12. Shema konačnih razlika za parcijalne diferencijalne jednadžbe

12.1. Uvod

Opći oblik linearne parcijalne diferencijalne jednadžbe drugog reda u dvije varijable je

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = D\frac{\partial u}{\partial x} + E\frac{\partial u}{\partial y} + Fu + G, \tag{12.1}$$

gdje su A, B, C, D, E, F, G dane funkcije koje su neprekidne u određenom području S ravnine $x0y$. Područje S obično je definirano kao unutrašnjost neke krivulje Γ. Tipičan problem koji se postavlja je pronalaženje dva puta neprekidno-diferencijabilnog rješenja $(x, y) \to u(x, y)$ koje zadovoljava jednadžbu (12.1) i određene uvjete na krivulji (rubu) Γ.

Linearne parcijalne diferencijalne jednadžbe drugog reda mogu biti klasificirane kao eliptičke, paraboličke i hiperboličke jednadžbe u ovisnosti o ponašanju koeficijenata A, B, C u (12.1). Naime neka je $\bar{D} = AC - B^2$.

Ako je u danom području S:

1. $\bar{D} > 0$, jednadžba (12.1) je eliptičkog tipa;
2. $\bar{D} = 0$, jednadžba (12.1) je paraboličkog tipa;
3. $\bar{D} < 0$, jednadžba (12.1) je hiperboličkog tipa.

U slučaju kada $\bar{D}$ mijenja znak, jednadžba (12.1) je mješovitog tipa.

Primjer 12.1. *Laplaceova jednadžba*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \tag{12.2}$$

je eliptičkog tipa, jer je $A = C = 1, B = 0$, *tj.* $\bar{D} = AC - B^2 = 1 > 0$.

Primjer 12.2. *Jednadžba provođenja topline*

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

je paraboličkog tipa, jer je $\bar{D} = (-a^2)0 - 0^2 = 0$.

Primjer 12.3. *Valna jednadžba*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

je hiperboličkog tipa, jer je $\bar{D} = (-c^2)1 - 0^2 = -c^2 < 0$.

Primjer 12.4. *Kod jednadžbe*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

imamo $\bar{D} = y$, *pa je ona mješovitog tipa u području* $S = \{(x, y)|0 < x < 1, -1 < y < 1\}$. *Međutim u području* $S' = \{(x, y)|0 < x < 1, 0 < y < 1\}$ *jednadžba je eliptičkog tipa.*

U određenim jednostavnijim slučajevima moguće je naći rješenje parcijalne diferencijalne jednadžbe (12.1) koje zadovoljava određene rubne uvjete. Na primjer, tzv. Dirichletov problem za Laplaceovu jednadžbu (12.2), s $u(x, y) = s(x, y)$, $(x, y) \in \Gamma$, gdje je s dana neprekidna funkcija, može biti rješen kada je, recimo, Γ kružnica $x^2 + y^2 = r^2$. Tada se rješenje može predstaviti pomoću tzv. Poissonove integralne formule

$$u(x, y) = \frac{r^2 - \rho^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{s(re^{i\varphi})}{r^2 + \rho^2 - 2r\rho\cos(\theta - \varphi)} d\varphi,$$

gdje su $x = \rho\cos\theta, y = \rho\sin\theta$.

U općem slučaju nije moguće analitički rješiti jednadžbu (12.1). Mi ćemo razmotriti jednu općenitu numeričku metodu tzv. shemu konačnih razlika ili metodu mreže. Osnovna ideja je zamjeniti derivacije (u ovom slučaju parcijalne) s konačnim razlikama, i time svesti parcijalnu diferencijalnu jednadžbu na sustav algebarskih jednadžbi.Pokazat ćemo kako se u pojedim slučajevima to radi.

12.2. Jednadžba ravnoteže

Neka je dan rubni problem

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = f(x,y), & \text{na} \quad S = [a,b] \times [c,d], \\ u(x,y) = g(x,y), & \text{na} \quad \Gamma = \partial S, \end{cases}$$

gdje je f neprekidna funkcija na S, a g neprekidna na rubu S.

Područje S prekrijemo mrežom koju dobijemo tako da segmente na osi x i osi y podijelimo ekvidistantno na podsegmente. Tako imamo

$$h = \frac{b-a}{n}, \quad k = \frac{d-c}{m}.$$

Broj h se zove korak mreže po x osi, a k korak mreže po y osi. Tako imamo točke podjele

$$x_i = a + ih, \; i = 0,1,2,...,n \;\; y_j = c + jk, \; j = 0,1,2,\ldots,m$$

na osima. Točku s koordinatama

$$(x_i, y_j) = (a + ih, c + jk)$$

zovemo ij-tim čvorom mreže. Čvor zovemo unutrašnjim, ako je $1 \leq i \leq n-1$ i $1 \leq j \leq m-1$. U protivnom kažemo da je čvor rubni. Stavimo

$$u(x_i, y_j) = u_{ij}, \quad f(x_i, y_j) = f_{ij}.$$

Kao i u slučaju običnih derivacija, aproksimacije parcijalnih derivacija možemo dobiti pomoću Taylorove formule za funkciju od dvije varijable. Tako imamo

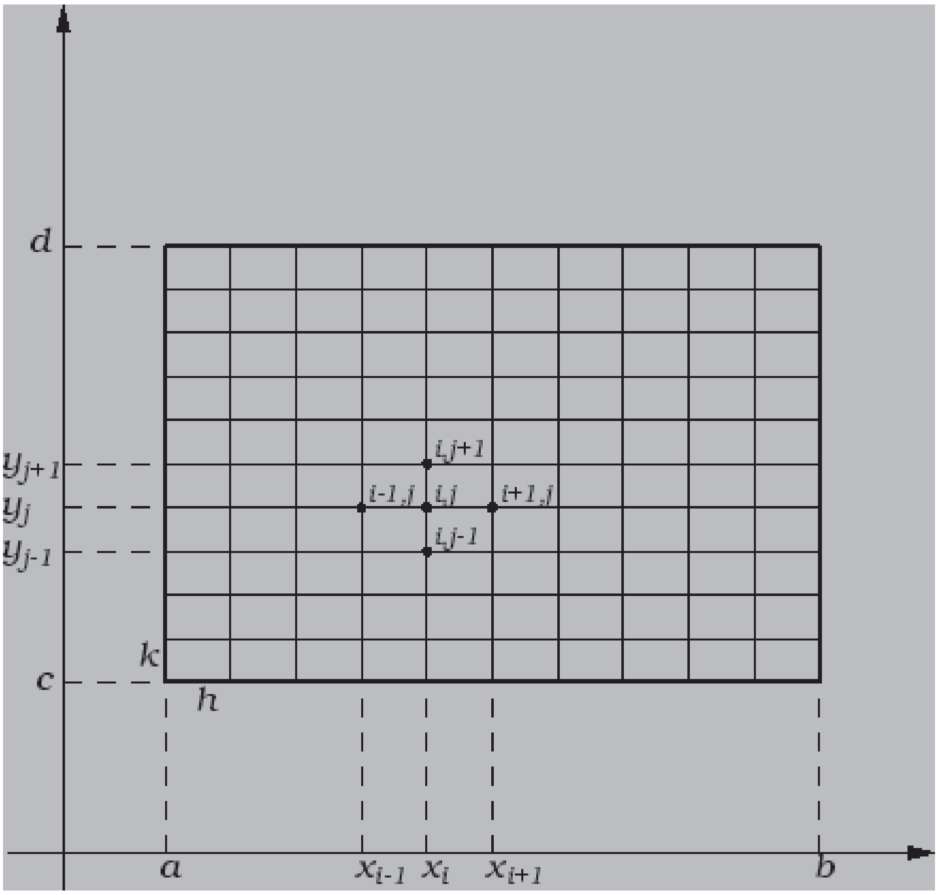
$$\frac{\partial^2 u(x_i, y_j)}{\partial x^2} \approx \frac{u_{i-1j} - 2u_{ij} + u_{i+1j}}{h^2}, \quad \frac{\partial^2 u(x_i, y_j)}{\partial y^2} \approx \frac{u_{ij-1} - 2u_{ij} + u_{ij+1}}{k^2}.$$

Neka je ij unutrašnji čvor. Tada diferencijalnu jednadžbu u tom čvor možemo zamijeniti algebarskom jednadžbom

$$\frac{u_{i-1j} - 2u_{ij} + u_{i+1j}}{h^2} + \frac{u_{ij-1} - 2u_{ij} + u_{ij+1}}{k^2} = f_{ij}.$$

Ako je čvor ij rubni, onda imamo

$$u_{ij} = g_{ij}.$$

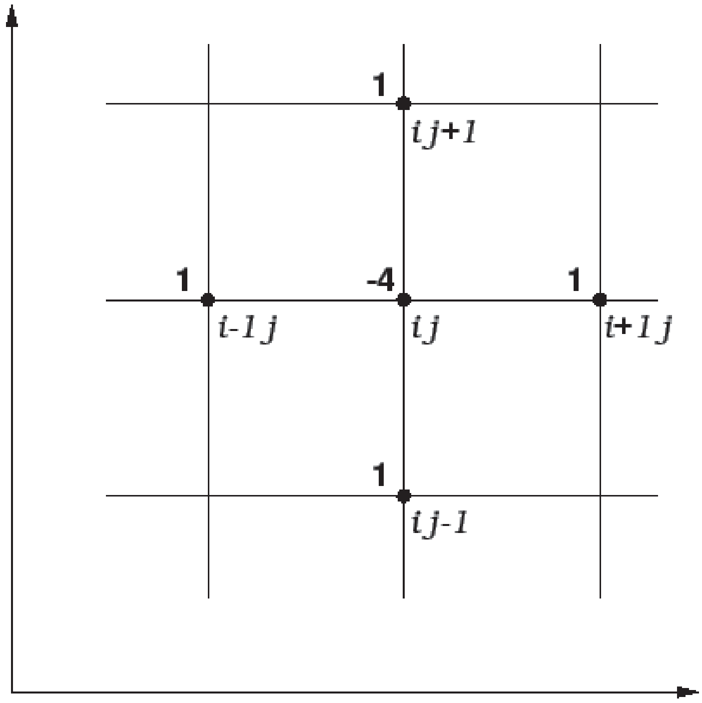


Slika 12.1.

Time smo dobili onoliko linearnih algebarskih jednadžbi koliko imamo nepoznanica u_{ij}. Rješavati treba samo sustav jednadžbi unutrašnjih čvorova. Pretpostavimo, radi jednostavnosti, da su a, b, c, d, n, m takvi da je $h = k$. Tada, nakon množenja s h^2, jednadžba ij-tog čvora postaje

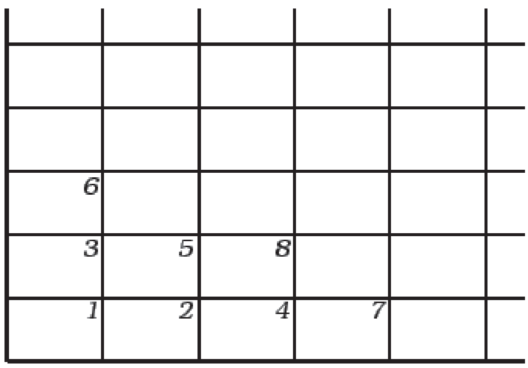
$$u_{ij-1} + u_{i-1j} - 4u_{ij} + u_{i+1j} + u_{ij+1} = h^2 f_{ij}.$$

Vidimo da u svakom retku matrice ima najviše pet elemenata različitih od nule. Na sljedećoj slici su istaknuti oni čvorovi, čije vrijednosti funkcije u dolaze u jednadžbi, i upisani su koeficijenti kojima ih treba množiti.



Slika 12.2.

Jednadžbe trebamo na neki način poredati. To možemo učiniti tako da poredamo čvorove. Njih možemo poredati na različite načine. Jedan od njih je poredak kao na slici



Slika 12.3.

Dakle

$$11, 21, 12, 31, 22, 13, 41, 32, 23, 14, \ldots$$

Stavimo

$$u_1 = u_{11},\ u_2 = u_{21},\ u_3 = u_{12},\ u_4 = u_{31}, \ldots$$

Na taj način dobivamo sljedeći sustav linearnih algebarskih jednadžbi

$$\begin{aligned}
-4u_1 + u_2 + u_3 &= h^2 f_{11} - g_{10} - g_{01} \\
u_1 - 4u_2 + u_4 + u_5 &= h^2 f_{21} - g_{20} \\
u_1 - 4u_3 + u_5 + u_6 &= h^2 f_{12} - g_{02} \\
u_2 - 4u_4 + u_7 + u_8 &= h^2 f_{31} - g_{30} \\
u_2 + u_3 - 4u_5 + u_8 + u_9 &= h^2 f_{22} \\
&\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Primjer 12.5. *Shemom konačnih razlika riješite problem*

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = x + y, & na \quad S = [0,1] \times [1,2], \\ u(x,y) = xy, & na \quad \Gamma = \partial S, \end{cases}$$

s $h = 0.5$.

Rješenje.

$$x_0 = 0, x_1 = 0.5, x_2 = 1, \quad y_0 = 1, y_1 = 1.5, y_2 = 2.$$

Kako je (x_1, y_1) jedini unutrašnji čvor imamo

$$\Rightarrow f_{11} = x_1 + y_1 = 2, u_{00} = u_{01} = u_{02} = 0, u_{10} = x_1 y_0 = 0.5,$$

$$u_{20} = x_2 y_0 = 1, u_{12} = x_1 y_2 = 1, u_{21} = x_2 y_1 = 1.5, u_{22} = x_2 y_2 = 2$$

$$\Rightarrow u_{10} + u_{01} - 4u_{11} + u_{21} + u_{12} = 0.5^2 \cdot f_{11} \Rightarrow -4u_{11} = 0.25 \cdot 2 - 0.5 - 0 - 1.5 - 1 \Rightarrow u_{11} = 0.625.$$

12.3. Jednadžba provođenja

Jednodimenzialno provođenje topline opisano je sljedećim rubno-početnim problemom

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, & \text{za} \quad x \in [0,l], t \in [0,\infty), \\ u(0,t) = 0, u(l,t) = 0, & \text{za} \quad t \in [0,\infty) \\ u(x,0) = g(x), & \text{za} \quad x \in [0,l]. \end{cases}$$

Neka je

$$h = \frac{l}{n}$$

korak može po osi x, a τ korak po osi t. Tako imamo točke podjele na x osi, odnosno t osi

$$x_i = ih, \ i = 0, 1, 2, \ldots, n \quad t_j = j\tau, \jmath = 0, 1, 2, \ldots$$

Primjetimo da po t mreža ide u beskonačnost.

Interesira nas što se događa u čvorovima, tj. točkama

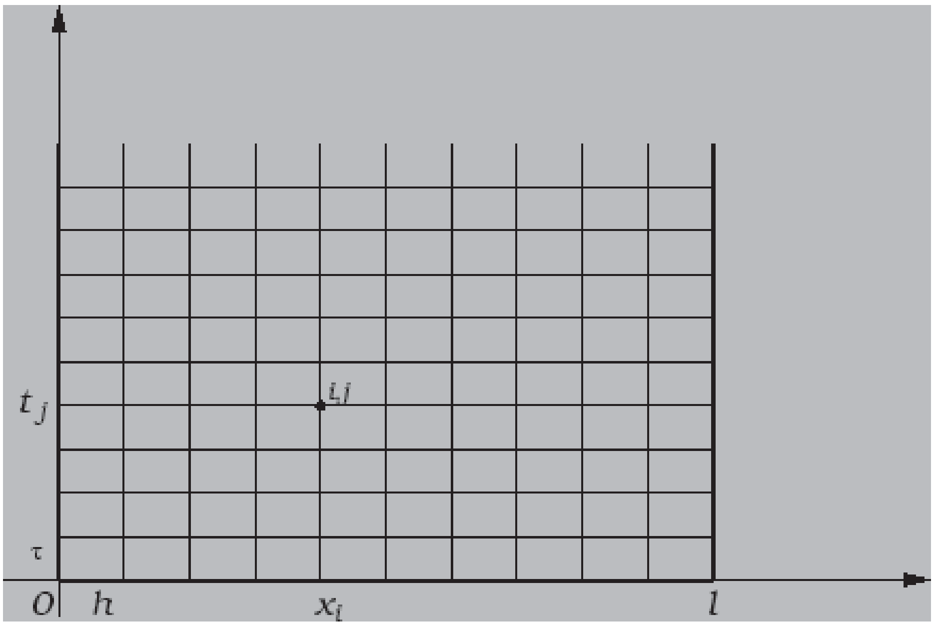
$$(x_i, t_j) = (ih, j\tau), \ i = 0, 1, 2, \ldots, n, \ j = 0, 1, 2, \ldots$$

Stavimo

$$u(x_i, t_j) = u_{ij}.$$

Iz rubnih i početnih uvjeta slijedi

$$u_{0j} = u_{nj} = 0, \ j = 0, 1, 2, \ldots \quad u_{i0} = g(x_i) = g_i, \ i = 0, 1, 2, \ldots, n.$$



Slika 12.4.

Dakle ostaje odrediti u_{ij} u unutrašnjim čvorovima. U tu svrhu derivacije aproksimiramo koristeći neke od mogućih formula, npr.

$$\frac{\partial u(x_i, t_j)}{\partial t} \approx \frac{u_{ij+1} - u_{ij}}{\tau}, \quad \frac{\partial^2 u(x_i, t_j)}{\partial x^2} \approx \frac{u_{i-1j} - 2u_{ij} + u_{i+1j}}{h^2}.$$

U unutrašnjem čvoru ij diferencijalna jednadžba postaje

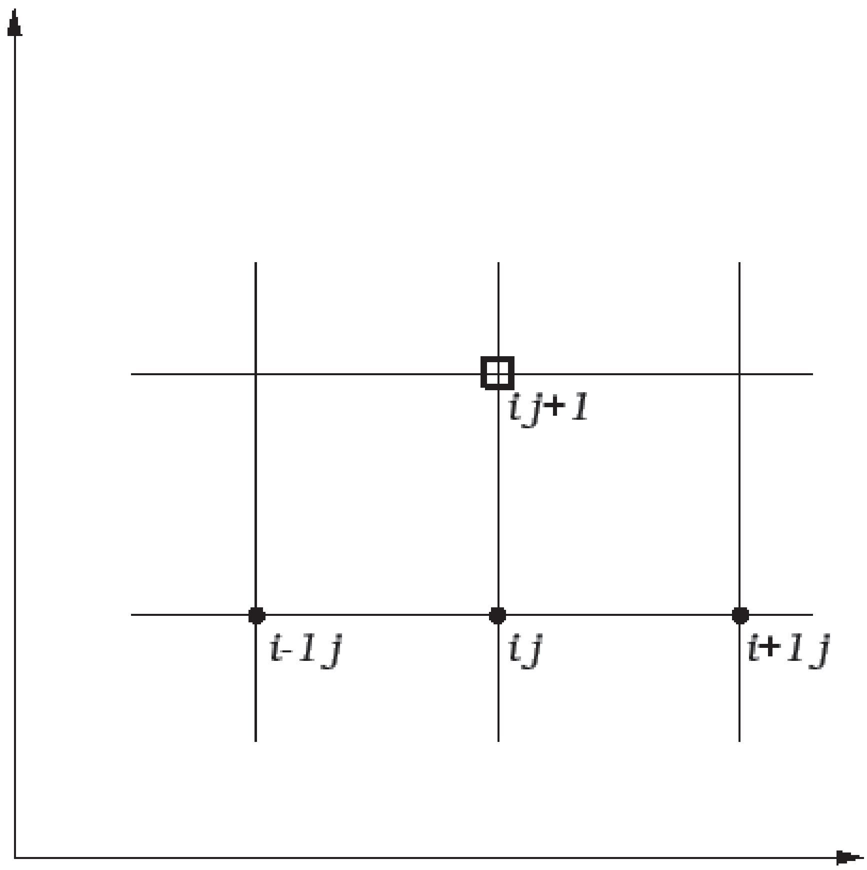
$$\frac{u_{ij+1} - u_{ij}}{\tau} = a^2 \frac{u_{i-1j} - 2u_{ij} + u_{i+1j}}{h^2}.$$

Pomnožimo jednadžbu s τ, i stavimo

$$\sigma = \frac{\tau}{h^2}.$$

Tada jednadžba u čvoru ij glasi

$$u_{ij+1} = a^2\sigma u_{i-1j} + (1 - 2a^2\sigma)u_{ij} + a^2\sigma u_{i+1j}. \tag{12.3}$$



Slika 12.5.

Sada, za razliku od postupka kod jednadžbe ravnoteže, rješenje tražimo sukcesivno. Zahvaljujući upotrebljenoj shemi razlika, najprije računamo u_{i1} po formuli (12.3)

$$u_{i1} = a^2\sigma u_{i-10} + (1 - 2a^2\sigma)u_{i0} + a^2\sigma u_{i+10}, \ i = 1, 2, \ldots, n - 1.$$

Zatim formulom (12.3) za $j = 2$ računamo u_{i2},

$$u_{i2} = a^2\sigma u_{i-11} + (1 - 2a^2\sigma)u_{i1} + a^2\sigma u_{i+11},\ i = 1, 2, \ldots, n-1$$

itd.

Da bi ovako definiran postupak bio korektan, on treba biti konvergentan, tj. sa smanjivanjem koraka mora približno rješenje težiti k točnom rješenju, i stabilan, tj. male promjene ulaznih podataka (greške zaokruživanja) ne smiju prouzročiti velike razlike u rješenju.

Može se pokazati da su oba uvjeta ispunjena, ako je,

$$a^2\sigma \le \frac{1}{2},\ \text{tj. } \tau \le \frac{1}{2a^2}h^2.$$

Ovdje opisan postupak rješavanja, zasnovan na formuli (12.3) zove se eksplicitan. On je kao što se vidi vrlo jednostavan. Nedostatak postupka je u tome što se zbog potrebe stabilnosti i konvergencije mora korak po osi t uzeti vrlo malen. Za $a = 1$ i $h = 0.1$ treba biti $\tau \le 0.005$.

Postoji implicitni postupak, kod kojeg nema zahtjeva na σ. Međutim, on vodi na rješavanje sustava jednadžbi, pa se tu pojavljuje drugi problem, osobito kad su koraci maleni. Osim toga kod implicitnog postupka moramo unaprijed ograničiti vrijeme, kako bismo imali konačno mnogo čvorova, dok kod eksplicitnog postupka ne treba unaprijed ograničavati vrijeme.

Primjer 12.6. *Shemom konačnih razlika rješite problem*

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = 9\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, & za \quad x \in [0,1], t \in [0,\infty), \\ u(0,t) = 0, u(1,t) = 0, & za \quad t \in [0,\infty) \\ u(x,0) = x(1-x), & za \quad x \in [0,1], \end{cases}$$

s $h = 0.5$ *i* $\tau = 0.01$.

Rješenje.

$$\sigma = \frac{\tau}{h^2} = 0.04$$

$\Rightarrow u_{ij+1} = 9{\cdot}0.04u_{i-1j} + (1-2{\cdot}9{\cdot}0.04)u_{ij} + 9{\cdot}0.04u_{i+1j} = 0.36u_{i-1j} + 0.28u_{ij} + 0.36u_{i+1j}$.

Kako je $x_0 = 0, x_1 = 0.5, x_2 = 1$ imamo

$$u_{0j} = u_{2j} = 0, u_{10} = x_1(1 - x_1) = 0.5 \cdot 0.5 = 0.25.$$

Sada,

$$\begin{aligned} u_{11} &= 0.36u_{00} + 0.28u_{10} + 0.36u_{20} = 0.36 \cdot 0 + 0.28 \cdot 0.25 + 0.36 \cdot 0 = 0.07 \\ u_{12} &= 0.36u_{01} + 0.28u_{11} + 0.36u_{21} = 0.36 \cdot 0 + 0.28 \cdot 0.07 + 0.36 \cdot 0 = 0.0196 \\ u_{13} &= 0.36u_{02} + 0.28u_{12} + 0.36u_{22} = 0.36 \cdot 0 + 0.28 \cdot 0.14 + 0.36 \cdot 0 = 0.005488 \\ &\vdots \end{aligned}$$

12.4. Valna jednadžba

Problem koji sada rješavamo je

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, & \text{za} \quad x \in [0,l], t \in [0,\infty), \\ u(0,t) = 0, u(l,t) = 0, & \text{za} \quad t \in [0,\infty), \\ u(x,0) = \alpha(x), \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \beta(x), & \text{za} \quad x \in [0,l]. \end{cases}$$

Diskretizaciju područja učinimo kao kod jednadžbe provođenja. Razlika je u tome što u jednadžbi dolazi druga parcijalna derivacija po t, i što imamo dodtani početni uvjet.

Iz početnih uvjeta imamo

$$u_{i0} = \alpha_i, \quad \frac{\partial u_{i0}}{\partial t} = \beta_i.$$

Prvi početni uvjet daje vrijednosti rješenja u prvom vremenskom nivou ($j = 0$). Aproksimacijom derivacije po t s desna, iz drugog početnog uvjeta imamo

$$\frac{u_{i1} - u_{i0}}{\tau} = \beta_i,$$

odakle

$$u_{i1} = u_{i0} + \tau\beta_i = \alpha_i + \tau\beta_i.$$

Time su, pomoću početnih uvjeta, određene vrijednosti rješenja u prva dva vremenska nivoa ($j = 0, 1$). U čvoru ij, za $j \geq 2$, jednadžba je

$$\frac{u_{ij-1} - 2u_{ij} + u_{ij+1}}{\tau^2} = c^2 \frac{u_{i-1j} - 2u_{ij} + u_{i+1j}}{h^2}.$$

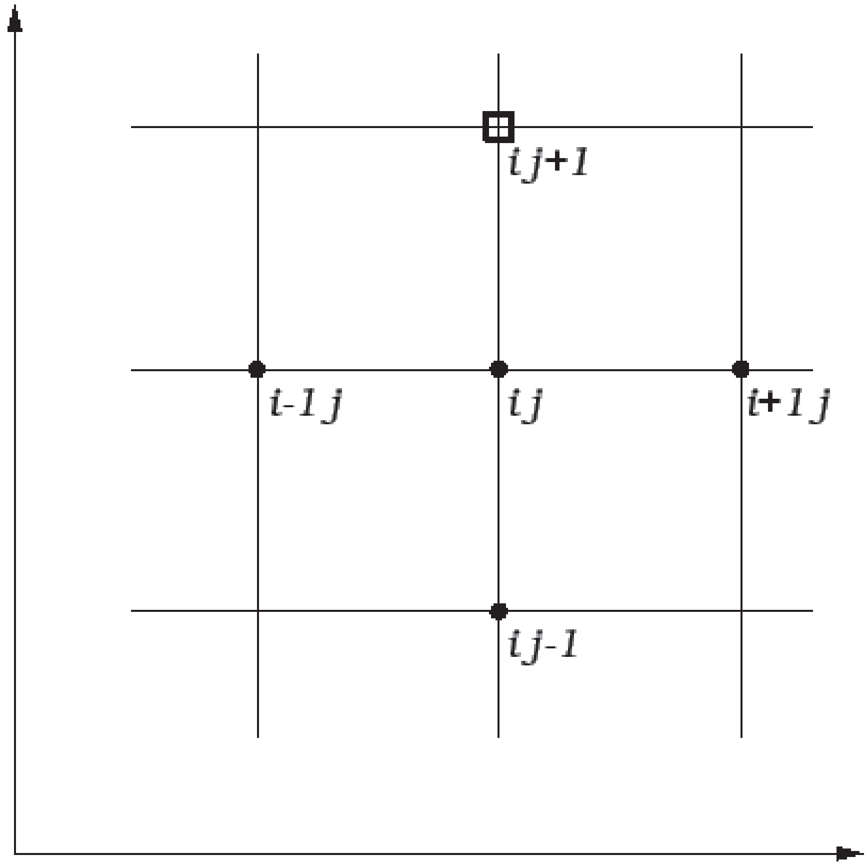
Nakon množenja s τ^2, i stavljanja

$$\sigma = \frac{\tau}{h},$$

imamo ekplicitni postupak dan formulom

$$u_{ij+1} = -u_{ij-1} + c^2\sigma^2 u_{i-1j} + 2(1 - c^2\sigma^2)u_{ij} + c^2\sigma^2 u_{i+1j}.$$

Za $\sigma \leq 1$ postupak je stabilan.



Slika 12.6.

Primjer 12.7. *Shemom konačih razlika riješite problem*

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = 4\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, & za \quad x \in [0,1], t \in [0,\infty), \\ u(0,t) = 0, u(1,t) = 0, & za \quad t \in [0,\infty), \\ u(x,0) = x(1-x), \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = x, & za \quad x \in [0,1] \end{cases}$$

s $\tau = 0.1$ *i* $h = 0.5$.

Rješenje.

$$\sigma = \frac{\tau}{h} = 0.2$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow u_{ij+1} &= -u_{ij-1} + 4 \cdot 0.2^2 u_{i-1j} + 2(1 - 4 \cdot 0.2^2)u_{ij} + 4 \cdot 0.2^2 u_{i+1j} \\ &= -u_{ij-1} + 0.16u_{i-1j} + 1.68u_{ij} + 0.16u_{i+1j}. \end{aligned}$$

Kako je $x_0 = 0, x_1 = 0.5, x_2 = 1$ imamo

$$u_{0j} = u_{2j} = 0, u_{10} = x_1(1 - x_1) = 0.5 \cdot 0.5 = 0.25$$

i

$$u_{11} = u_{10} + 0.1x_1 = 0.25 + 0.1 \cdot 0.5 = 0.3.$$

Sada,

$$\begin{aligned}
u_{12} &= -u_{10} + 0.16u_{01} + 1.68u_{11} + 0.16u_{21} = -0.25 + 0.16 \cdot 0 + 1.68 \cdot 0.3 + 0.16 \cdot 0 = 0.254 \\
u_{13} &= -u_{11} + 0.16u_{02} + 1.68u_{12} + 0.16u_{22} = -0.3 + 0.16 \cdot 0 + 1.68 \cdot 0.254 + 0.16 \cdot 0 = 0.12672 \\
&\vdots
\end{aligned}$$