} \Leftrightarrow y = xz$$

odakle slijedi $y' = z + xz'$ ili $dy = zdx + xdz$.

Zadatak 148 *Odredite opće rješenje diferencijalne jednadžbe* $y - xy' = y \ln \frac{x}{y}$.

Rješenje: Imamo

$$y' = \frac{y}{x}\left(1 - \ln \frac{x}{y}\right),$$

pa uvodimo

$$\frac{y}{x} = z \Rightarrow y = xz \Rightarrow y' = z + xz'$$

$$\Rightarrow z + xz' = z\left(1 - \ln \frac{1}{z}\right) \Leftrightarrow x\frac{dz}{dx} = z \ln z \Leftrightarrow \frac{dz}{z \ln z} = \frac{dx}{x}$$

$$\Leftrightarrow \int \frac{dz}{z \ln z} = \int \frac{dx}{x} + \ln C \Leftrightarrow \ln|\ln z| = \ln|x| + \ln C \Leftrightarrow \ln|\ln z| = \ln|Cx|$$

$$\Leftrightarrow \ln z = |Cx| \Leftrightarrow z = e^{|Cx|} \Rightarrow \frac{y}{x} = e^{|Cx|} \Leftrightarrow y = xe^{|Cx|}.$$

$\square$

Zadatak 149 *Odredite opće rješenje diferencijalne jednadžbe* $xdy - ydx + xe^{-\frac{y}{x}}dx = 0$.

Rješenje:

$$xdy + (xe^{-\frac{y}{x}} - y)dx = 0 / : x \Leftrightarrow dy + \left(e^{-\frac{y}{x}} - \frac{y}{x}\right) dx = 0.$$

Sada, uvodimo

$$\frac{y}{x} = z \Rightarrow y = xz \Rightarrow dy = zdx + xdz,$$

pa imamo

$$zdx + xdz + (e^{-z} - z)dx = 0 \Leftrightarrow xdz + e^{-z}dx = 0 / : xe^{-z} \Leftrightarrow e^{z}dz + \frac{dx}{x} = 0$$

$$\Leftrightarrow e^{z} + \ln|x| = \ln C \Leftrightarrow e^{\frac{y}{x}} + \ln|x| = \ln C \Leftrightarrow e^{\frac{y}{x}} = \ln \frac{C}{|x|} \Leftrightarrow y = x \ln\ln \frac{C}{|x|},\ C > 0.$$

$\square$

8.1.3 Linearna diferencijalna jednadžba prvog reda

Opći oblik linearne diferencijalne jednadžbe prvog reda je:

$$y' + f(x)y = g(x). \tag{2}$$

Ove diferencijalne jednadžbe se mogu rješiti Lagrangeovom metodom varijabilnih konstanti.

Prvi korak je da se rješi prikraćeni (homogeni, što nema nikakve veze sa homogenim dif. jednadžbama prethodno obrađenim) oblik tj. dif jednadžba

$$y' + f(x)y = 0$$

koji se dade separirati i lako se vidi da je opće rješenje prikraćenog oblika

$$y = Ce^{-\int f(x)dx}.$$

Opće rješenje dif. jedn. (2) se sada traži u obliku

$$y = C(x)e^{-\int f(x)dx}.$$

Zadatak 150 *Odredite opće rješenje diferencijalne jednadžbe* $y' + 2xy = 2x^2e^{-x^2}$.

Rješenje: Prvo rješavamo jednadžbu $y' + 2xy = 0$, pa imamo

$$\frac{dy}{x} + 2xy = 0 \Leftrightarrow dy + 2xydx = 0 / : y \Leftrightarrow \frac{dy}{y} + 2xdx = 0 \Leftrightarrow \ln|y| + x^2 = \ln|C(x)|$$

$$\Leftrightarrow \frac{y}{C(x)} = e^{-x^2} \Leftrightarrow y = C(x)e^{-x^2}.$$

Sada imamo $y' = C'(x)e^{-x^2} + C(x)e^{-x^2}(-2x)$ pa ako to vratimo u polaznu jednadžbu imamo:

$$C'(x)e^{-x^2} - 2xC(x)e^{-x^2} + 2xC(x)e^{-x^2} = 2x^2e^{-x^2} \Leftrightarrow C'(x) = 2x^2$$

$$\Leftrightarrow C(x) = \frac{2}{3}x^3 + K \Rightarrow y = \left(\frac{2}{3}x^3 + K\right) e^{-x^2}.$$

□

Zadatak 151 *Osnovano je novo poduzeće. Analiza tržišta predviđa da će brzina rasta dohotka poduzeća, u bilo kojem trenutku vremena t, biti proporcionalna razlici između stvarnog dohotka u tom trenutku t i gornje granice 10 000 000 kn. Također se predviđa da dohodak nakon 3 godine bude 4 000 000 kn. U početku ($t = 0$) dohodak je 0 kn.*

Odredite izraz kojim se može odrediti dohodak u bilo kojem trenutku t i odredite koliko će vremena proći dok dohodak dostigne iznos od 8 000 000 kn.

Rješenje: Neka je $A(t)$ dohodak poduzeća u trenutku t. Prema anlizi tržišta mora biti:

$$\frac{dA}{dt} = k(10 - A),$$

gdje je k konstanta proporcionalnosti, te je A u milijunima kuna.

Jednadžba $\frac{dA}{dt} + kA = 10k$ je linearna diferencijalna jednadžba prvog reda, pa prvo rješavamo

$$\frac{dA}{dt} + kA = 0 \Leftrightarrow \frac{dA}{A} + kdt = 0 \Leftrightarrow \ln A + kt = \ln C(t) \Leftrightarrow A(t) = C(t)e^{-kt}.$$

Sada imamo $A'(t) = C'(t)e^{-kt} - kC(t)e^{-kt}$ i onda

$$C'(t)e^{-kt} - kC(t)e^{-kt} + kC(t)e^{-kt} = 10k \Leftrightarrow C'(t) = 10ke^{kt} \Rightarrow C(t) = 10e^{-kt} + M.$$

Za rježenje diferencijalne jednadžbe sada imamo

$$A(t) = 10 + M \cdot e^{-kt}.$$

Konstantu M odredimo iz početnog uvjeta ($A(0) = 0$):

$$0 = 10 + M \cdot e^{-kt} \Rightarrow M = -10 \Rightarrow A(t) = 10 - 10 \cdot e^{-kt}.$$

Kako je $A(3) = 4$ to je

$$4 = 10 - 10 \cdot e^{-kt} \Rightarrow k = 0.17,$$

pa je traženi izraz

$$A(t) = 10 - 10 \cdot e^{-0.17t}.$$

Sada, za $A = 8$ imamo

$$8 = 10 - 10 \cdot e^{-0.17t} \Rightarrow t = 9.47.$$

Znači, nakon približno 9.5 godina poduzeće će imati dohodak 8 000 000 kn.□

8.1.4 Bernoullijeva diferencijalna jednadžba prvog reda

$$y' + f(x)y = g(x)y^{\alpha}, \ \alpha \neq 0; \ \alpha \neq 1.$$

Primjetimo da za $\alpha = 0$ dobijemo linearnu diferencijalnu jednadžbu, a za $\alpha = 1$ dif. jedn. u kojoj možemo separirati varijable.

Supstitucijom (u smislu uvođenja nove funkcije) $z = y^{1-\alpha}$ dobivamo linearnu diferencijalnu jednadžbu prvog reda.

Zadatak 152 *Odredite opće rješenje diferencijalne jednadžbe* $y' - \frac{4}{x}y = x\sqrt{y}$.

Rješenje:

$$\alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow z = y^{1/2} \Rightarrow y = z^2 \Rightarrow y' = 2zz'.$$

Sada

$$2zz' - \frac{4}{x}z^2 = xz \Leftrightarrow z' - \frac{2z}{x} = \frac{x}{2}.$$

Prvo rješavamo

$$z' - \frac{2z}{x} = 0 \Leftrightarrow \frac{dz}{z} - 2\frac{dx}{x} = 0 \Leftrightarrow \ln|z| - 2\ln|x| = \ln|C(x)| \Leftrightarrow z = C(x)x^2.$$

Kako je $z' = C'(x)x^2 + 2C(x)x$ imamo

$$C'(x)x^2 + 2C(x)x - \frac{2C(x)x^2}{x} = \frac{x}{2} \Leftrightarrow C'(x) = \frac{1}{2x} \Rightarrow C(x) = \frac{1}{2}\ln|x| + K$$

$$\Rightarrow z = \left(\frac{1}{2}\ln|x| + K\right)x^2 \Rightarrow y = x^4\left(\ln|x| + K\right)^2.$$

□

8.2 Obične diferencijalne jednadžbe drugog i viših redova

8.2.1 Neki specijalni tipovi običnih diferencijalnih jednadžbi drugog reda

1. $\mathbf{y^{(n)} = f(x)}$

Zadatak 153 *Odredite opće rješenje diferencijalne jednadžbe a)* $y'' = x + 1$ *b)* $y''' = x + 1$.

Rješenje:

$$y' = \int (x+1)dx \Leftrightarrow y' = \frac{x^2}{2} + x + C_1$$
$$\Leftrightarrow y = \int \left(\frac{x^2}{2} + x + C_1\right) dx \Leftrightarrow y = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + C_1 x + C_2.$$

□

2. $\mathbf{F(x, y', y'') = 0}$ (nedostaje y) Uvodi se funkcija $p = p(x)$ sa

$$y' = p \Rightarrow y'' = p',$$

pa dobijemo diferencijalnu jednadžbu prvog reda (po novoj funkciji p).

Zadatak 154 *Riješite diferencijalnu jednadžbu* $(1 + x^2)y'' - 2xy' = 0, \quad y(0) = 3, \; y'(0) = 3$.

Rješenje:

$$(1+x^2)p' - 2xp = 0 \Leftrightarrow \frac{dp}{p} = \frac{2xdx}{1+x^2} \Leftrightarrow \ln p = \ln(1+x^2) + \ln C_1$$
$$p = C_1(1+x^2) \Rightarrow (y'(0) = 3) \; 3 = C_1 \Rightarrow y' = 3(1+x^2)$$
$$\Leftrightarrow y = 3\left(x + \frac{x^3}{3}\right) + C_2 \Rightarrow (y(0) = 3) \; C_2 = 3 \Rightarrow y = 3x + x^3 + 3.$$

□

8.2.2 Linearne diferencijalne jednadžbe drugog reda sa konstantnim koeficijentima

Opći oblik linearnih diferencijalnih jednadžbi sa konstantnim koeficijentima glasi

$$\mathbf{y''+ay'+by=f(x),\ a,b\in R}.$$

Prvo rješavamo homogenu (nepotpunu, prikraćenu) diferencijalnu jednadžbu:

$$\mathbf{y''+ay'+by=0}.$$

Rješavamo karakterističnu jednadžbu $r^2+ar+b=0$. Ako je $r_1\neq r_2\in\mathbf{R}$ imamo

$$y=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x},$$

a ako je $r=r_1=r_2\in\mathbf{R}$ tada je

$$y=C_1e^{rx}+C_2xe^{rx}.$$

Za $r_{1,2}=\alpha\pm\beta i$ imamo

$$y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x).$$

Zadatak 155 *Odredite opće rješenje diferencijalne jednadžbe* $y''+3y'-4y=0$.

Rješenje:

$$r^2+3r-4=0\Rightarrow r_1=1,\ r_2=-4\Rightarrow y=C_1e^x+C_2e^{-4x}.$$

□

Rješenje nehomogene (potpune) jednadžbe je oblika $y=y_0+Y$, gdje je y_0 rješenje pripadne homogene jednadžbe, a Y je partikularno (bilo koje) rješenje. Partikularno rješenje se određuje metodom neodređenih koeficijenata u sljedećim slučajevima:

1. $f(x)=e^{kx}P_n(x)$

   Ako k nije nultočka karakteristične jednadžbe tada je $Y=e^{kx}Q_n(x)$, a ako je k nultočka karakteristične jednadžbe tada je $Y=x^re^{kx}Q_n(x)$ (r je kratnost nultočke).

2. $f(x)=e^{ax}[P_n(x)\cos bx+Q_m\sin bx]$

   Ako $a\pm bi$ nije rješenje karakteristične jednadžbe imamo

   $$Y=e^{ax}[S_l(x)\cos bx+T_l(x)\sin bx]$$

gdje je $l = \max\{n, m\}$. Ako je pak $a \pm bi$ rješenje karakteristične jednadžbe imamo

$$Y = xe^{ax}[S_l(x) \cos bx + T_l(x) \sin bx].$$

Zadatak 156 *Odredite opće rješenje diferencijalne jednadžbe $y'' - 2y' + y = xe^x$. Odredite ono rješenje koje zadovoljava početne uvjete $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.*

Rješenje:

$$r^2 - 2r + 1 = 0 \Rightarrow r_1 = r_2 = 1 \Rightarrow y_0 = C_1e^x + C_2xe^x,$$

$$k = 1 = R_1 = r_2 \Rightarrow Y = x^2e^x(Ax + B) \Rightarrow Y' = e^x(3Ax^2 + Bx^2 + Ax^3 + 2Bx)$$

$$Y'' = e^x(6Ax^2 + Bx^2 + Ax^3 + 4Bx + 6Ax + 2B) \Rightarrow A = \frac{1}{6},\ B = 0 \Rightarrow Y = \frac{1}{6}x^3e^x$$

$$\Rightarrow y = C_1e^x + C_2xe^x + \frac{1}{6}x^3e^x.$$

Time je dobiveno opće rjeěsenje. Odredimo sada C_1 i C_2 tako da je $y(0) = 0$ i $y'(0) = 1$. Uvrštavanjem $x = 0$ u opće4 rješenje dobije se:

$$0 = C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot 0 + 0 \Rightarrow C_1 = 0.$$

Deriviranjem općeg rješenja dobije se

$$y' = C_2e^x + C_2xe^x + \frac{1}{2}x^2e^x + \frac{1}{6}x^3e^x,$$

što uvrštavanjem $x = 0$ daje

$$1 = y'(0) = C_2 \cdot 1 + 0 \Rightarrow C_2 = 1.$$

Time je dobiveno partikularno rješenje koje zadovoljava nevedene početne uvjete:

$$y = xe^x + \frac{1}{6}x^3e^x.$$

$\square$

Zadatak 157 *Odredite opće rješenje diferencijalne jednadžbe $y'' + y = x \sin x$.*

Rješenje:

$$r^2+1=0 \Rightarrow r_{1,2}=\pm i \Rightarrow \alpha=0,\ \beta=1 \Rightarrow y_0=C_1\cos x+C_2\sin x,$$

$$a=0,\ b=1 \Rightarrow Y=x[(Ax+B)\cos x+(Cx+D)\sin x]$$

$$\Rightarrow Y'=2Ax\cos x+B\cos x+2Cx\sin x+D\sin x-Ax^2\sin x-Bx\sin x+Cx^2\cos x+Dx\cos x$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow Y'' &= 2A\cos x-4Ax\sin x-2B\sin x+2C\sin x+4Cx\cos x\\ &+ 2D\cos x-Ax^2\cos x-Cx^2\sin x-Bx\cos x-Dx\sin x\end{aligned}$$

$$\Rightarrow A=-\frac{1}{4},\ D=\frac{1}{4},\ B=C=0 \Rightarrow Y=x\left(-\frac{1}{4}x\cos x+\frac{1}{4}\sin x\right)$$

$$\Rightarrow y=C_1\cos x+c_2\sin x-\frac{1}{4}x^2\cos x+\frac{1}{4}x\sin x.$$

□

Kako linearne diferencijalne jednadžbe najčešće opisuju vremenske procese (raspade materije, titranja, difuzije, širenje topline itd.) u primjeni se češće javlja nepoznata funkcija $x=x(t)$ od vremenskog parametra t.

Zadatak 158 *Odredite opće rješenje diferencijalne jednadžbe* $x''+x=t\sin t$.

Rješenje:

$$r^2+1=0 \Rightarrow r_{1,2}=\pm i \Rightarrow \alpha=0,\ \beta=1 \Rightarrow x_0=C_1\cos t+C_2\sin t,$$

$$a=0,\ b=1 \Rightarrow X=t[(At+B)\cos t+(Ct+D)\sin t]$$

$$\Rightarrow X'=2At\cos t+B\cos t+2Ct\sin t+D\sin t-At^2\sin t-Bt\sin t+Ct^2\cos t+Dt\cos t$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow X'' &= 2A\cos t-4At\sin t-2B\sin t+2C\sin t+4Ct\cos t\\ &+ 2D\cos t-At^2\cos t-Ct^2\sin t-Bt\cos t-Dt\sin t\end{aligned}$$

$$\Rightarrow A=-\frac{1}{4},\ D=\frac{1}{4},\ B=C=0 \Rightarrow X=t\left(-\frac{1}{4}t\cos t+\frac{1}{4}\sin t\right)$$

$$\Rightarrow x=C_1\cos t+C_2\sin t-\frac{1}{4}t^2\cos t+\frac{1}{4}t\sin t.$$

□

Napomena: U traženju partikularnog rješenja postupak se ponekad može skratiti ako desna strana jednadžbe ima svojstvo parnosti i neparnosti a lijeva strana ne sadrži y'. U gornjem primjeru desna strana jednadžbe je parna funkcija, pa i partikularno rješenje tražimo mu obliku parne funkcije (lako se vidi da je derivacija parne funkcije parna funkcija, a derivacija neparne funkcije parna funkcija)

$$X=At^2\cos t+Ct\sin t.$$

Zadatak 159 *Odredite opće rješenje diferencijalne jednadžbe $y''+3y'+2y = 2e^{-x} + 4e^{-x}\cos x$.*

Rješenje:

$$r^2 + 3r + 2 = 0 \Rightarrow r_1 = -2,\ r_2 = -1 \Rightarrow y_0 = C_1e^{-2x} + C_2e^{-x},$$

$$Y = Axe^{-x} + Be^{-x}\cos x + Ce^{-x}\sin x$$

$$\Rightarrow Y' = Ae^{-x} - Axe^{-x} - Be^{-x}\cos x - Be^{-x}\sin x - Ce^{-x}\sin x + Ce^{-x}\cos x$$

$$\Rightarrow Y'' = -2Ae^{-x} + Axe^{-x} + 2Be^{-x}\sin x - 2Ce^{-x}\cos x$$

$$\Rightarrow A = 2,\ B = -2,\ C = 2 \Rightarrow Y = 2xe^{-x} - 2e^{-x}\cos x + 2e^{-x}\sin x$$

$$\Rightarrow y = C_1e^{-2x} + C_2e^{-x} + 2xe^{-x} - 2e^{-x}\cos x + 2e^{-x}\sin x.$$

□

9 Matrice i determinante

9.1 Pojam matrice i operacije s matricama

Matrica je pravokutna shema realnih ili kompleksnih brojeva raspoređenih u retke i stupce i njih zovemo elementima matrice. Matrica A sa m redaka, n stupaca i s elementima a_{ij} zapisuje se kao

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = [a_{ij}].$$

Takvu matricu zovemo $m \times n$ (čitaj: m puta n) matrica ili matrica tipa (reda, dimenzije) $m \times n$. Pritom niz brojeva $a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}, \ldots, a_{in}$ zovemo i-ti redak, a niz brojeva $a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{mj}$ poredanih jedan ispod drugog, j-ti stupac matrice A. Ako vrijedi $m = n$, kažemo da je A `kvadratna matrica reda` n.

Matricu sa samo jednim retkom zovemo `jednoretčana matrica`, a matricu sa samo jednim stupcem zovemo `jednostupčana matrica`. Matrica A je jednaka matrici B ako imaju isti broj redaka i isti broj stupaca i za njihove elemente vrijedi $a_{ij} = b_{ij}$, za sve i i j. S $M_{m,n}$ označavat ćemo skup svih $m \times n$ matrica.

Neka su $A, B \in M_{m,n}$. Matricu $C \in M_{m,n}$ s elementima

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij},\quad 1 \le i \le m,\quad 1 \le j \le n$$

zovemo `zbrojem ili sumom matrica` A `i` B i pišemo $C = A + B$.

Ako je $A \in M_{m,n}$ i $c \in \mathbf{R}$, matricu $B \in M_{m,n}$ s elementima

$$b_{ij} = ca_{ij}, \quad 1 \leq i \leq m, \quad 1 \leq j \leq n$$

zovemo `umnožak ili produkt matrice sa skalarom` c i označavamo $B = cA$.

Neka je $A \in M_{m,n}$ i $B \in M_{n,p}$. `Umnožak ili produkt matrica` A `i` B je matrica $C = A \cdot B \in M_{m,p}$ kojoj su elementi određeni formulom

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \quad \text{za sve} \quad 1 \leq i \leq m, \quad 1 \leq j \leq p.$$

Važnu klasu matrica čine `dijagonalne matrice`. Najpoznatiji primjer dijagonalne matrice je jedinična matrica

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \in M_{n,n}.$$

Lako je provjeriti da za svaku kvadratnu matricu $A \in M_{n,n}$ vrijedi

$$A \cdot I = I \cdot A = A.$$

Malo općenitija dijagonalna matrica je ona kod koje su svi elementi, osim onih na glavnoj dijagonalni, jednaki nuli. Dijagonalnu matricu kojoj su dijagonalni elementi $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ označavamo s $\mathrm{diag}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, tj.

$$\mathrm{diag}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \ddots & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & \ddots & \alpha_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha_n \end{bmatrix}.$$

`Nul-matrica` je matrica kojoj su svi elementi nula i kraće se označava s 0 i, također pripada klasi dijagonalnih matrica.

`Potencije kvadratne matrice` A definiraju se induktivno:

$$A^0 = I, \quad A^n = AA^{n-1} \quad \text{za} \quad n \in \mathbf{N}.$$

Lako se pokaže da vrijedi $A^n A^m = A^m A^n = A^{m+n}$ za sve nenegativne cijele brojeve m i n. Stoga je dobro definiran matrični polinom

$$P_k(A) = a_k A^k + a_{k-1} A^{k-1} + \ldots + a_1 A + a_0 I,$$

pri čemu su $a_0, \ldots, a_k$ realni brojevi.

Postoji još jedna vrlo korisna operacija na matricama. Naziva se operacijom transponiranja.

Neka je $A \in M_{m,n}$. Matrica $A^T \in M_{n,m}$ naziva se `transponirana matrica` matrice A, ako je svaki redak od A^T jednak odgovarajućem stupcu matrice A. Prema tome, transponiranu matricu dobivamo tako da stupce (retke) matrice zamijenimo njenim retcima (stupcima). Ako je

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \text{onda je} \quad A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Glavna svojstva operacije transponiranja su

(a) $(A^T)^T = A$,
(b) $(A+B)^T = A^T + B^T$,
(c) $(AB)^T = B^T A^T$.

Zadatak 160 *Ako je* $A = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 3 & 4 \\ -5 & -6 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 5 & -6 \\ 2 & -2 & 3 \end{bmatrix}$ *odredite* $3A + B^T$.

Rješenje:

$$3 \cdot \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 3 & 4 \\ -5 & -6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -2 \\ -6 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\cdot(-2)+1 & 3\cdot 2+2 \\ 3\cdot 3+5 & 3\cdot 4-2 \\ 3\cdot(-5)-6 & 3\cdot(-6)+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 8 \\ 14 & 10 \\ -21 & -15 \end{bmatrix}$$

$\square$

Zadatak 161 *Odredite matricu* X *koja zadovoljava uvjet* $2A - 3X = B$, *ako je* $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -5 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$.

Rješenje:

$$2A - 3X = B \Rightarrow 3X = 2A - B \Rightarrow X = \frac{2}{3}A - \frac{1}{3}B$$

$$\Rightarrow X = \frac{2}{3}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} - \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -5 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

$\square$

Zadatak 162 *Odredite* $m, n \in \mathbf{N}$ *iz:*

a) $A_{3\times 4} \cdot B_{4\times 5} = C_{m\times n}$
b) $A_{2\times 3} \cdot B_{m\times n} = C_{2\times 6}$
c) $A_{2\times m} \cdot B_{n\times 3} = C_{2\times 3}$

Rješenje:
a) $m = 3,\ n = 5$
b) $m = 3,\ n = 6$
c) $m = n \in \mathbf{N}$ □

Zadatak 163

$$\begin{bmatrix} -2 & 3 & 4 & 0 \\ 5 & -1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ -1 & 0 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2\cdot 1 + 3\cdot 0 + 4\cdot(-1) + 0\cdot 4 & -2\cdot 2 + 3\cdot(-1) + 4\cdot 0 + 0\cdot 0 \\ 5\cdot 1 + (-1)\cdot 0 + 2\cdot(-1) + 3\cdot 4 & 5\cdot 2 + (-1)\cdot(-1) + 2\cdot 0 + 3\cdot 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -6 & -7 \\ 15 & 11 \end{bmatrix}.$$

Zadatak 164 *Dokažite da je matrica* A *nultočka polinoma* $P_2(x) = x^2 - 4x - 5$*, ako je* $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

Rješenje: $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 8 & 8 \\ 8 & 9 & 8 \\ 8 & 8 & 9 \end{bmatrix}$,

$$A^2 - 4A - 5I = \begin{bmatrix} 9 & 8 & 8 \\ 8 & 9 & 8 \\ 8 & 8 & 9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 8 & 8 \\ 8 & 4 & 8 \\ 8 & 8 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Primjetite da je $P_2(x) = (x-5)(x+1)$, pa iako je $P_2(A) = 0$ matrica A je različita i od $5I$ i od $-I$. □

Zadatak 165 *Neka je* $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. *Izračunajte a)* $A^3 (= 0)$, *b)* $(A^T)^3$.

Zadatak 166 *Zadano je:* $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, $BA^T = \begin{bmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 3 & 7 & -2 \\ 7 & 4 & 8 \end{bmatrix}$.

Odredite $(AB)^T$.

Rješenje: $(AB)^T = B^T \cdot A^T$, B je simetrična, tj. $B^T = B$

$$\Rightarrow (AB)^T = B^T \cdot A^T = B \cdot A^T = \begin{bmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 3 & 7 & -2 \\ 7 & 4 & 8 \end{bmatrix}.$$

□

9.2 Determinante

`Determinanta kvadratne matrice` je funkcija $\det : M_{n,n} \to \mathbf{C}$ i označavamo je s $\det A, |A|$ ili

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Definiramo je induktivno po redu matrice:

$$n = 1, \quad A = [a_{11}] \quad \Rightarrow \quad \det A = a_{11}$$

$$n = 2, \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_1$$

Za matrice višeg reda determinata se definira (a može se izračunati i njena vrijednost) koristeći tzv. razvoj determinante po retku ili stupcu, koji se još naziva i Laplaceov razvoj determinante.

Neka je $A \in M_{n,n}$. S $M_{ij} \in M_{n-1,n-1}$ označit ćemo podmatricu od A koja nastaje izbacivanjem njenog i-tog retka i j-tog stupca. Npr. ako je

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1,j-1} & a_{1j} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,j-1} & a_{ij} & a_{i,j+1} & \cdots & a_{i,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{nj} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

onda je

$$M_{ij} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

`Minora elementa` a_{ij} matrice $A \in M_{n,n}$ je determinanta matrice M_{ij}. `Algebarski komplement elementa` a_{ij} je skalar $A_{ij} = (-1)^{i+j}\det M_{ij}$.

Sada, za $A = (a_{ij}) \in M_{n,n}$ vrijedi

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij}, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Ovu formulu nazivamo razvoj determinante po i-tom retku. Isto tako vrijedi formula

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij}, \quad 1 \leq j \leq n$$

koju nazivamo razvoj determinante po j-tom stupcu.

Zadatak 167 *Izračunajte* $D = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 5 & 4 & 2 \\ -3 & 0 & 5 \end{vmatrix}$

a) razvojem po drugom retku
b) razvojem po trećem stupcu

Rješenje: a)

$$\begin{aligned} D &= 5(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} + 4(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} + 2(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} \\ &= -5(5-0) + 4(-10+9) - 2(0+3) = -35. \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} D &= 3(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} + 2(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} + 5(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} \\ &= 3(0+12) - 2(0+3) + 5(-8-5) = -35. \end{aligned}$$

$\square$

Svojstva determinanti:

1. $\det A = \det A^T$

2. Zamjenom dva susjedna retka (ili stupca) deteminanta mijenja predznak

3. Ako su u determinanti dva retka (stupca) jednaka (ili proporcionalna) ona je jednaka nuli

4. Determinanta matrice dobivena iz početne matrice A množenjem nekog retka ili stupca skalarom λ jednaka je $\lambda \cdot \det A$ (ovo pravilo češće se koristi na način da se svi elementi nekog retka ili stupca skrate za zajednički faktor koji se izvlači ispred determinante). Odavde slijedi $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$ za kvadratnu matricu A reda n.

5. Vrijednost determinante se ne mijenja ako se nekom retku (ili stupcu) pribroje elementi nekog drugog retka (ili stupca) pomnoženi skalarom λ

6. Binet-Cauchyjev teorem: $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$

Zadatak 168 *Izračunajte* $\begin{vmatrix} -4 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -4 \end{vmatrix}$.

Rješenje: Dodajući prvom stupcu prvo drugi stupac, pa treći, četvrti i peti stupac (primjetite da je zbroj elemenata po recima jednak 0), razvijanjem determinante po prvom stupcu dobije se:

$$\begin{vmatrix} -4 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -4 \end{vmatrix} = 0.$$

$\square$

Zadatak 169 *Pokažite na primjeru determinanti reda 4 da ako su svi elementi ispod (iznad) glavne dijagonale jednaki 0, onda je determinanta jednaka produktu dijagonalnih elemenata.*

Rješenje: Primjer gornje trokutaste matrice. Razvijanjem uzastopce po prvom stupcu dobije se:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} \begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} \\ 0 & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}.$$

□

Zadatak 170 *Korištenjem elementarnih transformacija na recima i stupcima matrice (tj. korištenjem svojstava determinante) svedite sljedeće determinante na gornje trokutaste i izračunajte ih: a)* $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 5 & 7 & 8 \end{vmatrix}$ *b)* $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 2 & 4 & -3 \\ 5 & -3 & 2 \end{vmatrix}$

Rješenje: b)

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 2 & 4 & -3 \\ 5 & -3 & 2 \end{vmatrix} = \left\{ \begin{array}{c} \text{Pomnožimo drugi redak sa -1 i dodamo prvom retku} \\ \text{Pomnožimo drugi redak sa -2 i dodamo trećem retku} \end{array} \right\}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -6 & 8 \\ 2 & 4 & -3 \\ 1 & -11 & 8 \end{vmatrix} = \left\{ \begin{array}{c} \text{Pomnožimo prvi redak sa -2 i dodamo drugom retku} \\ \text{Pomnožimo prvi redak sa -1 i dodamo trećem retku} \end{array} \right\}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -6 & 8 \\ 0 & 16 & -19 \\ 0 & -5 & 0 \end{vmatrix} = \left\{ \begin{array}{c} \text{Izlučimo -5 iz trećeg retka} \\ \text{Zamijenimo drugi i treći redak} \end{array} \right\} = 5 \begin{vmatrix} 1 & -6 & 8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 16 & -19 \end{vmatrix}$$

$$= \left\{ \begin{array}{c} \text{Pomnožimo drugi redak sa} \\ \text{-16 i dodamo trećem retku} \end{array} \right\} = 5 \begin{vmatrix} 1 & -6 & 8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -19 \end{vmatrix} = 5 \cdot 1 \cdot 1 \cdot (-19) = -95.$$

□

Zadatak 171 *Neka je matrica* $A = [a_{i,j}]$ *zadana sa* $a_{i,j} = |i-j|$. *Izračunajte* $\det A$ *ako je matrica* A *formata a)* 2×2 *b)* 3×3 *c)* 4×4.

Rješenje: c) Iz definicije se lako vidi da je $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Sada je:

$$\det A = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \left\{ \begin{array}{c} \text{1. i 2. redak} \\ \text{zamjene mjesta} \end{array} \right\} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \left\{ \begin{array}{c} \text{Pomnožimo prvi redak sa } -2 \text{ i dodajmo trećem} \\ \text{Pomnožimo prvi redak sa } -3 \text{ i dodajmo četvrtom} \end{array} \right\} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 2 & -2 & -6 \end{vmatrix}$$

$$= -2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & -3 \\ 1 & -1 & -3 \end{vmatrix} = \left\{ \begin{array}{c} \text{Pomnožimo prvi redak sa } -1 \text{ i dodajmo drugom} \\ \text{Pomnožimo prvi redak sa } -1 \text{ i dodajmo trećem} \end{array} \right\}$$

$$= -2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -6 \\ 0 & -3 & -6 \end{vmatrix} = 12 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -12.$$

□

9.3 Pojam inverzne matrice. Matrične jednadžbe.

Definicija 9 *Matricu B zovemo **inverznom matricom** matrice A ako je $A \cdot B = B \cdot A = I$ (I jedinična matrica).*
Oznaka: $B = A^{-1}$.
*Matricu koja ima inverznu zovemo **regularnom matricom**. Matricu koja nema inverznu matricu zovemo **singularnom matricom**.*

Kako je jedinična matrica kvadratna, to očito i matrica A (pa onda i A^{-1}) ima isti broj redaka i stupaca kao i I.

Primjer 6 *Pokažimo da je matrica $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ singularna matrica. Pretpostavimo suprotno. Neka je $B = \begin{bmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} \\ b_{2,1} & b_{2,2} \end{bmatrix}$ inverzna matrica matrice A tj. neka je $AB = BA = I$. Kako je $AB = \begin{bmatrix} b_{1,1} + b_{2,1} & b_{1,2} + b_{2,2} \\ b_{1,1} + b_{2,1} & b_{1,2} + b_{2,2} \end{bmatrix}$, da bi vrijedilo $AB = I$ mora vrijediti $b_{1,1} + b_{2,1} = 1$ i $b_{1,1} + b_{2,1} = 0$, što je nemoguće, što znači da A^{-1} ne postoji.*

Ako je $AA^{-1} = I$ tada koristeći Binet-Cauchyjev teorem (i očitu činjenicu da je $\det I = 1$) slijedi $\det A \cdot \det A^{-1} = 1$, što očito daje $\det A \neq 0$.

Ako je $\det A \neq 0$, tada možemo formirati matricu

$$B = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \dots & A_{1,n} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \dots & A_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{n,1} & A_{n,2} & \dots & A_{n,n} \end{bmatrix}^T = \frac{1}{\det A} A^*.$$

Matricu A^* (transponiranu matricu matrice algerbarskih komplemenata) zovemo `adjunktom matrice` A. Lako se vidi (koristeći Laplaceov razvoj determinante i svojstvo da je determinanta matrice sa dva ista retka jednaka 0) da je $AA^* = A^*A = \det A \cdot I$. Odavde odmah slijedi da je $AB = BA = I$ tj. da je $B = A^{-1}$.

Time je dobiven sljedeći teorem.

Teorem 7 *A je regularna matrica akko je* $\det A \neq 0$.

Vrijede sljedeća svojstva invertiranja matrica:

1. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
2. $(A^{-1})^{-1} = A$
3. $(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda}A^{-1}$, $\lambda \neq 0$
4. $\det A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}$.

Zadatak 172 *Odredite* A^{-1} *za* $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$.

Rješenje: a) Kako je $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -6 \neq 0$, to je matrica A regularna. Odredimo matricu algebarskih komplemenata matrice A. Imamo redom:

$$A_{1,1} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -6,\ A_{1,2} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -2,\ A_{1,3} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 0,$$

$$A_{2,1} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 3,\ A_{2,2} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2,\ A_{2,3} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -3,$$

$$A_{3,1} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 0,\ A_{3,2} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -2,\ A_{3,3} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Odavde je

$$A^{-1} = \frac{1}{-6} \left| \begin{matrix} -6 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & -3 \\ 0 & -2 & 0 \end{matrix} \right]^T = \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ 1/3 & -1/3 & 1/3 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}.$$

□

Zadatak 173 *Za koje vrijednosti parametra* $k \in \mathbf{R}$ *postoji inverzna matrica matrice* $A = \begin{bmatrix} 2 & -k & 3 \\ -2 & 1 & -3 \\ 2 & 7 & 5 \end{bmatrix}$?

Rješenje: Kako je

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -k & 3 \\ -2 & 1 & -3 \\ 2 & 7 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -k & 3 \\ 0 & 1-k & 0 \\ 0 & 7+k & 2 \end{vmatrix} = 4(1-k),$$

to $\det A \neq 0 \Leftrightarrow 4(1-k) \neq 0 \Leftrightarrow k \neq 1$ povlači da je matrica A regularna (v. gornji teorem). $\square$

Zadatak 174 *Ako je* $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ *i* $\det A = ad - bc \neq 0$, *pokažite da je* $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$.

Rješenje: Lako se provjeri da je $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = (ad-bc)I$. $\square$

Zadatak 175 *Riješite matričnu jednadžbu a)* $AX = B$ *b)* $XA = B$, *gdje je* $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$.

Rješenje: Primjetimo da je $\det A = 4 - 6 = -2 \neq 0$, što znači da je A regularna matrica.
a) Jednadžba $AX = B$ sada povlači $X = A^{-1}B$, što daje (v. prethodni zadatak)

$$X = A^{-1}B = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & -3 \\ 5 & 7/2 \end{bmatrix}.$$

b) Jednadžba $XA = B$ sada povlači $X = BA^{-1}$, što daje

$$X = BA^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 19/2 & -7/2 \end{bmatrix}.$$

$\square$

Zadatak 176 *Riješite matričnu jednadžbu* $XA - 2B = C$ *ako je* $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 6 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$.

Rješenje: Kako je očito $\det A = 1$ to je A regularna matrica, pa jednadžba $XA - 2B = C$ povlači $X = (C + 2B)A^{-1}$. Primjetimo da imamo dobro "ulančane" matrice jer je matrica $C + 2B$ formata 2×3 dok je matrica A^{-1} reda 3 tj. formata 3×3, pa je matrica X formata 2×3.

Imamo: $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ pa onda dobivamo

$$X = (2B + C)A^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 5 & -2 & 13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -3 & 1 \\ 5 & -7 & 15 \end{bmatrix}.$$

$\square$

Zadatak 177 *Riješite matričnu jednadžbu* $\left(2A^{-1}X\right)^{-1} = A^*$, *ako je* $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$.

Rješenje: Kako je $\det A = 10 \neq 0$, to je matrica A regularna pa je zadatak dobro zadan. Sada je

$$\left(2A^{-1}X\right)^{-1} = A^* \Leftrightarrow \left(2A^{-1}X\right)^{-1} = (\det A)A^{-1} \Leftrightarrow 2A^{-1}X = \frac{1}{\det A}A \Leftrightarrow X = \frac{1}{2\det A}A^2$$

$$= \frac{1}{20}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \frac{1}{20}\begin{bmatrix} -5 & -10 \\ 15 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/4 & -1/2 \\ 3/4 & 1/2 \end{bmatrix}$$

$\square$

Zadatak 178 *(DZ) Riješite matričnu jednadďžbu a)* $AX = 5X + 3A^*$ *b)* $XA = 5X + 3A^*$ *gdje je* $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$.

Rješenje: a) Očito je $AX = 5X + 3A^* \Leftrightarrow (A - 5I)X = 3A^*$. Dalji postupak rješavanja ovisi o tome je li matrica $A - 5I = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$ regularna ili singularna. No kako je $\det(A - 5I) = 4 \neq 0$ to je matrica $A - 5I$ regularna matrica. Sada je

$$(A - 5I)X = 3A^* \Leftrightarrow X = 3(A - 5I)^{-1}A^* = 3 \cdot \frac{1}{4}\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{3}{4}\begin{bmatrix} -6 & -2 \\ 4 & -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9/2 & -3/2 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}.$$

b) Imamo $XA = 5X + 3A^* \Leftrightarrow X(A - 5I) = 3A^* \Leftrightarrow X = 3A^*(A - 5I)^{-1}$. Odavde se lako vidi da je rješenje i ove jednadžbe

$$X = \begin{bmatrix} -9/2 & -3/2 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}.$$

Napomena: Iako kod matričnog množenja treba paziti na poredak množitelja ovdje smo dobili isto rješenje. Ovdje to nije slučajnost već posljedica jednakosti $A^{-1}(A-\lambda I)^{-1} = (A-\lambda I)^{-1}A^{-1}$. Pokažite tu jednakost. Ona povlači i da je $A^*(A - \lambda I)^{-1} = (A - \lambda I)^{-1}A^*$. □

9.4 Sustavi linearnih jednadžbi

Jedan od najvažnijih problema linearne algebre jest rješavanje sustava linearnih jednadžbi

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m. \end{array} \tag{3}$$

Uvođenjem matrice sustava $A \in M_{m,n}$, jednostupčane matrice rješenja $x \in M_{n,1}$ i jednostupčane matrice desne strane sustava $b \in M_{m,1}$,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix},$$

sustav (3) prelazi u matrični problem

$$Ax = b.$$

- Sustav je **suglasan** ako postoji barem jedno rješenje tog sustava. U protivnom je **nesuglasan**.
- Suglasan sustav je **određen** ako ima **samo** jedno rješenje.
- Sustav koji ima više rješenja je **neodređen**.

GAUSSOVA METODA

Zadatak 179 *Gaussovom metodom riješite sustav:*

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 1 \\ 2x_1 & - & x_2 & & & - & 3x_4 & = & 2 \\ 3x_1 & & & - & x_3 & + & x_4 & = & -3 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & - & 2x_3 & + & 5x_4 & = & -6 \end{array}.$$

Rješenje:

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 2 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & -3 & 2 \\ 3 & 0 & -1 & 1 & -3 \\ 2 & 2 & -2 & 5 & -6 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrrr|r} 2 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -5 & 5 & -9 \\ 0 & 3 & -3 & 6 & -7 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{rrrr|r} 2 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -5 & 5 & -9 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrrr|r} 2 & -1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 15 & -14 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{rrrr|r} 2 & -1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & -14/3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4/3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrrr|r} 2 & -1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 5/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4/3 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 5/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4/3 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{rcr} x_1 & = & 0 \\ x_2 & = & 2 \\ x_3 & = & 5/3 \\ x_4 & = & -4/3 \end{array}$$

□

Zadatak 180 *Gaussovom metodom riješite sustav:*

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & - & 4x_4 & = & 4 \\ & & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & -3 \\ x_1 & + & 3x_2 & & & - & 3x_4 & = & 1 \\ & - & 7x_2 & + & 3x_3 & + & x_4 & = & -3 \end{array}.$$

Rješenje:

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & -7 & 3 & 1 & -3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 5 & -3 & 1 & -3 \\ 0 & -7 & 3 & 1 & -3 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 12 \\ 0 & 0 & -4 & 8 & -24 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{rcr} x_1 & = & -8 \\ x_2 & = & 3+t \\ x_3 & = & 6+2t \\ x_4 & = & t \end{array}, \quad t \in \mathbf{R}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ 3 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbf{R}.$$

□

Zadatak 181 *Diskutirajte sustav*

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 0 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & + & ax_2 & - & 2x_3 & = & 2 \end{array}$$

u ovisnosti o parametru a.

Rješenje:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & a & -2 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 1 \\ 0 & a-2 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

Ako je $a = 2$ sustav je nesuglasan ($r(A) < r(Ab)$). Ako je $a \neq 2$ računamo dalje

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2/(a-2) \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -2/(a-2) \\ 0 & 0 & 3 & (a+4)/(a-2) \\ 0 & 1 & 0 & 2/(a-2) \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -2/(a-2) \\ 0 & 0 & 1 & (a+4)/3(a-2) \\ 0 & 1 & 0 & 2/(a-2) \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 2/(a-2) \\ 0 & 0 & 1 & (a+4)/3(a-2) \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \begin{array}{rcr} x_1 & = & 1/3 \\ x_2 & = & 2/(a-2) \\ x_3 & = & (a+4)/3(a-2) \end{array}$$

□

Zadatak 182 *Diskutirajte sustav*

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} 2x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 1 \\ x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 & = & a \\ 3x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & & & = & 4 \end{array}$$

u ovisnosti o parametru a.

Rješenje:

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 2 & 3 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 & a \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 4 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 2 & -1 & a \\ 2 & 3 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 4 \end{array}\right]$$
$$\sim \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 2 & -1 & a \\ 0 & 5 & -5 & 3 & 1-2a \\ 0 & 5 & -5 & 3 & 4-3a \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 2 & -1 & a \\ 0 & 5 & -5 & 3 & 1-2a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3-a \end{array}\right].$$

Ako je $a \neq 3$ sustav je nesuglasan, a ako je $a = 3$ sustav je suglasan i neodređen. □

Zadatak 183 *Riješite matričnu jednadžbu* $AX = B$ *ako je* $A = \left[\begin{array}{rrr} 2 & 3 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \end{array}\right]$, $B = \left[\begin{array}{r} 1 \\ 2 \end{array}\right]$.

Rješenje:

$$\left[\begin{array}{rrr} 2 & 3 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{r} 1 \\ 2 \end{array}\right] \Leftrightarrow \begin{array}{rcrcrcl} 2x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & = & 1 \\ 3x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 2 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 2 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 5 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & -2 & 1 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 5 & 1 & 0 & 3 \\ 13 & 0 & 1 & 8 \end{array}\right]$$
$$\Rightarrow \begin{array}{rcr} x_1 & = & t \\ x_2 & = & 3-5t \\ x_3 & = & 8-13t \end{array} \Rightarrow \left[\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{r} 0 \\ 3 \\ 8 \end{array}\right] + t \left[\begin{array}{r} 1 \\ -5 \\ -13 \end{array}\right], \quad t \in \mathbf{R}.$$

□

Zadatak 184 *Riješite matričnu jednadžbu* $XA^8 + A^* = XA - A^{11}$ *ako je* $A = \left[\begin{array}{rr} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{array}\right]$.

Rješenje:

$$X(A^8 - A) = -A^* - A^{11}, \quad A^* = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I \text{ za parne potencije}$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = A \text{ za neparne potencije}$$

$$\Rightarrow A^8 - A = I - A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow \det(A^8 - A) = 0 \Rightarrow (A^8 - A)^{-1}$ ne postoji pa rješavamo sustav $X(I - A) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{array}{rcrcl} x_{11} & - & x_{12} & = & 0 \\ -x_{11} & + & x_{12} & = & 0 \\ x_{21} & - & x_{22} & = & 0 \\ -x_{21} & + & x_{22} & = & 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow x_{11} = x_{12} = a, \Rightarrow x_{21} = x_{22} = b \Rightarrow X = \begin{bmatrix} a & a \\ b & b \end{bmatrix}, \quad a, b \in \mathbf{R}.$$

$\square$