13. Optimizacija

13.1. Uvod u optimizaciju

Problem koji proučava optimizacija relativno je jednostavno opisati. Za zadanu funkciju $f : \mathbf{R^n} \to \mathbf{R}$, cilj je naći x^*, točku minimuma funkcije f:

$$x^* = \arg \min_{x \in \mathbf{R^n}} f(x). \tag{13.1}$$

Iako je problem jednostavno opisati, njegovo rješavanje je jedno od najtežih područja numeričke analize. Zamislimo da je naša funkcija f nadmorska visina, odnosno dubina pojedine točke na zemljinoj kugli. Naći minimum ove funkcije je zapravo traženje najveće morske dubine. Funkcija nam je poznata, u smislu da možemo dobiti njezinu vrijednost u bilo kojoj točki. Međutim, nije nam dostupna niti jedna dodatna informacija. Jedno rješenje je 'beskonačno' mjerenje dubina u nizu gusto izabranih točaka. Ovaj postupak očito nije prikladan, jer bismo teško izvršili toliko mjerenja u nekom razumnom vremenu.

Cilj optimizacije je definirati prikladne, tj. što brže postupke, za rješavanje ovog tipa problema. Na ovom primjeru uočimo još neke probleme s kojima ćemo se susretati. Koliko god gusto mjerili dubinu, uvijek nam ostaje nepoznata dubina između dvije susjedne točke mjerenja. Ne poznajući funkciju f, odnosno njena analitička svojstva, ne možemo reći da li između njih postoji još neka točke veće dubine.

Drugi je problem vezan uz detekciju minimuma na cijelom području. Ovdje je ipak područje promatranja bilo ograničeno površinom Zemljine kugle. Generalni problem optimizacije (13.1) vezan je uz traženje minimuma na neograničenom području. Našavši jedan minimum, nikada sa sigurnošću nećemo moći ustvrditi da je to minimum na cijelom području jer je nemoguće provjeriti vrijednosti funkcije na cijelom neograničenom području.

Iako smo rekli da je cilj optimizacije riješiti problem (13.1), tj. naći minimum funkcije f, potpuno analogan problem je nalaženje maksimuma funkcije f. Naime, traženje maksimuma od f ekvivalentno je traženju minimuma funkcije $-f$:

$$\max_{x \in \mathbf{R}^n} f(x) = \min_{x \in \mathbf{R^n}} -f(x).$$

To je razlog što se često umjesto termina optimizacija ravnopravno koristi termin minimizacija funkcija.

Često se minimum funkcije f ne traži na cijelom području $\mathbf{R^n}$, već na nekom podskupu $D \subset \mathbf{R^n}$:

$$\min_{x \in D} f(x). \tag{13.2}$$

U tom slučaju govorimo o problemu minimizacije s ograničenjima. Iako ovaj problem izgleda jednostavniji (zbog manjeg područja minimizacije), metode za njegovo rješavanje su složenije nego za polazni problem (13.1). Razlog leži u činjenici da uz funkciju f moramo voditi računa i o rubu područja D (često definiranog pomoću skupa funkcija). Npr., jasno je da funkcija $f(x) = x^2$ ima lokalni minimum u 0. Međutim, ako tražimo minimum na intervalu $[a, b]$ tada je minimum funkcije f jednak 0 ako je $0 \in [a, b]$ ili $\min\{f(a), f(b)\}$ ako $0 \notin [a, b]$, tj. u razmatranje smo trebali uzeti i rubove intervala.

U praksi se često javlja problem (13.2) s posebnim oblikom funkcije f i skupa D. Ako je D presjek poluravnina u $\mathbf{R^n}$, a f je linearna funkcija tada govorimo o problemu linearnog programiranja. Ukoliko je f kvadratična funkcija (polinom) tada se ovaj problem naziva problem kvadratičnog programiranja. Za ove probleme su razvijene posebne metode koje ovdje nećemo opisati.

13.2. Metoda zlatnog reza

Opisat ćemo minimizacijsku metodu za problem minimizacije realne funkcije realne varijable ($f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$). Neka su zadane tri točke $a < b < c$ te neka su poznate vrijednosti funkcije f u njima ($f(a), f(b)$ i $f(c)$) koje zadovoljavaju $f(b) \leq f(a)$ i $f(b) \leq f(c)$ (tj. vrijednost funkcije f je najmanja u srednjoj točki b). Izaberimo novu točku x iz intervala $[a, c]$. Pretpostavit ćemo da je $x \in (b, c)$. Postoje dvije mogućnosti: $f(x) \geq f(b)$ ili je $f(x) < f(b)$. Ako je $f(x) \geq f(b)$ tada se minimum nalazi u intervalu $[a, x]$ (jer je $f(b) \leq f(a)$ i $f(b) \leq f(x)$). U suprotnom slučaju, minimum se nalazi u intervalu $[b, c]$. Opisani postupak je osnova metode zlatnog reza. Preostalo je još za razmotriti način izbora nove točke x.

Neka je w omjer u kojem b dijeli interval $[a, c]$:

$$w = \frac{b-a}{c-a} \quad \text{i} \quad \frac{c-b}{c-a} = 1 - w,$$

te s z označimo

$$z = \frac{x-b}{c-a}.$$

Uočimo da je za $f(x) \geq f(b)$ minimum lociran na intervalu širine $x - a$, dok je za $f(x) < f(b)$ minimum lociran na intervalu širine $c - b$. Prvi zahtjev koji ćemo postaviti je da i u jednom i u drugom slučaju širina intervala bude jednaka:

$$x - a = c - b,$$

tj.

$$z + w = \frac{x - b + b - a}{c - a} = \frac{x - a}{c - a} = \frac{c - b}{c - a} = 1 - w.$$

Ovime dobijemo uvjet

$$z = 1 - 2w \tag{13.3}$$

koji znači da su točke x i b smještene simetrično s obzirom na središte intervala $[a, c]$.

Povoljnim izborom početne točke b možemo postići da x dijeli interval $[b, c]$ u istom omjeru kao što b dijeli interval $[a, c]$. Ovaj uvjet daje jednadžbu

$$\frac{c - b}{c - a} = \frac{c - x}{c - b},$$

odakle slijedi

$$1 - w = 1 - \frac{z}{1 - w}.$$

Iskoristivši činjenicu da je $z = 1 - 2w$ (13.3), sređivanjem gornjeg izraza dobivamo

$$w^2 - 3w + 1 = 0.$$

Od dva rješenja gornje jednadžbe zanima nas ono koje je manje od 1 (jer je w omjer širine manjeg i većeg intervala):

$$w = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \approx 0.38197.$$

Gornji je broj poznat kao zlatni broj pa se metoda s ovakvim izborom nove točke x naziva metodom zlatnog reza.

Algoritam za metodu zlatnog reza:

Neka točke $a^{(0)}, b^{(0)}$ i $c^{(0)}$ zadovoljavaju

$$\frac{b^{(0)} - a^{(0)}}{c^{(0)} - a^{(0)}} = w = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$$

te

$$f(b^{(0)}) \leq f(a^{(0)}) \quad \text{i} \quad f(b^{(0)}) \leq f(c^{(0)}).$$

Opisani postupak možemo sada sažeto zapisati.

$i = 0$
DOUNTIL $|c^{(i+1)} - a^{(i+1)}| \leq \varepsilon$
$x^{(i)} = c^{(i)} + a^{(i)} - b^{(i)}$
IF $f(x^{(i)}) < f(b^{(i)})$
$a^{(i+1)} = b^{(i)}, \quad b^{(i+1)} = x^{(i)}, \quad c^{(i+1)} = c^{(i)}, \quad i = i + 1$
ELSE
$a^{(i+1)} = a^{(i)}, \quad b^{(i+1)} = a^{(i)} + x^{(i)} - b^{(i)}, \quad c^{(i+1)} = x^{(i)}, \quad i = i + 1$
ENDIF
ENDDO
$x^* = (a^{(i+1)} + c^{(i+1)})/2$
END

Uočimo da vrijedi

$$|c^{(i+1)} - a^{(i+1)}| = (1 - w)|c^{(i)} - a^{(i)}| \approx 0.61803|c^{(i)} - a^{(i)}|$$

te metoda konvergira prema točki minimuma x^*.

Primjer 13.1. *S* $\varepsilon = 0.5$ *odredite minimum funkcije* $f(x) = \frac{\sqrt{4+x^2}}{3} + \frac{6-x}{5}$ *na intervalu* $[1, 2]$.

Rješenje. Kako je $a^{(0)} = 1$ i $c^{(0)} = 2$ imamo

$$\frac{b^{(0)} - 1}{1} = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \Rightarrow b^{(0)} = 1.381966.$$

Kako je još

$$f(a^{(0)}) = f(1) = 1.745356, \;\; f(c^{(0)}) = f(2) = 1.742809, \;\; f(b^{(0)}) = f(1.381966) = 1.7339448$$

$$\Rightarrow f(b^{(0)}) < f(a^{(0)}) \;\text{ i }\; f(b^{(0)}) < f(c^{(0)}),$$

početne su točke dobro odabrane.

Sada,

$$x^{(0)} = c^{(0)} + a^{(0)} - b^{(0)} = 1.618034, \quad f(x^{(0)}) = 1.7339112 < f(b^{(0)})$$

$$\Rightarrow a^{(1)} = 1.381966, \quad b^{(1)} = 1.618034, \quad c^{(1)} = 2, \quad |c^{(1)} - a^{(1)}| = 0.618034 > 0.5$$

$$\Rightarrow x^{(1)} = c^{(1)} + a^{(1)} - b^{(1)} = 1.763932, \quad f(x^{(1)}) = 1.736124 > f(b^{(1)})$$

$$\Rightarrow a^{(2)} = 1.381966, \;\; b^{(2)} = 1.527864, \;\; c^{(2)} = 1.763932, \;\; |c^{(2)} - a^{(2)}| = 0.381966 < 0.5$$

$$\Rightarrow x^* = (a^{(2)} + c^{(2)})/2 = 1.572949.$$

Programska realizacija

```
e = 0.5;
a = 1; c = 2;
```

$$\texttt{b = N}\left[\frac{3-\sqrt{5}}{2}\ \texttt{(c - a) + a}\right];$$

$$\texttt{f[x\_] :=}\ \frac{\sqrt{4+x^2}}{3}+\frac{6-x}{5};$$

```
g = Abs[a - c];
While[g > e,
  {xi = c + a - b,
   If[f[xi] <= f[b],
    {a = b, b = xi},
    {b = a + xi - b, c = xi}
   ],
   g = Abs[a - c]}
 ];
```

$$\texttt{xr =}\ \frac{a+c}{2};$$

```
Print[xr]
```

```
1.57295
```

```
e = 0.001;
a = 1; c = 2;
```

$$\texttt{b = N}\left[\frac{3-\sqrt{5}}{2}\ \texttt{(c - a) + a}\right];$$

$$\texttt{f[x\_] :=}\ \frac{\sqrt{4+x^2}}{3}+\frac{6-x}{5};$$

```
g = Abs[a - c];
While[g > e,
  {xi = c + a - b,
   If[f[xi] <= f[b], {a = b, b = xi},
    {b = a + xi - b, c = xi}
   ],
   g = Abs[a - c]}
 ];
```

$$\texttt{xr =}\ \frac{a+c}{2};$$

```
Print[xr]
```

```
1.5
```

Slika 13.1.