Zadatak 1 *Za funkciju* $f(x) = \frac{1}{3+x^2}$ *poznate su vrijednosti* $f(0)$ *i* $f(1)$. *Odredite* $f'(0.5)$:

a) Hermiteovom metodom ako je još poznato i $f'(0)$,

b) koristeći kubni splajn ako su poznate vrijednosti $f(0.5)$, $f''(0)$ *i* $f''(1)$,

c) numeričkim diferenciranjem.

Izračunajte pravu grešku u sva tri slučaja.

Rješenje. a) $f'(x) = -\frac{2x}{(3+x^2)^2}$

x_i	y_i	$f^{[1]}$	$f^{[2]}$
$x_{-1} = 0.5$	$y_{-1} = ?$		
		$f'(x_{-1}) = ?$	
$x_{-1} = 0.5$	$y_{-1} = ?$		$f[x_{-1}, x_{-1}, x_0] = ?$
		$f[x_{-1}, x_0] = ?$	
$x_0 = 0$	$y_0 = 0.33333$		$f[x_{-1}, x_0, x_0] = ?$
		$f'(x_0) = 0$	
$x_0 = 0$	$y_0 = 0.33333$		$f[x_0, x_0, x_1] = -0.08333$
		$f[x_0, x_1] = -0.08333$	
$x_1 = 1$	$y_1 = 0.25$		

$$\frac{0 - f[x_{-1}, x_0]}{-0.5} = -0.08333 \Rightarrow f[x_{-1}, x_0] = -0.04166$$

$$\Rightarrow \frac{-0.04166 - f'(x_{-1})}{-0.5} = -0.08333 \Rightarrow f'(0.5) = -0.08333.$$

Kako je prava vrijednost $f'(0.5) = -0.09467$ za pravu grešku imamo $|-0.08333+0.09467| = 0.01134$.

b)

x_i	y_i	$f[x_i, x_{i+1}]$
$x_0 = 0$	$y_0 = 0.33333$	
		$f[x_0, x_1] = -0.05128$
$x_1 = 0.5$	$y_1 = 0.30769$	
		$f[x_1, x_2] = -0.11538$
$x_2 = 1$	$y_2 = 0.25$	

$$\Rightarrow 0.5s_0 + 2s_1 + 0.5s_2 = 3(0.5(-0.05128) + 0.5(-0.011538)) = -0.24999.$$

Kako je i $f''(x) = \frac{6x^2-6}{(3+x^2)^3}$ imamo

$$2s_0 + s_1 = 3(-0.05128) - \frac{1}{2}(-0.22222) \cdot 0.5 = -0.09828,$$

$$s_1 + 2s_2 = 3(-0.11538) + \frac{1}{2} \cdot 0 \cdot 0.5 = -0.34614.$$

Rješenje sustava je $s_1 = -0.09259$, a prava grška $|-0.09259 + 0.09467| = 0.2 \cdot 10^{-2}$.

c)

$$f'(0.5) = \frac{1}{2 \cdot 0.5}(f(1) - f(0)) = -0.08333.$$

Zadatak 2 *Simpsonovom metodom s točnošću većom od* 10^{-2} *izračunajte* $\int_0^1 e^{3x}dx$. *Odredite pravu grešku.*

Rješenje.

$$f(x) = e^{3x} \Rightarrow f'(x) = 3e^{3x} \Rightarrow f''(x) = 9e^{3x} \Rightarrow f'''(x) = 27e^{3x} \Rightarrow f^{iv}(x) = 81e^{3x}$$

$$\Rightarrow M_4 = f(1) = 1626.93 \Rightarrow \frac{1}{180} \cdot 1626.93 < 10^{-2} \to\Rightarrow 2n > 5 \Rightarrow 2n = 6.$$

x_i	$f(x_i)$
$x_0 = 0$	$f(x_0) = 1$
$x_1 = 1/6$	$f(x_1) = 1.6487$
$x_2 = 1/3$	$f(x_2) = 2.7183$
$x_3 = 1/2$	$f(x_3) = 4.4817$
$x_4 = 2/3$	$f(x_4) = 7.3891$
$x_5 = 5/6$	$f(x_5) = 12.1825$
$x_6 = 1$	$f(x_6) = 20.0855$

$$\Rightarrow I_6 = \frac{1}{18}(1+4(1.6487+4.4817+12.1825)+2(2.7183+7.3891)+20.0855) = 6.36399.$$

Kako je $\int_0^1 e^{3x}dx = \frac{e^{3x}}{3}\Big|_0^1 = 6.36184$, prava greška je $|6.36399 - 6.36184| = 0.2 \cdot 10^{-2}$.

Zadatak 3 *Koristeći Laplaceovu transformaciju odredite rješenje diferencijalne jednadžbe* $x''(t) - 4x(t) = 2$ *uz početne uvjete* $x(0) = -1, x'(0) = 0$.

Rješenje.

$$\mathcal{L}(x'') = p^2X - px_0 - x_0' = p^2X + p \Rightarrow p^2X + p - 4X = \frac{2}{p}$$

$$\Rightarrow X = \frac{2-p^2}{p(p^2-4)} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p} - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{p-2} - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{p+2}$$

$$\Rightarrow x(t) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{4}e^{-2t} - \frac{1}{4}e^{2t}.$$

Zadatak 4 *Diferencijalnu jednadžbu* $y' = -y^2,\ y(0) = 1$ *na intervalu* $[0,1]$ *s korakom* $h = 0.5$ *približno riješite Eulerovom metodom, te Picardovom metodom u dvije iteracije i ocjenite koja je metoda točnija u točki* $x = 1$ *(izračunajte pravu grešku).*

Rješenje. Pravo rješenje:

$$\frac{dy}{y^2} = -dx \Rightarrow -\frac{1}{y} = -x + C \Rightarrow C = -1 \Rightarrow y = \frac{1}{x+1} \Rightarrow y(1) = 0.5.$$

Picardova metoda:

$$y_1(x) = 1 + \int_0^x (-1)dx = 1 - x \Rightarrow y_2(x) = 1 + \int_0^x (-(1-x)^2)dx = 1 - x + x^2 - \frac{x^3}{3} \Rightarrow y_2(1) = 0.66667.$$

Prava greška: $|0.5 - 0.66667| = 0.16667$.

Eulerova metoda:

$$y_1 = 1 + 0.5(-1) = 0.5 \Rightarrow y_2 = 0.5 + 0.5(-0.25) = 0.375.$$

Prava greška: $|0.5 - 0.375| = 0.125$.

Točnija je Eulerova metoda.

Zadatak 5 *Koristeći shemu konačnih razlika približno riješite rubni problem za parcijalnu diferencijalnu jednadžbu prvog reda:*

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} = x - y, & na \quad S = [-1,0]\times[0,1] \\ u(x,y) = x, & na \quad \Gamma = \partial S \end{cases}$$

s $h = k = 0.5$.

Rješenje.

$$\frac{u_{ij+1} - u_{ij}}{h} + \frac{u_{i+1j} - u_{ij}}{h} = x_i - y_j \Rightarrow u_{ij+1} - u_{i+1j} - 2u_{ij} = 0.5(x_i - y_j).$$

Kako je

$$x_0 = -1,\ x_1 = -0.5,\ x_2 = 0,\ \ y_0 = 0,\ y_1 = 0.5,\ y_2 = 1,$$

zbog rubnog uvjeta imamo

$$u_{00} = u_{01} = u_{02} = x_0 = -1,\ \ u_{10} = u_{12} = x_1 = -0.5,\ u_{20} = u_{21} = u_{22} = x_2 = 0.$$

Sada, za $i = j = 1$ imamo

$$u_{12} - u_{21} - 2u_{11} = 0.5(-0.5 - 0.5) \Rightarrow u_{11} = 0.$$