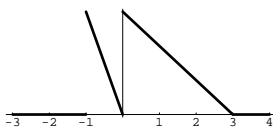


## FUNKCIJA GUSTOĆE I FUNKCIJA DISTRIBUCIJE

1. Funkcija gustoće neke slučajne varijable  $X$  dana je grafom. Odredite analitički prikaz od  $f_X(x)$ ,  $F_X(x)$ , te izračunajte  $E[X + 3]$ .  $E[X] = ?$   $P(|X - 1| \leq 3) = ?$  Izračunajte  $\text{Var}[X]$  te  $P(X > 1 | X < 3)$ .



$$\text{Rj: } f_X(x) = \begin{cases} -x/2, & -1 \leq x < 0 \\ 1/2 - x/6, & 0 \leq x < 3 \\ 0, & \text{inače} \end{cases}, \quad F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -1 \\ 1/4 - x^2/4, & -1 \leq x \leq 0 \\ 1/4 + x/2 - x^2/12, & 0 \leq x \leq 3 \\ 1, & x \geq 3 \end{cases}$$

$$E[X] = 7/12, \quad E[X + 3] = 43/12, \quad P(|X - 1| \leq 3) = F_X(4) - F_X(-2) = 1, \quad \text{Var}[X] = 131/144, \\ P(X > 1 | X < 3) = 1/3$$

2. Za koje  $a \in \mathbb{R}$  je funkcija  $f(x) = \begin{cases} x^2/3, & -2 < x < 0 \\ 1/ax, & 1 < x < e \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$  funkcija gustoće vjerojatnosti neke slučajne varijable?

Nađite funkciju distribucije  $F(x)$ , te izračunajte  $P(|X| < 1)$ .

$$\text{Rj: } a = 9, \quad F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -2 \\ x^3/9 + 8/9, & -2 \leq x \leq 0 \\ 8/9, & 0 \leq x \leq 1 \\ 8/9 + 1/9 \cdot \ln x, & 1 \leq x \leq e \\ 1, & x \geq e \end{cases}, \quad P(|X| < 1) = 1/9$$

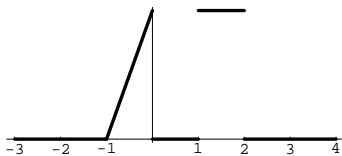
3. Odredite  $a \in \mathbb{R}$  tako da funkcija  $f(x) = \begin{cases} a(x+1), & -1 \leq x < 0 \\ a(1 - \frac{x}{3}), & 0 \leq x \leq 3 \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$  bude funkcija gustoće vjerojatnosti neke slučajne varijable  $X$ . Odredite  $F(x)$ ,  $E[X]$  te  $P(|X - 1| \leq 3)$ .

$$\text{Rj: } a = 1/2, \quad F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -1 \\ x^2/4 + x/2 + 1/4, & -1 \leq x \leq 0 \\ -x^2/12 + x/2 + 1/4, & 0 \leq x \leq 3 \\ 1, & x \geq 3 \end{cases}, \quad E[X] = 2/3, \quad P(|X - 1| \leq 3) = 1$$

4. Odredite  $a \in \mathbb{R}$  tako da  $f(x) = \begin{cases} |x|, & -1/2 \leq x \leq 1/2 \\ a(x-3)(2-x), & 2 \leq x \leq 3 \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$  bude vjerojatnosna funkcija gustoće neke slučajne varijable. Izračunajte joj očekivanje i varijancu.  $P(|X + 1| \leq 0) = ?$

$$\text{Rj: } a = 9/2, \quad F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -1/2 \\ 1/8 - x^2/2, & -1/2 \leq x \leq 0 \\ 1/8 + x^2/2, & 0 \leq x \leq 1/2 \\ 1/4, & 1/2 \leq x \leq 2 \\ -3x^3/2 + 45x^2/4 - 27x + 85/4, & 2 \leq x \leq 3 \\ 1, & x \geq 3 \end{cases}, \\ E[X] = 15/8, \quad \text{Var}[X] = 397/320, \quad P(|X + 1| \leq 0) = 0$$

5. Funkcija gustoće vjerojatnosti slučajne varijable  $X$  dana je grafom. Odredite analitički prikaz od  $f(x)$ ,  $F(x)$ , te izračunajte  $E[X]$ ,  $P(-1 < X < 2)$ . Izračunajte  $E[X + 2]$  i  $P(\frac{1}{X} \leq 2)$



$$\text{Rj: } f_X(x) = \begin{cases} 2x/3 + 2/3, & -1 \leq x < 0 \\ 2/3, & 1 \leq x < 2 \\ 0, & \text{inače} \end{cases}, \quad F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -1 \\ x^2/3 + 2x/3 + 1/3, & -1 \leq x \leq 0 \\ 1/3, & 0 \leq x \leq 1 \\ 2x/3 - 1/3, & 1 \leq x \leq 2 \\ 1, & x \geq 2 \end{cases}$$

$$E[X] = 8/9, \quad P(-1 < X < 2) = 1, \quad E[X + 2] = 26/9, \quad P\left(\frac{1}{X} \leq 2\right) = P(X < 0) + P(X \geq 1/2) = 1$$

6. Funkcija gustoće neke slučajne varijable  $X$  dana je grafom. Odredite analitički prikaz od  $f(x)$ ,  $F(x)$ , te izračunajte  $E[X]$ .



$$\text{Rj: } f_X(x) = \begin{cases} x/2, & 0 \leq x \leq 1 \\ 2/3 - x/6, & 1 \leq x \leq 4 \\ 0, & \text{inače} \end{cases}, \quad F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ x^2/4, & 0 \leq x \leq 1 \\ -x^2/12 + 2x/3 - 1/3, & 1 \leq x \leq 4 \\ 1, & x \geq 4 \end{cases}, \quad E[X] = 5/3$$

7. Odredite  $a \in \mathbb{R}$  tako da  $f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x \leq 1/2 \\ a(x-1)(2-x), & 1 \leq x \leq 2 \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$  bude vjerojatnosna funkcija gustoće neke slučajne varijable. Izračunajte joj očekivanje te  $P(|X + 1| \leq 1)$ .

$$\text{Rj: } a = 9/2, \quad E[X] = 29/24, \quad P(|X + 1| \leq 1) = 0$$

8. Odredite  $a \in \mathbb{R}$  tako da funkcija  $f(x) = \begin{cases} x + 1, & -1 \leq x < 0 \\ a(1 - \frac{x}{2}), & 1 \leq x \leq 2 \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$  bude funkcija gustoće vjerojatnosti neke slučajne varijable  $X$ . Odredite  $F(x)$ ,  $E[X]$  te  $P(|X - 1| \leq 3)$ .

$$\text{Rj: } a = 2, \quad F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -1 \\ x^2/2 + x + 1/2, & -1 \leq x \leq 0 \\ 1/2, & 0 \leq x \leq 1 \\ -x^2/2 + 2x - 1, & 1 \leq x \leq 2 \\ 1, & x \geq 2 \end{cases}, \quad E[X] = 1/2, \quad P(|X - 1| \leq 3) = 1$$

9. Odredite  $a, b \in \mathbb{R}$  tako da

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -1 \\ ax^2 + bx + 1/2, & -1 \leq x \leq 0, \\ ax + b - a, & 0 \leq x \leq 1, \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}$$

bude funkcija distribucije neke neprekidne slučajne varijable. Odredite njenu funkciju gustoće, te izračunajte  $E[2X - 3]$  i  $\text{Var}[2X - 3]$ .

$$\text{Rj: } a = 1/2, \quad b = 1, \quad f_X(x) = \begin{cases} x + 1, & -1 \leq x < 0 \\ 1/2, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{inače} \end{cases}, \quad E[2X - 3] = -17/6, \quad \text{Var}[2X - 3] = 35/36$$

10. Odredite  $a \in \mathbb{R}$  tako da

$$f(x) = \begin{cases} a|x + 2|, & -5 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

bude vjerojatnosna funkcija gustoće neke slučajne varijable. Odredite njenu funkciju distribucije, te joj nađite očekivanje i izračunajte  $P(X^2 < 0)$ .

$$\text{Rj: } a = 1/9, \quad F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -5 \\ -x^2/18 - 2x/9 + 5/18, & -5 \leq x \leq -2 \\ x^2/18 + 2x/9 + 13/18, & -2 \leq x \leq 1 \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}, \quad E[X] = -2, \quad P(X^2 < 0) = 0$$

11. Odredite  $a \in \mathbb{R}$  tako da

$$f(x) = \begin{cases} a|\sin x|, & 2\pi \leq x \leq 4\pi \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

bude vjerojatnosna funkcija gustoće neke slučajne varijable. Odredite njenu funkciju distribucije, te izračunajte  $P(|X - 3| < -3)$ .

$$\text{Rj: } a = 1/4, \quad F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 2\pi \\ 1/4 - 1/4 \cos x, & 2\pi \leq x \leq 3\pi \\ 3/4 + 1/4 \cos x, & 3\pi \leq x \leq 4\pi \\ 1, & x \geq 4\pi \end{cases}, \quad P(|X - 3| < -3) = 0$$

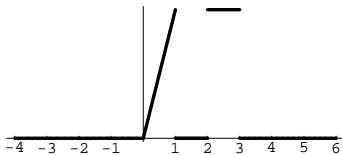
12. Odredite  $a \in \mathbb{R}$  tako da  $f(x) = \begin{cases} a(-x^2 + 4x - 3), & |x - 2| \leq 1 \\ |x|, & |x| \leq 1/3 \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$  bude vjerojatnosna funkcija gustoće neke slučajne varijable. Izračunajte joj očekivanje i varijancu, te  $P(|X + 1| \geq 1)$ .

$$\text{Rj: } a = 2/3, \quad E[X] = 16/9, \quad \text{Var}[X] = 469/810, \quad P(|X + 1| \geq 1) = 17/18$$

13. Odredite  $a \in \mathbb{R}$  tako da  $f(x) = \begin{cases} a \sin |x - \frac{\pi}{2}|, & 0 < x \leq \pi \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$  bude vjerojatnosna funkcija gustoće neke slučajne varijable. Odredite njenu funkciju distribucije, izračunajte joj očekivanje te  $P(|X + 1| > -2)$ .

$$\text{Rj: } a = 1/2, \quad F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 1/2 \sin x, & 0 \leq x \leq \pi/2 \\ 1 - 1/2 \sin x, & \pi/2 \leq x \leq \pi \\ 1, & x \geq \pi \end{cases}, \quad E[X] = \pi/2, \quad P(|X + 1| > -2) = 1$$

14. Funkcija gustoće vjerojatnosti slučajne varijable  $X$  dana je grafom. Odredite analitički prikaz od  $f(x)$ ,  $F(x)$ , te izračunajte  $E[X - 1]$ .



$$\text{Rj: } f_X(x) = \begin{cases} 2x/3, & 0 \leq x \leq 1 \\ 2/3, & 2 \leq x \leq 3 \\ 0, & \text{inače} \end{cases}, \quad F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ x^2/3, & 0 \leq x \leq 1 \\ 1/3, & 1 \leq x \leq 2 \\ 2x/3 - 1, & 2 \leq x \leq 3 \\ 1, & x \geq 3 \end{cases}, \quad E[X - 1] = 8/9$$