3 Osnove teorije vjerojatnosti

3.1 Slučajni pokus

Slučajni pokus je pokus s više (mogućih) ishoda. Ishode slučajnog pokusa zovemo **događajima**. Događaje koje ne možemo razložiti na jednostavnije događaje zovemo **elementarnim događajima**.

Matematički, skup elementarnih događaja označavamo s Ω i zovemo **prostorom elementarnih događaja**, a njegove elemente (elementarne događaje) s $\omega_1, \omega_2, \ldots$:

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots\}.$$

Događaji su podskupovi od Ω i označavaju se velikim slovima abecede: $A, B, C, \ldots$

Primjer 23 *Bacamo simetričnu kocku.*

Prostor elementarnih događaja: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Događaji:

$A = \{$*na kocki je pao paran broj*$\} = \{2, 4, 6\}$,

$B = \{$*pao je broj manji od* $3\} = \{1, 2\}$.

Događaj $C = \{1, 3, 5\}$ *je* **suprotan** *događaj događaju* A *pa je* $C = A^c = \Omega \backslash A$.

Primjer 24 *U kutiji se nalaze dvije bijele i dvije crne kuglice. Na slučajan način iz kutije izvlačimo dvije kuglice. Koje sve događaje možemo razmatrati?*

Rješenje: Elementarni događaji:

"0" $\equiv$ izvukli smo dvije bijele kuglice,

"1" $\equiv$ izvukli smo jednu bijelu i jednu crnu kuglicu,

"2" $\equiv$ izvukli smo dvije crne kuglice.

$$\Rightarrow \Omega = \{0, 1, 2\}.$$

Skup svih događaja je **partitativni skup** od Ω:

$$\mathcal{P}(\Omega) = \{\{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0, 1\}, \{0, 2\}, \{1, 2\}, \{0, 1, 2\}, \emptyset\}.$$

Dakle, $\emptyset$ i Ω su također događaji. $\emptyset$ je **nemoguć**, a Ω je **siguran** događaj. $\square$

Partitativni skup $\mathcal{P}$ nije uvijek skup svih događaja. Općenito, za familiju $\mathcal{F}$ podskupova kažemo da je **familija događaja** (σ-algebra) ako vrijedi

(i) $\Omega \in \mathcal{F}$

(ii) $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}$

(iii) $(A_n) \in \mathcal{F} \Rightarrow A_1 \cup A_2 \cup \ldots \in \mathcal{F}$

Svojstvo (i)-(iii) povlače da je nužno $\emptyset \in \mathcal{F}$, da ako su $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$, da je tada i $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \in \mathcal{F}$, te ako su $A, B \in \mathcal{F}$, da je $A \backslash B \in \mathcal{F}$.

Postoje familije događaja $\mathcal{F}$ koje nisu jednake $\mathcal{P}(\Omega)$

3.2 Vjerojatnost

Budući da ishod slučajnog pokusa ne možemo sa sigurnošću predvidjeti, postavlja se pitanje može li se, na neki način, mjeriti mogućnost (vjerojatnost) da će se desiti određeni događaj. Dakle, svakom događaju želimo pridružiti broj koji interpretiramo mjerom izglednosti tog događaja ili, drugim riječima, kao vjerojatnost tog događaja.

Matematički, neka je Ω prostor elementarnih događaja nekog slučajnog pokusa i $\mathcal{F}$ skup svih njegovih događaja.

Tada preslikavanje $P : \mathcal{F} \to \mathbf{R}$, koje svakom događaju pridružuju neki broj, tako da vrijedi

(P1) $P(A) \geq 0$ za svaki $A \in \mathcal{F}$

(P2) $P(\Omega) = 1$

(P3) $P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots$ za sve nizove međusobno disjunktivnih događaja ($A_i \cap A_j = \emptyset$ za $i \neq j$)

zovemo **vjerojatnost**.

Uređenu trojku $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ nazivamo **vjerojatnosni prostor**.

Kažemo da smo postavili **matematički model** za dani slučajni pokus ako smo zadali vjerojatnost za taj pokus. Dakle, vjerojatnosni prostor je matematički model za promatrani slučajni pokus.

Vjerojatnost ima sljedeća svojtva:

1. $P(\emptyset) = 0$
2. $A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$
3. $P(A^c) = 1 - P(A)$
4. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Istaknimo da je vjerojatnost **mjera** na Ω.

3.3 Zadavanje vjerojatnosti

Neka je slučajni pokus opisan prostorom elementarnih događaja Ω i skupom svih događaja $\mathcal{F}$, kraće sa $(\Omega, \mathcal{F})$. Promatramo slučaj **diskretnog vjerojatnosnog prostora**, tj. onog za koji je Ω prebrojiv skup. Tada se za $\mathcal{F}$ može uzeti $\mathcal{P}(\Omega)$.

Pretpostavimo da imamo vjerojatnost $P : \mathcal{F} \to \mathbf{R}$. Tada je za $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots\}$,

$$P(A) = P\left(\bigcup_{\omega_i \in A} \{\omega_i\}\right) \stackrel{(P3)}{=} \sum_{\omega_i \in A} P(\{\omega_i\}). \tag{1}$$

Drugim riječima, znamo li vjerojatnost elementarnih gogađaja, tada znamo izračunati $P(A)$ za $A \in \mathcal{F}$, tj. znamo i pripadnu vjerojatnost P. To nam daje ideju kako zadavati vjerojatnost na diskretnim prostorima. Pretpostavimo da znamo (ili imamo zadano) vjerojatnosti elementarnih događaja $\omega \in \Omega$, tj. zadana je f-ja $p : \Omega \to \mathbf{R}$ tablicom $\begin{array}{|c|ccc} \omega & \omega_1 & \omega_2 & \cdots \\ \hline p(\omega) & p(\omega_1) & p(\omega_2) & \cdots \end{array}$.

Stavimo za $A \in \mathcal{F}$

$$P(A) := \sum_{\omega_i \in A} p(\omega_i). \tag{2}$$

Da bi sa (2) bila dobro definirana vjerojatnost na $(\Omega, \mathcal{F})$, brojevi $p(\omega_1), p(\omega_2), \ldots$ moraju zadovoljavati neke uvjete. Koje?

Prvo, nužno je da vrijedi:

(i) $p(\omega_i) \geq 0$ za svaki $\omega_i \in \Omega$,

a zatim i

(ii) $1 = P(\Omega)$ =po def.= $\sum_{\omega_i \in \Omega} p(\omega_i)$.

Vrijedi i obratno. Ako je $p_1, p_2, \ldots$ niz brojeva za koje vrijedi

(i)' $p_i \geq 0$ za sve i

(iii)' $\sum_i p_i = 1$

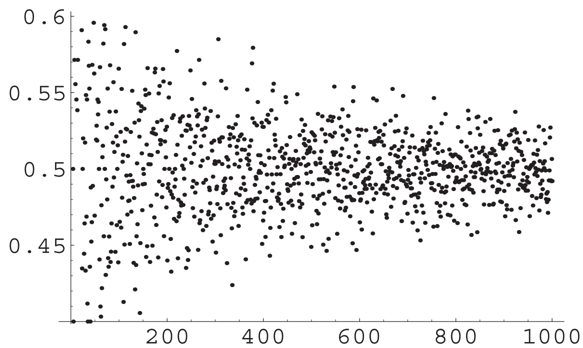
tada je za $p(\omega_i) := p_i$, dobro zadana vjerojatnost elementarnih događaja $p : \Omega \to \mathbf{R}$ u smislu da je sa (2) dobro definirana vjerojatnost na $(\Omega, \mathcal{F})$.

Dakle, zadavnje vjerojatnosti na $(\Omega, \mathcal{F})$ se svodi na zadavanje niza brojeva (p_i) za koje vrijedi $(i)'$ i $(ii)'$.

Primjer 25 *Bacamo novčić. Neka su elemntarni događaji "pismo"$\equiv P$ i "grb"$\equiv G$. Tada vjerojatnosti elementarnih događaja $p(P)$ i $p(G)$ možemo zadati "a priori" ili "a posteriori".*

Na primjer, ako pretpostavimo da je novčić simetričan (fer, ispravan), tada je $p(P) = p(G) = x$. Budući da za ta dva broja mora vrijediti (ii)', imamo $1 = p(P) + p(G) = 2x \Rightarrow x = \frac{1}{2}$ pa je $p(P) = p(G) = \frac{1}{2} > 0$ (pa vrijedi i (i)'). To je primjer zadavanje vjerojatnosti **a priori**.

Promatrimo sada sljedeći pokus. Bacamo novčić $n = 1, 2, 3, \ldots, 100, \ldots, 1000, \ldots$ puta i nakon svakog bacanja računamo relativnu frekvenciju f_{r_n} događaja P do tog trenutka. Primjećujemo (vidi sliku) da kako n raste, tako se brojevi f_{r_n} grupiraju oko broja $\frac{1}{2}$. Induktivno je jasno da možemo broj oko kojeg se grupiraju relativne frekvencije uzeti za mjeru, vjerojatnost događaja P. Takav način zadavanja vjerojatnosti zovemo **a posteriori**.



Primjer 26 *Koristeći tablicu*

godina	*relativna frekvencija dječaka*
1974	0.5133340
1975	0.5130513
1976	0.5127982
1977	0.5128058
1978	0.5128266
1979	0.5126110
1980	0.5128692
1981	0.5125792

izračunajte vjerojatnost da će novorođeni Amerikanac biti dječak.

Rješenje:

$$\begin{aligned} P(\text{dječak}) \;&:=\; \frac{1}{8}(0.5133340 + 0.5130513 + 0.5127982 + 0.5128058 \\ &+\; 0.5128266 + 0.5126110 + 0.5128692 + 0.5125792) = 0.513, \end{aligned}$$

$$\Rightarrow P(\text{djevojčica}) := 1 - P(\text{dječak}) = 0.487.$$

$\square$

3.4 Laplaceov model vjerojatnosti

Neka je $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$ konačan prostor elementarnih događaja koji su svi jednakovjerojatni. Tada je $p(\omega_i) = \frac{1}{n}, i = 1, \ldots, n$, pa je

$$P(A) = \sum_{\omega \in A} p(\omega) = \sum_{\omega \in A} \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \sum_{\omega \in A} 1 = \frac{k(A)}{n} = \frac{k(A)}{k(\Omega)}.$$

Primjer 27 *Izračunajte vjerojatnost za događaj A iz primjera 23.*

Rješenje: $|\Omega| = k(\Omega) = 6$ i $|A| = 3 \Rightarrow P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$. □

Primjer 28 *Bacamo 2 simetrične kocke. Kolika je vjerojatnost da zbroj na te 2 kocke bude jednak 7?*

Rješenje: Primjer se rješava slično kao prethodni - potrebno je odrediti i prebrojati skup Ω, te vidjeti koliko od njegovih elemenata je povoljno za događaj A (koji je u ovom slučaju događaj da je zbroj na 2 kocke jednak 7).

$$\begin{aligned}
\Omega &= \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,1), (2,2), (2,3), \ldots, (6,6)\} \\
&= \{(i,j) : 1 \leq i, j \leq 6\}, \qquad |\Omega| = 6 \cdot 6 = 36 \\
A &= \{\text{zbroj na 2 kocke je jednak 7}\} \\
&= \{(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)\}, \qquad |A| = 6 \\
&\Longrightarrow P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.
\end{aligned}$$

□

Napomena 1 *Formula $P(A) = \frac{k(A)}{k(\Omega)}$ vrijedi* **jedino** *u slučaju kada je Ω konačan skup čiji su elementi jednakovjerojatni.*

Primjer 29 *(***Primjer beskonačnog prebrojivog prostora***) Simetrični novčić bacamo sve dok se ne pojavi grb (G) $\Rightarrow \Omega = \{G, PG, PPG, PPPG, \ldots\}$. Definiramo:*

$$p(\underbrace{P \ldots P}_{k-1} G) := \frac{1}{2^k}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Provjerimo da tako definirana f-ja zadovoljova uvjete (i), (ii):

(i) $p(\underbrace{P\dots P}_{k-1}G)=\frac{1}{2^k}>0$ *za svaki* k

(ii) $\sum_{\omega\in\Omega}p(\omega)=\sum_{\omega\in\Omega}\frac{1}{2^k}$ *=geometrijski red*$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=1$.

Dakle, za $A\subseteq\Omega$, *sa* $P(A):=\sum_{\omega\in A}p(\omega)$ *je dobro zadana vjerojatnost na* $(\Omega,\mathcal{P}(\Omega))$.

3.5 Kombinatorika

3.5.1 Osnovni principi prebrojavanja

Teorem 1 (teorem o uzastopnom prebrojavanju) *Neka su* $A_1,A_2,\dots,A_m$ *konačni skupovi i neka je* $T\subseteq A_1\times A_2\times\cdots A_m$ *skup uređenih* m*-torki* $(a_1,a_2,\dots,a_m)$ *definiranih na sljedeći način: prva komponenta* a_1 *može se birati na* k_1 *različitih načina (dakle, među* k_1 *različitih elemenata skupa* A_1*); za svaku već izabranu prvu komponentu, drugu komponentu* a_2 *možemo birati na* k_2 *različitih načina itd. Za svaki izbor komponenata* $a_1,a_2,\dots,a_{m-1}$*,* m*-tu komponentu* a_m *možemo birati na* k_m *različitih načina. Tada skup* T *ima* $k_1\cdot k_2\cdot\ldots\cdot k_m$ *elemenata odnosno* $k(T)=k_1\cdot k_2\cdot\ldots\cdot k_m$.

U slobodnoj interpretaciji Teorem 1 glasi: ako prvi objekt možemo birati na k_1 načina, drugi na k_2 načina, $\dots$, m-ti na k_m načina, tada imamo $k_1\cdot k_2\cdot\ldots\cdot k_m$ načina da se izaberu svi ti objekti.

Primjer 30 *U kolektivu koji ima* 20 *članova treba izabrati predsjednika, tajnika i blagajnika kolektiva. Na koliko je načina moguće obaviti takav izbor?*

Rješenje: Predsjednik se može izabrati između 20 članova ovog kolektiva, dakle na 20 načina. Kada je predsjednik izabran, onda tajnika možemo izabrati između preostalih 19 članova kolektiva, dakle na 19 načina. Kojih 19 osoba dolazi u obzir za tajnika **ovisi** o prvom izboru tj., izboru predsjednika, **ali njihov broj ne ovisi o tome**. Kada su predsjednik i tajnik izabrani, blagajnika možemo birati na 18 načina. Prema teoremu o uzastopnom prebrojavanju ukupan broj načina na koje možemo obaviti ovaj izbor je $20 \cdot 19 \cdot 18 = 6840$. Kao što vidimo, dobili smo veliki broj načina za ovaj izbor. $\square$

Primjer 31 *Na nekom šahovskom turniru svaki je igrač odigrao sa svakim od preostalih igrača jednu partiju. Ukupno je odigrano* 78 *partija na turniru. Koliko je šahista sudjelovalo na turniru?*

Rješenje: Neka je n traženi broj šahista na turniru i označimo ih sa $A_1, A_2, \dots, A_n$. Prema teoremu o uzastopnom prebrojavanju broj svih uređenih parova (A_i, A_j), $(i, j = 1, \dots, n)$ šahista, gdje je $A_i \neq A_j$, jednak je $n(n-1)$. No budući da se šahisti A_i i A_j sastaju samo jedanput, a ne dvaput (mi smo u našem prebrojavanju razlikovali parove (A_i, A_j) i (A_j, A_i)) ukupan broj odigranih partija jednak je $\frac{n(n-1)}{2}$. Prema uvjetu zadatka je

$$\frac{n(n-1)}{2} = 78,$$

a odavde dobijemo $n = 13$. $\square$

3.5.2 Varijacije i permutacije

Definicija 2 *Neka je A n-člani skup i neka je $r \in \mathbf{N}$ takav da je $r \leq n$.* **Varijacija r-tog razreda** *u skupu A jest svaka uređena r-torka $(a_1, a_2, \dots, a_r)$ čije su sve komponenete $a_1, \dots, a_r$ međusobno različiti elementi skupa A.*

Označimo sa $V_n^{(r)}$ broj **svih** varijacija r-tog razreda u n-članom skupu A. Odredimo taj broj primjenom teorema o uzastopnom prebrojavanju.

Prvu komponenetu a_1 možemo birati među n elemenata skupa A, dakle na $k_1 = n$ različitih načina. Kada je prva komponenta izabrana, onda za a_2 možemo uzeti svaki od $n-1$ preostalih elemenata skupa A. Dakle a_2 možemo birati na $k_2 = n - 1$ načina. Ako su komponenete $a_1, a_2, \dots, a_j (j < r)$ već izabrane, tada za komponentu a_{j+1} možemo uzeti svaki od preostalih elemenata skupa A, tj. svaki element skupa $A \setminus \{a_1, a_2, \dots, a_j\}$. Prema tome a_{j+1} možemo birati na $k_{j+1} = n - j$ načina. Odavde prema teoremu o uzastopnom prebrojavanju zaključujemo da je ukupan broj tako izabranih r-torki jednak $k_1 \cdot k_2 \cdot \ldots \cdot k_r$ tj. vrijedi

$$V_n^{(r)} = n(n-1)\ldots(n-r+1). \tag{3}$$

Definicija 3 **Permutacija** *u n-članom skupu A je svaka varijacija n-tog razreda u skupu A.*

Sa P_n označimo broj svih permutacija u n-članom skupu A. Iz (3) slijedi

$$P_n = V_n^{(n)} = n(n-1)\ldots 2 \cdot 1 = n!. \tag{4}$$

Primjer 32 *Na koliko načina šest osoba može stajati u redu pred trgovinom?*

Rješenje: Označimo ove osobe sa $1, 2, 3, 4, 5, 6$. Svaka uređena 6-torka međusobno različitih elemenata is skupa $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ predstavlja jedan mogući red pred trgovinom.

Neke od mogućnosti su

$$(1, 2, 5, 6, 4, 3); (2, 3, 1, 4, 6, 5); (6, 1, 2, 4, 5, 3); \ldots$$

Traženi broj je očigledno jednak $P_6 = 6! = 720$. □

Primjer 33 *Koliko ima troznamenkastih brojeva koji imaju znamenke* $1, 2, 3$ *ili* 4 *i sve su znamenke međusobno različite?*

Rješenje:

$$V_4^{(3)} = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24.$$

□

Varijacije s ponavljanjem

Definicija 4 *Neka je A skup od n elemenata i neka je $r \in \mathbf{N}$.* **Varijacija s ponavljanjem r-tog razreda** *u skupu A je svaka uređena r-torka elemanata iz skupa A (budući da članovi te r-torke mogu biti međusobno jednaki, može biti $r > n$).*

Ako sa $\bar{V}_n^{(r)}$ označimo broj svih varijacija s ponavljanjem u n-članom skupu A, tada iz principa produkta izravno slijedi

$$\bar{V}_n^{(r)} = k(\underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{r\text{-puta}}) = [k(A)]^r.$$

Primjer 34 *Na koliko načina k putnika možemo raspodijeliti u n vagona, ako je za svakog putnika bitan samo broj vagona u koji je dospio, a ne i mjesto koje je u njemu zauzeo?*

Rješenje: Numeriramo sve putnike, tj. dogovorimo se kojeg od njih smatramo prvim, kojeg drugim, itd. Neka je x_1 broj vagona kojeg je izabrao prvi putnik, x_2 broj vagona kojeg je izabrao drugi putnik,..., x_k broj vagona kojeg je izabrao k-ti putnik. Tada uređena k-torka $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ u potpunosti određuje raspodjelu putnika po vagonima. Budući da svaki od brojeva $x_1, x_2, \ldots, x_k$ može primiti sve vrijednosti u n-članom skupu brojeva ovih n vagona zaključujemo da je broj svih raspodjela jednak $\bar{V}_n^{(k)} = n^k$. □

Permutacije s ponavljanjem

Nađimo sada formulu za broj svih permutacija neke familije od n objekata koji nisu svi međusobno različiti. Neka je među ovih n objekata točno n_1 objekata prve vrste, točno n_2 objekata druge vrste,..., točno n_k objekata k-te vrste, pri čemu je $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$, i objekte j-te vrste međusobno ne razlikujemo. Pretpostavimo da smo objekte prve vrste označili brojevima od 1 do n_1, objekte druge vrste brojevima 1 do n_2, ..., objekte k-te vrste brojevima 1 do n_k. Nakon ovog označavanja sve objekte (kojih ima n) **razlikujemo**, pa je broj svih njihovih permutacija jednak $n!$.

Objekte prve vrste nakon ovog naknadnog označavanja razlikujemo pa je broj svih njihovih permutacija odnosno razmještaja jednak $n_1!$. Slično broj svih permutacija (razmještaja) objekata druge vrste nakon naknadnog markiranja jednak je $n_2!$ itd. Prema osnovnom teoremu o uzastopnom prebrojavanju $n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_k!$ je ukupan broj novih razmještaja koje različitim naknadnim obilježavanjem objekata dobijemo od svakog polaznog neobilježenog razmještaja.

Odavde zaključujemo da **svaki** originalni razmještaj naših n objekata (kada su oni **neobilježeni**) **generira** $n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_k!$ razmještaja tih n objekata **nakon obilježavanja** (tada ih **sve razlikujemo**) i obratno svaki razmještaj obilježenih objekata možemo generirati na ovaj način.

Označimo sa $\bar{P}_n^{(n_1,\ldots,n_k)}$ ukupan broj permutacija od n elemenata među kojima je n_1 prve vrste, n_2 druge vrste, $\ldots$, n_k k-te vrste ($n_1+n_2+\ldots+n_k = n$). Tada vrijedi

$$\bar{P}_n^{(n_1,\ldots,n_k)} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_k!}. \tag{5}$$

Primjer 35 *Koliko se peteroznamenkastih prirodnih brojeva može napisati pomoću brojeva* $3, 3, 3, 7, 7$*?*

Rješenje: Na temelju formule (5) zaključujemo da je traženi broj jednak $\bar{P}_5^{(3,2)} = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = 10.$ ∎

3.5.3 Kombinacije

Definicija 5 *Neka je A n-člani skup i $r \in \mathbf{N},\ r < n$.* **Kombinacija r-tog razreda** *u skupu A jest svaki r-člani podskup od A.*

Teorem 2 *Skup od n elemenata ima*

$$\frac{n(n-1)\ldots(n-r+1)}{r!} = \frac{n!}{(n-r)! \cdot r!} \tag{6}$$

kombinacija r-tog razreda, odnosno r-članih podskupova ($r \in \mathbf{N},\ r \leq n$).

Sa $C_n^{(r)}$ označavamo broj svih kombinacija r-tog razreda u n-članom skupu. Vrlo često se taj broj označava sa

$$\binom{n}{r} \qquad \text{(čitaj } \mathbf{n\ povrh\ r}\text{)}$$

i naziva **binomnim koeficijentom**.

Prema tome vrijedi

$$C_n^{(r)} = \binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)! \cdot r!} = \frac{n(n-1)\ldots(n-r+1)}{r!}. \tag{7}$$

Stavimo $0! = 1$ i $\binom{n}{0} = 1$. Tada za $0 \leq r \leq n$ očigledno vrijedi

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}.$$

Primjer 36 *Na koliko se načina skup od* 12 *knjiga može podijeliti na dva dijela tako da jedan dio sadrži* 5 *a drugi* 7 *knjiga?*

Rješenje: Traženi broj jednak je broju svih peteročlanih podskupova skupa od 12 elemnata, a taj je prema formuli (7) jednak

$$C_{12}^{(5)} = \binom{12}{5} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{5!} = 792.$$

□

Primjer 37 *Od* 7 *žena i* 4 *muškaraca treba izabrati delegaciju. Na koliko se načina može izabrati delegacija tako da se ona sastoji od*

a) petero ljudi, i to 3 *žene i* 2 *muškarca,*

b) bilo kojeg broja ljudi, ali mora biti jednak broj žena i muškaraca,

c) petero ljudi, od kojih su barem dvije žene,

d) petero ljudi, s tim da jedan od njih bude već unaprijed određena žena,

e) šestero ljudi, po troje od oba spola, s tim da u delegaciji ne mogu ući zajedno po jedan unaprijed određeni muškarac i žena?

Rješenje:

a) 3 žene mogu se izabrati na $\binom{7}{3}$ načina, a 2 mušarca na $\binom{4}{2}$ načina. Prema teoremu o uzastopnom prebrojavanju zaključujemo da je traženi broj $\binom{7}{3} \cdot \binom{4}{2}$=210.

b) Imamo sljedeće mogućnosti: da se izabere po jedna osoba od svakog spola, po dvije, tri ili četiri. Traženi je broj onda

$$\binom{7}{1}\binom{4}{1} + \binom{7}{2}\binom{4}{2} + \binom{7}{3}\binom{4}{3} + \binom{7}{4}\binom{4}{4} = 329.$$

c) Prema uvjetu zadatka izbor se razbije na sljedeće podslučajeve: 2 žene i 3 muškarca ili 3 žene i 2 muškarca ili 4 žene i 1 mušarac te 5 žena. Slično kao u b) dobijemo da je traženi broj jednak

$$\binom{7}{2}\binom{4}{3}+\binom{7}{3}\binom{4}{2}+\binom{7}{4}\binom{4}{1}+\binom{7}{5}=455.$$

d) Ako u delegaciji mora biti već unaprijed određena žena, to zapravo znači da se od preostalih 10 ljudi (6 žena i 4 muškaraca) biara četvero ljudi za delegaciju. Prema tome, traženi je broj jednak $\binom{10}{4}=210$.

e) Tri žene i tri muškarca mogu se odabrati na $\binom{7}{3}\binom{4}{3}=140$ načina. Od ovog broja treba oduzeti broj onih delegacija u kojima su unaprijed određeni muškarac i žena. Broj takvih delegacija je $\binom{6}{2}\binom{3}{2}=45$. Traženi broj delegacija jednak je

$$\binom{7}{3}\binom{4}{3}-\binom{6}{2}\binom{3}{2}=95.$$

□

Kombinacije s ponavljanjem

Definicija 6 *Neka je A n-člani skup i $r \in \mathbf{N}$.* **Kombinacija s ponavljanjem r-tog razreda** *u skupu A je svaka* **neuređena** *r-torka $(a_1, a_2, \ldots, a_r)$ elemenata iz skupa A (u njoj elementi mogu biti međusobno jednaki).*

Sa $\bar{C}_n^{(r)}$ označujemo broj svih kombinacija s ponavljanjem r-tog razreda u n-članom skupu.

Teorem 3 *Za $n, r \in \mathbf{N}$ vrijedi*

$$\bar{C}_n^{(r)} = \binom{n+r-1}{r}. \tag{8}$$

Primjer 38 *Na koliko se načina $r = 7$ jednakih predmeta može raspodijeliti među $n = 3$ ljudi? (Neki ljudi ne moraju dobiti nijedan predmet).*

Rješenje: Označimo ove ljude sa $0_1, 0_2, 0_3$. Tada razdiobi svakog premeta odgovara izbor osobe kojoj je taj predmet dodijeljen. Drugim riječima svakoj raspodijeli svih 7 predmeta odgovarat će niz duljine 7 od simbola $0_1, 0_2, 0_3$. Tako npr. niz $0_1 0_1 0_2 0_2 0_2 0_3 0_3$ odgovara raspodijeli kod koje je osoba 0_1 dobila 2 predmeta, 0_2 3 predmeta i 0_3 2 predmeta. Budući da predmeta ne razlikujemo ovo su neuređeni nizovi tj., kombinacije s ponavljanjem 7-og razreda u 3-članom skupu. Obratno svaki ovakav niz određuje jednu raspodjelu. Broj svih raspodjela jednak je $\bar{C}_3^{(7)} = \binom{3+7-1}{7} = \binom{9}{7} = \binom{9}{2} = 36$. $\square$

Ovaj primjer ima očiglednu generalizaciju: ukupan broj načina na koje se r jednakih predmeta može raspodijeliti među n ljudi ili razmjestiti u n kutija jednak je $\bar{C}_n^{(r)} = \binom{n+r-1}{r}$.

3.6 Primjene kombinatorike na elementarne probleme iz vjerojatnosti

Primjer 39 *Dva se igrača klade u jednake iznose da će u 10 bacanja dviju pravilnih kocaka barem jednom pasti obje šestice. Je li oklada poštena? Ako nije koliko puta treba bacati kocke da oklada bude poštena?*

Rješenje:

$$\Omega = \{((11), (11), (11), ..., (11)), ...\}$$

desetorke uređenih parova brojeva od 1 do 6. Uređenih parova ima:

$$\bar{V}_6^2 = 6^2 = 36, \ \ k(\Omega) = \bar{V}_{36}^{10} = 36^{10}.$$

A...na barem jednom mjestu dvije šestice
A^c...niti na jednom mjestu dvije šestice $k(A^c) = 35^{10}$
Slijedi

$$P(A^c) = \left(\frac{35}{36}\right)^{10}, \ \ P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{10} \approx 0.2455.$$

Odredimo broj bacanja n tako da je $P(A^c) = \left(\frac{35}{36}\right)^n = \frac{1}{2}$. Logaritmiranjem se dobije $n \log \frac{35}{36} = -\log 2$, što daje $n \approx 24.6$. $\square$

Primjer 40 *Pravilan novčić bacamo $n-$puta. Odredite vjerojatnosti sljedećih događaja:*
A...svih $n-$puta je palo pismo
B...pismo je palo točno jednom
C...pismo je palo barem jednom
D...pismo je palo u prvom bacanju.

Rješenje: Broj svih elemntarnih događaja je $k(\Omega) = \bar{V}_2^n = 2^n$.

$k(A) = 1 \Rightarrow P(A) = \frac{1}{2^n}$.

Ako je pismo palo točno jednom to znači da to može biti u prvom ili drugom ili trećem ili $\ldots n$- tom bacanju $\Rightarrow k(B) = n \Rightarrow P(B) = \frac{n}{2^n}$.

Obrnuti događaj događaju C je događaj C^c =pismo nije palo nijednom=svih n-puta je pala glava $\Rightarrow P(C^c) = \frac{1}{2^n} \Rightarrow P(C) = 1 - P(C^c) = \frac{2^n-1}{2^n}$.

$k(D) = \bar{V}_2^{n-1} = 2^{n-1} \Rightarrow P(D) = \frac{2^{n-1}}{2^n} = \frac{1}{2}$. □

Primjer 41 *Odredite vjerojatnost da od r slučajno odabranih ljudi niti jedan par nema rođendan isti dan. Koliko moramo izabrati ljudi da bi vjerojatnost događaja da barem dvoje imaju rođendan isti dan bila ≈ 0.5.*

Rješenje: $k(\Omega) = 365^r = \bar{V}_{365}^r$. $k(A) = 365(365-1)\cdots(365-r+1) = V_{365}^r$. Slijedi

$$P(A) = \frac{k(A)}{k(\Omega)} = \frac{365(365-1)\cdots(365-r+1)}{365^r}.$$

Direktnim računom se dobije da je za $r = 23$ $P(A) \approx 0.49$. □

Primjer 42 *Tri žarulje biramo na slučajan način od 15 žarulja od kojih je 5 neispravnih. Odredite vjerojatnosti sljedećih događaja:*
A... niti jedna žarulja nije neispravna
B...točno je jedna žarulja neispravna
C...barem je jedna žarulja neispravna.

Rješenje: $k(\Omega) = \binom{15}{3} = \frac{15\cdot 14\cdot 13}{3!} = 455$.

$k(A) = \binom{10}{3} = \frac{10\cdot 9\cdot 8}{3!} = 120 \Rightarrow P(A) = \frac{120}{455} \approx 0.2637$.

$k(B) = \binom{5}{1}\binom{10}{2} = 5 \cdot \frac{10\cdot 9}{2!} = 225 \Rightarrow P(B) = \frac{225}{455} \approx 0.4945$.

Obrnuti događaj događaju C je događaj C^c =sve su žarulje ispravne$=A$ $\Rightarrow P(C^c) = \frac{24}{91} \Rightarrow P(C) = 1 - P(C^c) = \frac{67}{91} \approx 0.7363$. $\square$

Primjer 43 *U kutiji se nalazi 20 mačića od kojih je 12 tigrastih i 8 crno-bijelih. Kolika je vjerojatnost da od 5 odabranih (na slučajan način izvučenih) mačića budu točno 3 tigrasta i 2 crno-bijela ako*
a) mačiće ne vraćamo
b) mačiće vraćamo?

Rješenje:
a) Pretpostavimo prvo da mačiće ne vraćamo. Događaj čiju vjerojatnost želimo izračunati je

$$A = \{\text{izvukli smo 3 tigrasta i 2 crno-bijela mačića}\}.$$

Broj načina na koji od 20 mačića možemo izabrati njih 5, a da nam pritom nije važno koliko je izvučeno tigrastih a koliko crno-cijelih, je $\binom{20}{5}$. Zapravo, imamo $|\Omega| = \binom{20}{5}$.

Broj načina na koji od ukupno 12 tigrastih mačića možemo izabrati njih 3 je $\binom{12}{3}$. Analogno, broj načina na koji od ukupno 8 crno-bijelih mačića možemo izabrati 2 je $\binom{8}{2}$. Ako istovremeno izvučemo 3 tigrasta i 2 crno-bijela mačića (što su međusobno nezavisni događaji!), dogodit će se događaj A. Imamo: $|A| = \binom{12}{3} \cdot \binom{8}{2}$

Vjerojatnost događaja A je:

$$P(A) = \frac{\binom{12}{3} \cdot \binom{8}{2}}{\binom{20}{5}} = \frac{\frac{12!}{3! \cdot 9!} \cdot \frac{8!}{2! \cdot 6!}}{\frac{20!}{5! \cdot 15!}} = \frac{\frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{3 \cdot 2} \cdot \frac{8 \cdot 7}{2}}{\frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}} \approx 0.39732$$

b) Pretpostavimo sada da mačiće vraćamo. Bitna razlika u odnosu na prethodni slučaj je što je sada *vjerojatnost* da izvučemo tigrastog mačića *u svakom izvlačenju ista* jer mačiće vraćamo pa svaki put izvlačimo iz istog skupa. U prethodnom slučaju, vjerojatnost da izvučemo tigrastog mačića se smanjuje iz izvlačenja u izvlačenje budući u kutiji svaki put (kad izvučemo tigrastog mačića) ostaje sve manje tigrastih mačića.

Vjerojatnost da (u jednom izvlačenju) izvučemo jednog tigrastog mačića (označimo taj događaj s B) je:

$$P(B) = \frac{\binom{12}{1}}{\binom{20}{1}} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5} = 0.6$$

Događaj da je izvučen crno-bijeli mačić (označimo taj događaj s C) je *suprotan* ili *komplementaran* događaju B - međusobno se isključuju a zajedno pokrivaju sve mogućnosti koje se mogu dogoditi (tj. $B \cup C$ je siguran događaj). Zbroj vjerojatnosti suprotnih događaja jednak je 1. Odatle lako izračunamo vjerojatnost od C:

$$P(C) = P(B^c) = 1 - P(B) = 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5} = 0.4$$

Naravno, $P(C)$ možemo izračunati i direktno, slično kao što smo izračunali $P(B)$:

$$P(C) = \frac{\binom{8}{1}}{\binom{20}{1}} = \frac{8}{20} = \frac{2}{5} = 0.4$$

Ostalo je izračunati $P(A)$. Kako mačiće vraćamo, postoji *uređaj* pri njihovom izlačenju - zna se koji (i kakav) je bio prvi, koji drugi, koji treći itd. Tu nam se otvara mogućnost izbora: koji po redu je bio svaki od 3 izvučena tigrasta mačića? Prvi, treći i peti? Drugi, četvrti i peti? Drugi, treći i četvrti? Sve su to naime različiti elementarni događaji. Dakle, od 5 mjesta (u poretku izvlačenja) moramo izabrati 3 na kojima su bili tigrasti mačići (na preostala 2 su onda crno-bijeli mačići). To možemo učiniti na $\binom{5}{3}$ načina. Vjerojatnost da u jednom izvlačenju bude izvučen tigrasti mačić je, kao što znamo, $\frac{3}{5}$. Sljedeće izvlačenje je nezavisno od prethodnog, pa je vjerojatnost sa smo izvukli 2 tigrasta mačića jednaka $\frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} = \left(\frac{3}{5}\right)^2$ i analogno, vjerojatnost da smo ih izvukli 3 je $\left(\frac{3}{5}\right)^3$. U preostala 2 izvlačenja morao se dogoditi suprotan događaj, odnosno morao je biti izvučen crno-bijeli mačić, vjerojatnost čega je $\left(\frac{2}{5}\right)^2$. Uzmemo li sve do sad rečeno u obzir dobivamo:

$$P(A) = \binom{5}{3} \left(\frac{3}{5}\right)^3 \left(\frac{2}{5}\right)^2 \approx 0.3456$$

Zadatak smo mogli riješiti i tako da razmatramo izvlačenje crno-bijelih mačića, odnosno da biramo mjesta na koja su došla 2 izvučena crno-bijela, što je moguće učiniti na $\binom{5}{2}$ načina. Sada bi komplementaran događaj bio izvlačenje tigrastog mačića i tako bi dobili:

$$P(A) = \binom{5}{2} \left(\frac{2}{5}\right)^2 \left(\frac{3}{5}\right)^3$$

što zbog simetrije binomnih koeficijenata očito daje isti rezultat kao gore. □

Napomena 2 *Općenito, kad imamo $m+n$ predmeta od kojih je m jedne vrste, a n druge, vjerojatnost da - bez vraćanja - izvučemo točno k predmeta prve vrste ako izvlačimo ukupno s predmeta (dakle, $s-k$ predmeta druge vrste) je:*

$$p_X(k) = \frac{\binom{m}{k} \cdot \binom{n}{s-k}}{\binom{m+n}{s}}, \qquad \max(0, s-n) \le k \le \min(m, s) \tag{9}$$

Mora vrijediti $k \le \min(m,s)$ jer niti možemo izvuči više predmeta prve vrste nego što ih ukupno izvlačimo (zato $k \le s$) niti možemo izvuči više predmeta prve vrste nego što ih ukupno uopće ima (zato $k \le m$). Uvjet $k \ge s-n \Leftrightarrow n \ge s-k$ osigurava pak da ne izvlačimo predmeta druge vrste $(s-k)$ više nego što ih ukupno ima (n).

3.7 Uvjetna vjerojatnost. Nezavisni događaji. Bayesova formula.

Primjer 44 *Bacamo dvije ispravne igraće kocke. Površnim uvidom ustanovljeno je da su pali brojevi različiti. Odredite vjerojatnost da je zbroj palih brojeva manji (strogo) od 5.*

Rješenje: Ako ništa ne znamo o ishodu pokusa, onda je prostor elementarnih događaja

$$\Omega = \{\omega = (i,j), 1 \le i,j \le 6\}.$$

Nakon što su kocke bačene, znamo da se dogodio događaj

$$B = \{\omega = (i,j) \in \Omega : i \ne j\}.$$

Dakle, B je postao novi prostor elementranih događaja.

Općenito, neka je B bilo koji (realizirani) događaj. Neka je P_B nova vjerojatnost uz koju je B siguran događaj:

$$P_B(B) = 1,$$

i koji uzima u obzir prethodnu vjerojatnost P na Ω u smislu da je za sve $\omega \in B$,

$$P_B(\{\omega\}) = c \cdot P(\{\omega\})$$

(c je konstanta proporcionalnosti).

Tada je

$$1 = P_B(B) = \sum_{\omega \in B} P_B(\{\omega\}) = \sum_{\omega \in B} cP(\{\omega\}) = c \sum_{\omega \in B} P(\{\omega\}) = cP(B)$$

$$\Rightarrow c = \frac{1}{P(B)}.$$

Dakle, $P_B(\{\omega\}) = \frac{1}{P(B)} P(\{\omega\})$ za $\omega \in B$.

Neka je sada A događaj za koji želimo izračunati vjerojatnost uz uvjet da se B dogodio:

$$A = \{\omega = (i,j) \in \Omega : i + j < 5\}.$$

Tada ima smisla gledati, u stvari, $A \cap B$ i tražena vjerojatnost je

$$P_B(A \cap B) = \sum_{\omega \in A \cap B} \frac{1}{P(B)} P(\{\omega\}) = \frac{1}{P(B)} \sum_{\omega \in A \cap B} P(\{\omega\}) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$\Rightarrow P_B(A \cap B) = \frac{\frac{4}{36}}{\frac{36-6}{36}} = \frac{2}{15}.$$

$\square$

Definicija 7 *Neka je $B \subseteq \Omega$ takav događaj da je $P(B) > 0$. Tada funkciju $P(\cdot|B) : \mathcal{F} \to [0,1]$ definiranu sa*

$$P(A|B) \stackrel{def}{=} \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

nazivamo **uvjetnom vjerojatnošću** *(s obzirom na događaj B).*

Čita se: vjerojatnost od A uz uvjet B; vjerojatnost od A ako znamo da se događaj B realizirao.

Primjer 45 *Dolazite u posjetu prijatelju (kojeg dugo niste vidjeli). Znate da ima dvoje djece (koji nisu blizanci). Pokucate i vrata vam otvori dječak. Kolika je vjerojatnost da je i drugo dijete dječak, ako*
a) znate da vam je vrata otvorilo mlađe dijete,
b) ne znate ništa o drugom djetetu.

Rješenje: Prvo, postavimo matematički model:

$$\Omega = \{(m,m),(m,ž),(ž,m),(ž,ž)\}$$

je prostor elementarnih događaja koji modelira "slučajni pokus" prije otvorenja vrata. Zbog simetrije predlažemo Laplaceov model, tj. svi elementarni događaji su vjerojatnosti $\frac{1}{4}$. Događaj čiju uvjetnu vjerojatnost želimo izračunati je $A = \{(m,m)\}$.

a) B =realizirani događaj= $\{(m,m),(ž,m)\}$

$$\Rightarrow P(B) = \frac{1}{2},\ P(A) = P(A \cap B) = \frac{1}{4} \Rightarrow P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1}{2}.$$

b) $B = \{(m,m),(ž,m),(m,ž)\}$

$$\Rightarrow P(B) = \frac{3}{4},\ P(A) = P(A \cap B) = \frac{1}{4} \Rightarrow P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1}{3}.$$

$\square$

Ako je $P(A|B) = P(A)$ (tj. realizacija događaja B ne utječe na vjerojatnost realizacije događaja A) prirodno je smatrati događaje A i B nezavisnima. Kako je u tom slučaju

$$\frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A)$$

slijedi sljedeća definicija:

Definicija 8 *Kažemo da su događaji A i B* **nezavisni** *ako je*

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

Primjer 46 *Neka je* $P(A) = 1/3$, $P(B) = 1/4$, $P(A \cup B) = 1/2$. *Jesu li* A *i* B *nezavisni događaji? Jesu li* A *i* B *međusobno isključujući događaji? Izračunajte* $P(A|B)$, $P(B^c|A)$, $P(A \cap B^c)$, $P(A|B^c)$, $P(B|A^c)$.

Rješenje: $P(A\cap B) = P(A)+P(B)-P(A\cup B) = \frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{2} = \frac{4+3-6}{12} = \frac{1}{12} = P(A) \cdot P(B) \Rightarrow A$ i B su nezavisni događaji i nisu međusobno isključujući.

$P(A|B) = P(A) = \frac{1}{3}$,

$P(A\cap B^c) = P(A \setminus B) = P(A) - P(A\cap B) = \frac{1}{3} - \frac{1}{12} = \frac{1}{4} = P(A) \cdot P(B^c)$,

$P(B^c|A) = P(B^c) = \frac{3}{4}$, $P(A|B^c) = P(A) = \frac{1}{3}$,

$P(B \cap A^c) = P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{4} - \frac{1}{12} = \frac{1}{6} = P(B) \cdot P(A^c)$

$\Rightarrow P(B|A^c) = P(B) = \frac{1}{3}$. □

Napomena 3 *Općenito, nezavisnost događaja* A *i* B *povlači nezavisnost sljedećih parova događaja: a)* A, B^c *b)* A^c, B *c)* A^c, B^c.

Definicija 9 *Kažemo da događaji* H_1, H_2,..., H_n *čine* **potpun sustav događaja** *ako vrijedi:*
a) $H_i \cap H_j = \emptyset$, $i \neq j$, *b)* $\cup_{i=1}^n H_i = \Omega$, *c)* $P(H_i) > 0$ *za svaki* i.

Događaje H_1,..., H_n *često ćemo nazivati i hipotezama.*

Formula potpune (totalne) vjerojatnosti: Neka je A proizvoljni događaj. Iz svojstava potpunog sustava događaja slijedi:

$$P(A) = P(A \cap \Omega) = P(\cup_{i=1}^n A \cap H_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A \cap H_i) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A|H_i).$$

Bayesova formula (aposteriorne vjerojatnosti hipoteza): Neka je $P(A) > 0$. Tada je

$$P(H_i|A) = \frac{P(A \cap H_i)}{P(A)} = \frac{P(H_i)P(A|H_i)}{\sum_{i=1}^n P(H_i)P(A|H_i)}.$$

Primjer 47 *Iz kutije u kojoj se nalaze 4 bijele i 5 crvenih kuglica prebacujemo bez gledanja dvije kuglice u drugu kutiju u kojoj se nalaze 3 bijele i 3 crvene kuglice.*

a) Izračunajte vjerojatnost da iz druge kutije izvadimo bijelu kuglicu.
b) Ako iz druge kutije izvučemo bijelu kuglicu, izračunajte vjerojatnost da smo prebacili iz prve kutije dvije bijele kuglice.
c) Ako iz druge kutije izvučemo pet bijelih kuglica, odredite koja je od hipoteza najvjerodostojnija?

Rješenje: Formirajmo hipoteze koje opisuju sve mogućnosti prebacivanja dviju kuglica iz prve kutije u drugu kutiju:
H_1...obje kuglice su bijele,
H_2...jedna kuglica je bijela, druga crvena,
H_3...obje kuglice su crvene.

$$P(H_1) = \frac{\binom{4}{2}}{\binom{9}{2}} = \frac{1}{6} \approx 0.16667,\ P(H_2) = \frac{\binom{4}{1}\binom{5}{1}}{\binom{9}{2}} = \frac{5}{9} \approx 0.55556,$$

$$P(H_3) = \frac{\binom{5}{2}}{\binom{9}{2}} = \frac{5}{18} \approx 0.27778.$$

Primjetite da je $P(H_1) + P(H_2) + P(H_3) = 1$.
A...iz druge kutije je izvučena bijela kuglica.
a) Iz formule totalne vjerojatnosti slijedi:

$$P(A) = P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2) + P(H_3)P(A|H_3)$$
$$= \frac{1}{6}\cdot\frac{5}{8} + \frac{5}{9}\cdot\frac{4}{8} + \frac{5}{18}\cdot\frac{3}{8} = \frac{35}{72} \approx 0.48611.$$

Nap. Vjerojatnost vađenja bijele kuglice iz druge kutije prije prebacivanja je bila $P = 0.5$.
b) Iz Bayesove formule dobijemo:

$$P(H_1|A) = \frac{P(H_1)P(A|H_1)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{8}}{\frac{35}{72}} = \frac{3}{14} \approx 0.21429,$$

$$P(H_2|A) = \frac{P(H_2)P(A|H_2)}{P(A)} = \frac{\frac{5}{9}\cdot\frac{4}{8}}{\frac{35}{72}} = \frac{4}{7} \approx 0.57143,$$

$$P(H_3|A) = \frac{P(H_3)P(A|H_3)}{P(A)} = \frac{\frac{5}{18}\cdot\frac{3}{8}}{\frac{35}{72}} = \frac{3}{14} \approx 0.21429.$$

c) B...iz druge kutije je izvučeno 5 bijelih kuglica.

$$P(H_1|B) = 1,\ P(H_2|B) = P(H_3|B) = 0.$$

□

Primjer 48 *Pregled bolesnika upućuje na tri moguće bolesti H_1, H_2, H_3. U danim okolnostima poznato je da su vjerojatnosti tih bolesti $P(H_1) = 1/2$, $P(H_2) = 1/6$, $P(H_3) = 1/3$. Da bi se uspostavila dijagnoza bolesnik se upućuje na pretragu. Nalaz je dao rezultat A koji se u slučaju bolesti H_1 pojavljuje u 10% slučajeva, u slučaju bolesti H_2 u 20% slučajeva, a u slučaju bolesti H_3 u u 90% slučajeva. Koja je dijagnoza najvjerodostojnija?*

Rješenje: Bolesti H_1, H_2, H_3 u danim okolnostima čine potpun sustav događaja. Znamo još da je

$$P(A|H_1) = 0.1,\quad P(A|H_2) = 0.2,\quad P(A|H_3) = 0.9.$$

Iz formule potpune vjerojatnosti slijedi

$$P(A) = P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2) + P(H_3)P(A|H_3)$$
$$= \frac{1}{2}\cdot 0.1 + \frac{1}{6}\cdot 0.2 + \frac{1}{3}\cdot 0.9 = 0.383.$$

Iz formule Bayesa dobivamo:

$$P(H_1|A) = \frac{P(H_1)P(A|H_1)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{2}0.1}{0.383} = 0.131,$$

$$P(H_2|A) = \frac{P(H_2)P(A|H_2)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{6}0.2}{0.383} = 0.087,$$

$$P(H_3|A) = \frac{P(H_3)P(A|H_3)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{3}0.9}{0.383} = 0.783.$$

Poslije obavljene pretrage dijagnoza H_3 je najvjerodostojnija. □