

OSNOVE TEORIJE VJEROJATNOSTI

1. Eliminacijska nogometna utakmica završila je neriješeno. Trener 1.tima bira 5 najboljih igrača da pucaju penale. Trojica od njih pogađaju gol s vjerojatnošću 0.9, a dvojica s vjerojatnošću 0.8. Zatim oba tima pucaju po 5 jedanaesteraca. Ako je 2.tim dao 3 gola, kolika je vjerojatnost da je pobijedio 1.tim?

$$\text{Rj: } P(\text{1.tim pobijedio ako je 2.tim dao 3 gola}) = P(\text{1.tim dao 4 gola}) + P(\text{1.tim dao 5 golova}) = 0.85536$$

2. Iz špila karata (od 52 karte) izvukli smo 10 karata. Kolika je vjerojatnost da se među izvučenim kartama nalaze a) točno 3 kralja, b) najviše 1 kralj?

$$\text{Rj: } P(\text{točno 3 kralja}) = 0.0186, P(\text{najviše 1 kralj}) = 0.8375$$

3. U kutiji se nalaze papirići s brojevima od 1 do 8. Ako izvlačimo 3 papirića bez vraćanja, izračunajte vjerojatnost da su izvučena 2 papirića s parnim i 1 s neparnim brojem ili 2 papirića s neparnim i 1 s parnim brojem.

$$\text{Rj: } P(\{2 \text{ papirića s parnim \& 1 s neparnim brojem}\} \cup \{2 \text{ papirića s neparnim \& 1 s parnim brojem}\}) = 1 - P(\text{sva 3 parna}) - P(\text{sva 3 neparna}) = 6/7$$

4. Iz kutije koja sadrži 10 jabuka, 30 ananasa, 20 kupina i 15 naranča, na slučajan način izvlačimo 2 voćke s vraćanjem. Odredite vjerojatnost da je izvučena: a) prvo jabuka a zatim ananas, b) nijedna naranča, c) prvo naranča, d) najviše jedna jabuka.

$$\text{Rj: a) } P(\text{prvo jabuka, zatim ananas}) = 4/75, \text{ b) } P(\text{nijedna naranča}) = 16/25, \text{ c) } P(\text{prvo naranča}) = 1/5, \text{ d) } P(\text{najviše 1 jabuka}) = 221/225$$

5. Iz kutije koja sadrži 10 crvenih, 30 bijelih, 20 plavih i 15 narančastih kuglica, na slučajan način izvlačimo 2 kuglice s vraćanjem. Odredite vjerojatnost da su izvučene kuglice: a) obje bijele, b) druga nije plava, c) barem jedna je plava, d) prva je bijela a druga nije (bijela).

$$\text{Rj: a) } P(\text{obje bijele}) = 4/25, \text{ b) } P(\text{druga nije plava}) = 11/15, \text{ c) } P(\text{barem jedna plava}) = 104/225, \text{ d) } P(\text{prva bijela, druga nije bijela}) = 6/25$$

6. Strane jednog tetraedra označene su znamenkama 1, 2, 3 i 4. Kad se tetraedar baci na ravnu površinu, strane 1 i 2 padaju podjednako često, strana 3 onoliko često kao strana 1 i 2 zajedno, a strana 4 kao sve tri zajedno. Odredite vjerojatnost događaja:

A: kod dva bacanja zbroj znamenki je paran broj;

B: kod tri bacanja zbroj znamenki je broj koji nije djeljiv s 9;

Odredite $P(A)$ i $P(B)$ ako sve četiri strane padaju podjednako često. (rj. $\frac{34}{64}, \frac{29}{32}, \frac{1}{2}, \frac{29}{32}$)

7. Deset prijatelja rođena su na različiti dan. Odredite vjerojatnost:

A: da su svi datumi rođenja neparni;

B: da su točno 5 datuma brojevi djeljivi s 3;

C: pet su datuma parni, pet neparni, a samo je jedan datum djeljiv s 10.

Za lakše računanje uzeti da svaki mjesec ima 30 dana. (rj. $\frac{1}{10005}, \frac{62016}{476905}, \frac{84}{476905}$)

8. Na ispitu iz Fizike student je trebao naučiti 20 predavanja. Kako nije imao dovoljno vremena, naučio ih je samo 16. Ako odgovori na manje od 3 pitanja ispit nije položio. Odredite vjerojatnost da:

A: odgovori točno na sva pitanja;

B: sva pitanja koja je dobio su ona koje nije naučio;

C: je položio ispit,

ako su na papiru pitanja koja sadrže 6 predavanja. (rj. $\frac{1001}{4845}, \frac{1}{323}, \frac{58}{285}$)

9. U jednoj se vazi nalazi 20 bijelih i 15 plavih loptica. Pet se puta iz nje izvlači po jedna loptica, registrira se njena boja i vraća se nazad u posudu. Odredite vjerojatnost:

A: da je u svim pokušajima izvučena bijela loptica;

B: da je bijela loptica izvučena češće od plave;

C: da je u prvom i zadnjem pokušaju izvučena bijela loptica;

D: da je u prvom i zadnjem pokušaju izvučena bijela loptica, a u preostala tri plava. (rj. $\frac{2024}{27417}, \frac{120043}{191919}, \frac{16}{49}, \frac{432}{16807}$)

10. Iz posude s 3 bijele, 5 plavih i 2 crvene loptice dvije osobe izvlače po jednu lopticu. Dogovorili su se da onaj koji prvi izvuče bijelu lopticu mora častiti drugog. Ako se izvuče crvena loptica tada nitko ne časti. Izvlači se naizmenično. Odredite vjerojatnost da:
- časti onaj koji izvlači prvi po redu;
 - časti onaj koji izvlači drugi po redu;
 - nitko ne časti. (rj. $\frac{83}{210}, \frac{43}{210}, \frac{2}{5}$)
11. Iz posude s n bijelih i m plavih loptica izvlači se jedna loptica, registrira se njena boja i opet se vraća u posudu. Odredite vjerojatnost da
- je u prvih pet pokušaja izvučena bijela loptica;
 - sve do desetog pokušaja nije izvučena bijela loptica;
 - je u prvih dvadeset pokušaja izvučena bijela loptica. (rj. $\frac{n^5}{(n+m)^5}, \frac{n^9 m}{(n+m)^{10}}, \frac{(n+m)^{20} - m^{20}}{(n+m)^{20}}$)
12. Dvoje šahista A i B dogovorili su se da ako pobijedi A u 12 partija prije nego što B ostvari 6 pobjeda, tada je on pobjednik, a ako B pobijedi 6 puta, a A nije ostvario 12, tada je B pobjednik. A je dva puta bolji igrač od B . Nakon 8 pobjeda od A i 4 pobjede od B "miniturnir" je završio. Pobjednik je onaj tko u nastavcima ima više šansi za uspjeh. Tko je pobjedio? (rj. B)
13. Poznato je da je vjerojatnost da su blizanci istog spola dva puta veća od vjerojatnosti da budu različitog spola. Vjerojatnost da se rodi muško dijete je 0.51. Kolika je vjerojatnost da ako je jedno dijete muško, da je tada i drugo dijete muško? (rj. 0.673)
14. Odredite $P(A), P(B), P(A \cap B)$ ako je $P(A \cup B) = 0.9, P(A \cup B^c) = 0.8$ i ako su a) A i B nezavisni događaji b) A i B^c međusobno isključujući događaji.
15. Odredite $P(A), P(B)$ ako je $P(A \cup B) = 0.6, P(A^c \cup B) = 0.7, P(A \cup B^c) = 0.8$. Jesu li A i B nezavisni događaji?
16. Izračunajte $P(A), P(B), P(C), P(A^c \cup C^c), P(A \cup B^c)$ ako događaji A, B, C čine potpun sustav događaja i ako je $P(A) : P(B) : P(C) = 1 : 4 : 7$.
17. Iz prve kutije u kojoj su dvije bijele i tri crne kuglice prebacimo (bez gledanja) dvije kuglice u drugu kutiju u kojoj su tri bijele i tri crne kuglice. Nakon toga iz druge kutije tri puta uzastopce s vraćanjem izvučemo bijelu kuglicu. Usporedite vjerojatnosti da su kod prvog prebacivanja prebačene a) dvije bijele b) dvije crne kuglice.
18. Na ispitu student treba odgovoriti na sva 3 slučajno odabrana pitanja od 10 mogućih. Od 20 studenata koji su izašli na ispit 10 znaju odgovoriti na sva pitanja, 5 studenata zna odgovor na 50% pitanja, a preostalih 5 studenata zna odgovor na 3 pitanja. Ako je slučajno odabrani student odgovorio na 3 postavljena pitanja kolika je vjerojatnost da je a) student znao odgovore na sva pitanja b) student znao odgovore na 3 pitanja?