1 Obične diferencijalne jednadžbe

1.1 Linearne diferencijalne jednadžbe drugog reda s konstantnim koeficijentima

Diferencijalne jednadžbe oblika

$$y'' + ay' + by = f(x), \tag{1}$$

gdje su a i b realni brojevi a f neprekidna funkcija na nekom intervalu I, nazivamo *linearnim diferencijalnim jednadžbama drugog reda s konstantnim koeficijentima*. Svaku funkciju $y = y(x)$ koja zadovoljava (1) za svaki $x \in I$ nazivamo rješenjem diferencijalne jednadžbe (1).

Primjer 1 *Navedimo neke primjere linearnih diferencijalnih jednadžbi drugog reda s konstantnim koeficijentima:*

1. $y'' = x$,
2. $y'' + 4y = 0$
3. $y'' + k^2 y = \sin \omega x,\ k, \omega \in \mathbf{R}$,
4. $y'' + 5y' + 4y = xe^{-x} + e^{-4x}$.

Neki primjeri ODJ koje nisu linearne diferencijalne jednadžbe drugog reda s konstantnim koeficijentima:

1. $y''^2 = x$
2. $y''y' = 4$
3. $y'' + e^x y = e^{-x}$.

Proučimo prvo najjednostavniji oblik linearnih diferencijalnih jednadžbi drugog reda s konstantnim koeficijentima tj. onaj u kojem je $f = 0$. Takve linearne diferencijalne jednadžbe drugog reda s konstantnim koeficijentima nazivamo *prikraćenima ili homogenima*.

1.1.1 Prikraćene linearne diferencijalne jednadžbe drugog reda s konstantnim koeficijentima

Promatrat ćemo jednadžbe oblika

$$y'' + ay' + by = 0,\ a, b \in \mathbf{R}. \tag{2}$$

Uvedimo sljedeću oznaku:

$$L(y) = y'' + ay' + by. \tag{3}$$

Lako se vidi da vrijedi

$$L(C_1 y_1 + C_2 y_2) = C_1 L(y_1) + C_2 L(y_2) \tag{4}$$

pri čemu su C_1 i C_2 proizvoljni realni brojevi.

Sada se ODJ (2) može zapisati u obliku

$$L(y) = 0.$$

Osnovno svojstvo prikraćenih linearnih dif. jedn. je sljedeće svojstvo:

Svojstvo 1 *Neka je $L(y_1) = 0 = L(y_2)$. Tada je $L(C_1 y_1 + C_2 y_2) = 0$ za proizvoljne konstante C_1, C_2.*

Dokaz: Koristeći svojstvo (4) imamo:

$$L(C_1 y_1 + C_2 y_2) = C_1 L(y_1) + C_2 L(y_2) = C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 0 = 0.$$

$\square$

Cilj nam je naći *sva* rješenja ODJ (2).

Sljedeći teorem navodimo bez dokaza.

Teorem 1 *Svako rješenje diferencijalne jednadžbe*

$$y'' + ay' + by = 0$$

dade se prikazati kao linearna kombinaciju bilo kojih dvaju njezinih fundamentalnih rješenja tj. onih rješenja za koje se jedno rješenje ne može zapisati u obliku produkta konstante i drugog rješenja.

Primjer 2 *Očito su $y_1(x) = e^{2x}$, $y_2(x) = e^{-2x}$ rješenja diferencijalne jednadžbe*

$$y'' - 4y = 0.$$

To su i fundamentalna rješenja, jer kada bi postojala konstanta $C \in \mathbf{R}$ tako da je $e^{2x} = Ce^{-2x}$ to bi povlačilo da je $e^{4x} = C$, što nije istinito. Po prethodnmom teoremu sva rješenja diferencijalne jednadžbe $y'' - 4y = 0$ su oblika $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}$, $C_1, C_2 \in \mathbf{R}$.

Prisjetimo se da opće rješenje općenito ne znači zapis svih rješenja neke diferencijalne jednadžbe npr. $y = Cx - \frac{1}{4}C^2$ je opće rješenje diferencijalne (nelinearne) jednadžbe $y = xy' - \frac{1}{4}y'^2$ koje ne sadrži očito rješenje $y = x^2$.

Određivanje fundamentalnih rješenja prikraćenih linearnih diferencijalnih jednadžbi drugog reda s konstantnim koeficijentima:

Rješenje diferencijalne jednadžbe

$$y'' + ay' + by = 0 \tag{5}$$

tražimo u obliku $y = e^{rx}$. Kako je $y' = re^{rx}$ i $y'' = r^2e^{rx}$, to uvrštavanjem u diferencijalnu jednadžbu dobijemo

$$r^2e^{rx} + are^{rx} + be^{rx} = 0$$

što dijeljenjem s $e^{rx} > 0$ daje *karakterističnu jednadžbu* ODJ (5):

$$r^2 + ar + b = 0. \tag{6}$$

Kako je to kvadratna jednadžba dobivamo sljedeće tri mogućnosti:

1. Jednadžba (6) ima dva realna različita rješenja $r_1 \neq r_2$. Tada su rješenja $y_1 = e^{r_1x}$, $y_2 = e^{r_2x}$ očito fundamentalna pa se sva rješenja dadu zapisati u obliku $y = C_1e^{r_1x} + C_2e^{r_2x}$, $C_1, C_2 \in \mathbf{R}$.

2. Jednadžba (6) ima jedno dvostruko rješenje $r_1 \in \mathbf{R}$. Lako se provjerom vidi da je osim očitog rješenja $y_1 = e^{r_1x}$ i $y_2 = xe^{r_1x}$ rješenje. Sva rješenja se sada dadu zapisati u obliku $y = C_1e^{r_1x} + C_2xe^{r_1x}$.

3. Jednadžba (6) ima konjugirano kompleksna rješenja $r_{1,2} = \alpha \pm \beta i$, $\beta \neq 0$. Neposrednom provjerom se lako vidi da su $y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x$ i $y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x$ rješenja pa onda i fundamentalna rješenja dif. jedn. (5), pa se sva rješenja dadu zapisati u obliku $y = e^{\alpha x}\left(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x\right)$.

Primjer 3 *Odredite sva rješenja diferencijalne jednadžbe $y'' - 5y' + 4y = 0$. Odredite ono rješenje koje prolazi točkom $A(0, 5)$ sa nagibom tangente $k = 8$.*

Rješenje: Karakteristična jednadžba dif. jedn. $y'' - 5y' + 4y = 0$ očito glasi

$$r^2 - 5r + 4 = 0.$$

Rješavanjem se dobiju vrijednosti $r_1 = 4$, $r_2 = 1$. Sva rješenja su dana s

$$y = C_1e^{4x} + C_2e^{x},\ C_1, C_2 \in \mathbf{R}.$$

Kako je $y(0) = C_1 + C_2$ i $y'(0) = 4C_1 + C_2$ to se iz početnih uvjeta dobije sustav (lineran):

$$C_1 + C_2 = 5, \quad 4C_1 + C_2 = 8$$

što daje $C_1 = 1$, $C_2 = 4$. Rješenje koje zadovoljava navedene početne uvjete je

$$y = e^{4x} + 4e^x.$$

□

Primjer 4 *Odredite sva rješenja dif. jedn. a) $y'' + 4y = 0$, b) $y'' - 4y = 0$.*

Rješenje: a) Karakteristična jednadžba glasi $r^2 + 4 = 0$ što daje $r = \pm 2i$ tj. $\alpha = 0$, $\beta = 2$, čime je opće rješenje dano s

$$y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x.$$

b) Karakteristična jednadžba glasi $r^2 - 4 = 0$, što daje $r_{1,2} = \pm 2$. Sva rješenja su dana s

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}.$$

□

Primjer 5 *Odredite sva rješenja diferencijalne jednadžbe $y'' + 4y' + 4y = 0$.*

Rješenje: Karakteristična jednadžba glasi: $r^2 + 4r + 4 = 0$, što daje $r_{1,2} = -2$. Sva rješenja su dana s

$$y = C_1 e^{-2x} + C_2 x e^{-2x}.$$

□

Primjer 6 *Odredite sva rješenja dif. jedn. $y'' + 4y' + 5y = 0$.*

Rješenje: Kako je $r_{1,2} = -2 \pm i$, to su sva rješenja dana s

$$y = e^{-2x} \left(C_1 \cos x + C_2 \sin x \right).$$

□

1.1.2 Diferencijalne jednadžbe oblika $y'' + ay' + by = f(x)$ za neke klase funkcija $f(x)$

U prethodnoj sekciji naučili smo rješavati prikraćenu linearnu diferencijalnu jednadžbu oblika

$$y'' + ay' + by = 0,\ a, b \in \mathbf{R}$$

koristeći fundamentalna rješenja i njihove linearne kombinacije.

Navedimo neka svojstva rješenja neprikraćene (nehomogene) diferencijalne jednadžbe oblika

$$y'' + ay' + by = f(x)$$

čijim ćemo korištenjem dobiti sva rješenja (koja se u slučaju linearnih diferencijalnih jednadžbi poklapaju sa općim rješenjem).

Svojstvo 2 *Neka su y_1 i y_2 rješenja diferencijalne jednadžbe*

$$y'' + ay' + by = f(x).$$

Tada je funkcija

$$u = y_1 - y_2$$

rješenje prikraćene diferencijalne jednadžbe

$$y'' + ay' + by = 0.$$

Dokaz:

$$u'' + au' + bu = (y_1 - y_2)'' + a(y_1 - y_2)' + b(y_1 - y_2)$$
$$= (y_1'' + ay_1' + by_1) - (y_2'' + ay_2' + by_2) = f(x) - f(x) = 0.$$

$\square$

Svojstvo 3 *Neka je y_p bilo koje (partikularno) rješenje diferencijalne jednadžbe*

$$y'' + ay' + by = f(x).$$

Tada je svako rješenje iste diferencijalne jednadžbe oblika

$$y = y_h + y_p$$

, pri čemu je y_h rješenje prikraćenog oblika

$$y'' + ay' + by = 0.$$

Rješenje: Neka je y proizvoljno rješenje diferencijalne jednadžbe $y'' + ay' + by = f(x)$. Tada je po prethodnom svojstvu $y_h = y - y_p$ rješenje diferencijalne jednadžbe $y'' + ay' + by = 0$. Odakle je

$$y = y_h + y_p.$$

$\square$

Odavde slijedi da se svako rješenje diferencijalne jednadžbe

$$y'' + ay' + by = f(x)$$

može zapisati u obliku

$$y = y_h + y_p = C_1 y_1 + C_2 y_2 + y_p$$

pri čemu su y_1 i y_2 fundamentalna rješenja diferencijalne jednadžbe

$$y'' + ay' + by = 0$$

(vidi prethodnu sekciju).

Navedimo još jedno svojstvo korisno kod rješavanja neprikraćenih linearnih diferencijalnih jednadžbi.

Svojstvo 4 *Svako rješenje diferencijalne jednažbe*

$$y'' + ay' + by = f_1(x) + f_2(x)$$

je oblika

$$y = y_h + y_{p1} + y_{p2},$$

pri čemu je y_h rješenje diferencijalne jednadžbe

$$y'' + ay' + by = 0,$$

y_{p1} rješenje (partikularno) diferencijalne jednadžbe

$$y'' + ay' + by = f_1(x),$$

a y_{p2} rješenje (partikularno) diferencijalne jednadžbe

$$y'' + ay' + by = f_2(x).$$

Kako smo naučili (vidi prethodnu sekciju) nalaziti sva rješenja prikraćenih oblika linearne diferencijalne jednadžbe drugog reda s konstantnim koeficijentima, preostaje pokazati način nalaženja partikularnih rješenja neprikraćenih oblika. Osnovna metoda je **metoda neodređenih koeficijenata**, koju ćemo ilustrirati na nekoliko karakterističnih primjera (vidi i Seminare, gdje su dane opće upute za nalaženje partikularnih rješenja). U ovoj metodi dopuštamo da je desna strana jednadžbe linearna kombinacija funkcija oblika

$$P_n(x)e^{ax}\cos bx, \quad P_n(x)e^{ax}\sin bx,$$

(a i b u ovom zapisu nisu u vezi sa a i b u zapisu $y'' + ay' + by = f(x)$) pri čemu je P_n polinom.

Napomena: Neki od sljedećih primjera su računski vrlo zahtjevni. Namjera je da se razumije način formiranja i oblik partikularnih rješenja kod nehomogenih linearnih diferencijalnih jednadžbi.

Slučaj realnih različitih rješenja karakteristične jednadžbe:

Primjer 7 *Odredite sva rješenja diferencijalne jednadžbe* $y'' - y' - 6y = f(x)$ *ako je a)* $f(x) = e^{5x}$, *b)* $f(x) = 5e^{3x}$, *c)* $f(x) = 10e^{-2x}$
d) $f(x) = xe^{5x}$, *e)* $f(x) = 5xe^{3x}$, *f)* $f(x) = 10xe^{-2x}$,
g) $f(x) = x^2e^{5x}$, *h)* $f(x) = 5x^2e^{3x}$, *i)* $f(x) = 10x^2e^{-2x}$,
j) $f(x) = e^{3x}\cos 2x$ *k)* $f(x) = xe^{2x}\sin 3x$.

Rješenje: Kako je karakteristična jednadžba dif. jedn. $y'' - y' - 6y = 0$ dana sa $r^2 - r - 6 = 0$, čija su rješenja $r_1 = -2$, $r_2 = 3$, to su sva rješenja dif. jedn. $y'' - y' - 6y = 0$ dana sa

$$y_h = C_1e^{-2x} + C_2e^{3x}, \ C_1, C_2 \in \mathbf{R}.$$

a) Kako je $P_0(x) = 1$, a $a = 5$ nije nul-točka karakterističnog polinoma to y_p tražimo u obliku

$$y = Ae^{5x}.$$

Deriviranjem se dobije $y' = 5Ae^{5x}$, $y'' = 25Ae^{5x}$. Uvrštavanjem u diferencijalnu jednadžbu $y'' - y' - 6y = e^{5x}$ te dijeljenjem s e^{5x} dobije se

$$14A = 1 \Leftrightarrow A = \frac{1}{14},$$

pa su sva rješenja dif. jedn. $y'' - y' - 6y = e^{5x}$ dana s

$$y = C_1e^{-2x} + C_2e^{3x} + \frac{1}{14}e^{5x}.$$

b) Kako je $P_0(x) = 5$ a $a = 3$ jest nul-točka (jednostruka) karakterističnog polinoma, to y_p tražimo u obliku

$$y = x^1 A e^{3x}.$$

Deriviranjem se dobije $y' = Ae^{3x} + 3Axe^{3x}$, $y'' = 6Ae^{3x} + 9Axe^{3x}$. Uvrštavanjem u dif. jedn. $y'' - y' - 6y = 5e^{3x}$ i dijeljenjem s e^{3x} dobije se

$$(6A + 9Ax) - (A + 3Ax) - 6Ax = 5 \Leftrightarrow 5A = 5 \Leftrightarrow A = 1,$$

pa su sva rješenja dif. jedn. $y'' - y' - 6y = 5e^{3x}$ dana s

$$y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{3x} + xe^{3x}.$$

c) Analognim argumentiranjem kao u b) (jer je $a = -2$ također nul-točka karakterističnog polinoma), sva rješenja dif. jedn. $y'' - y' - 6y = 10e^{-2x}$ su dana s

$$y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{3x} - 2xe^{-2x}.$$

d) Kako je $P_1(x) = x$ i $a = 5$ nije nul-točkla karakterističnog polinoma, to y_p tražimo u obliku $y = (Ax + B)e^{5x}$. Deriviranjem i uvrštavanjem u dif. jedn. $y'' - y' - 6y = xe^{5x}$ dobije se

$$y_p = \frac{1}{196}\left(14x - 9\right)e^{5x},$$

pa su sva rješenja dif. jedn. $y'' - y' - 6y = xe^{5x}$ dana s

$$y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{3x} + \frac{1}{196}\left(14x - 9\right)e^{5x}.$$

e) Kako je $P_1(x) = 5x$ i $a = 3$ je jednostruka nul-točka karakterističnog polinoma to partikularno rješenje dif. jedn. $y'' - y' - 6y = 5xe^{3x}$ tražimo u obliku

$$y = x^1(Ax + B)e^{3x},$$

što deriviranjem i uvrštavanjem u dif. jedn. daje

$$y_p = \frac{1}{10}x(5x - 2)e^{3x}.$$

Sva rješenja dif. jedn. $y'' - y' - 6y = 5xe^{3x}$ su sada dana s

$$y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{3x} + \frac{1}{10}x(5x - 2)e^{3x}.$$

f) Analognim postupkom kao pod e) dobije se

$$y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{3x} - \frac{1}{5} x(5x+2) e^{-2x}.$$

g) Kako je $P_2(x) = x^2$ i $a = 5$ nije nul-točka karakterističnog polinoma to partikularno rješenje tražimo u obliku $y = (Ax^2 + Bx + C)e^{5x}$. Nakon deriviranja i uvrštavanja u dif. jedn. dobije se

$$y_p = \frac{1}{1372}(98x^2 - 126x + 67)e^{5x},$$

čime su sva rje šenja dana s

$$y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{3x} + \frac{1}{1372}(98x^2 - 126x + 67)e^{5x}.$$

h) Kako je $P_2(x) = 5x^2$ i $a = 3$ je jednostruka nul-točka kartakterističnog polinoma to partikularno rješenje tražimo u obliku $y = x(Ax^2 + Bx + C)e^{3x}$, što opet deriviranjem i uvrštavanjem u dif. jedn. i rješavanjem sustava daje

$$y_p = \frac{1}{75} x \left(6 - 15x + 25x^2\right) e^{3x},$$

pa su sva rješenja dif. jedn. dana sa

$$y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{3x} + \frac{1}{75} x \left(6 - 15x + 25x^2\right) e^{3x}.$$

i) Analogno kao u h) dobije se

$$y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{3x} - \frac{2}{75} x \left(6 + 15x + 25x^2\right) e^{3x}.$$

j) Partikularno rješenje tražimo u obliku $y = e^{3x}(A\cos 2x + B\sin 2x)$. Nakon deriviranja i uvrštavanja u dif. jedn. te izjednačavanja koeficijenata ispred $\cos 2x$ i $\sin 2x$ dobije se

$$y_p = \frac{1}{58} e^{3x} \left(-2\cos 2x + 5\sin 2x\right),$$

pa su sva rješenja dana s

$$y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{3x} + \frac{1}{58} e^{3x} \left(-2\cos 2x + 5\sin 2x\right).$$

k) Partikularno rješenje tražimo u obliku

$$y_p = e^{2x} \left((Ax + B)\cos 2x + (Cx + D)\sin 2x\right).$$

Analognim postupcima kao gore (primjetite da ovdje dobijete $\check{4}$ linearne jednadžbe s 4 nepoznanice) dobije se

$$y_p = -\frac{1}{6250}e^{2x}\left[(123 + 225x)\cos 3x + (-114 + 325x)\sin 3x\right],$$

pa su sva rješenja dana s

$$y = C_1e^{-2x} + C_2e^{3x} - \frac{1}{6250}e^{2x}\left[(123 + 225x)\cos 3x + (-114 + 325x)\sin 3x\right].$$

$\square$

Što je sa rješenjem dif. jedn. $y'' - y' - 6y = x$, $y'' - y' - 6y = x^2$ itd.?

Slučaj jednog dvostrukog realnog rješenja karakteristične jednadžbe:

Primjer 8 *Riješite diferencijalnu jednadžbu* $y'' + 6y' + 9y = f(x)$ *ako je*
a)$f(x) = 6e^{4x}$ *b)* $f(x) = 6xe^{4x}$ *c)* $f(x) = 6x^2e^{4x}$
d) $f(x) = 6e^{-3x}$ *e)* $f(x) = (6x + 5)e^{-3x}$ *f)* $f(x) = (6x^2 + 5x + 2)e^{-3x}$
g) $f(x) = e^{-3x}\cos 5x$ *h)* $f(x) = xe^{-5x}\sin 3x$.

Rješenje: Kako karakteristična jednadžba prikraćene diferencijalne jednadžbe $y'' + 6y' + 9y = 0$ glasi $r^2 + 6r + 9 = 0$ koja ima jedno dvostruko rješenje $r_{1,2} = -3$, to je

$$y_h = C_1e^{-3x} + C_2xe^{-3x}.$$

a) Partikularno rješenje tražimo u obliku $y_p = Ae^{4x}$. Analogno kao gore dobije se

$$y_p = \frac{6}{49}e^{4x},$$

pa su sva rješenja dif. jedn. $y'' + 6y' + 9y = 6e^{4x}$ dana sa

$$y = C_1e^{-3x} + C_2xe^{-3x} + \frac{6}{49}e^{4x}.$$

b) Partikularno rješenje tražimo u obliku $y_p = (Ax + B)e^{4x}$. Uvrštavanjem se dobije

$$y_p = \frac{6}{343}e^{4x}(7x - 2),$$

pa je traženo rješenje

$$y = C_1e^{-3x} + C_2xe^{-3x} + \frac{6}{343}e^{4x}(7x - 2).$$

c) Partikularno rješenje tražimo u obliku $y_p = (Ax^2+Bx+C)e^{4x}$. Uvrštavanjem se dobije

$$y_p = \frac{6}{2401}e^{4x}\left(49x^2 - 28x + 6\right),$$

pa je traženo rješenje

$$y = C_1e^{-3x} + C_2xe^{-3x} + \frac{6}{2401}e^{4x}\left(49x^2 - 28x + 6\right).$$

d) Partikularno rješenje tražimo u obliku (primjetite da je $a = -3$ dvostruko rješenje karakteristične jednadžbe) $y_p = x^2Ae^{-3x}$. Uvrštavanjem u diferencijalnu jednadžbu se dobije

$$y_p = 3x^2e^{-3x},$$

pa je traženo rješenje dano s

$$y = C_1e^{-3x} + C_2xe^{-3x} + 3x^2e^{-3x}.$$

e) Partikularno rješenje tražimo u obliku $y_p = x^2(Ax+B)e^{-3x}$, što uvrštavanjem u dif. jedn. daje

$$y_p = \frac{1}{2}x^2(2x+5)e^{-3x},$$

pa je traženo rješenje dano s

$$y = C_1e^{-3x} + C_2xe^{-3x} + \frac{1}{2}x^2(2x+5)e^{-3x}.$$

f)Partikularno rješenje tražimo u obliku $y_p = x^2(Ax^2 + Bx + C)e^{-3x}$, što uvrštavanjem u dif. jedn. daje

$$y_p = \frac{1}{6}x^2(3x^2 + 5x + 6)e^{-3x},$$

pa je traženo rješenje dano s

$$y = C_1e^{-3x} + C_2xe^{-3x} + \frac{1}{6}x^2(3x^2 + 5x + 6)e^{-3x}.$$

g)Partikularno rješenje tražimo u obliku $y_p = e^{-3x}\left(A\cos 5x + B\sin 5x\right)$, što uvrštavanjem u samu diferencijalnu jednadžbu daje

$$y_p = -\frac{1}{25}e^{-3x}\cos 5x,$$

pa je traženo rješenje dano s

$$y = C_1e^{-3x} + C_2xe^{-3x} - \frac{1}{25}e^{-3x}\cos 5x.$$

h)Partikularno rješenje tražimo u obliku $y_p = e^{-5x}\left[(Ax+B)\cos 3x + (Cx+D)\sin 3x\right]$, što uvrštavanjem u samu diferencijalnu jednadžbu daje

$$y_p = \frac{1}{2197}e^{-5x}\left[(18+156x)\cos 3x - (92+65x)\sin 3x\right],$$

pa su sva rješenja diferencijalne jednadžbe $y'' + 6y' + 9y = xe^{-5x}\sin 3x$ dana s

$$y = C_1e^{-3x} + C_2xe^{-3x} + \frac{1}{2197}e^{-5x}\left[(18+156x)\cos 3x - (92+65x)\sin 3x\right].$$

Slučaj kompleksnih rješenja karakteristične jednadžbe:

Primjer 9 *Riješite diferencijalnu jednadžbu $y'' - 6y' + 25y = f(x)$ ako je:*
a) $f(x) = 2x+3$ b) $f(x) = (2x+3)e^{3x}$ c) $f(x) = (2x+3)\cos 4x$
d) $f(x) = e^{3x}\cos 2x$ e) $f(x) = e^{3x}\cos 4x$ f) $f(x) = xe^{3x}\sin 4x$.

Rješenje: Kako karakteristična jednadžba prikraćene (homogene) diferencijalne jednadžbe $y'' - 6y' + 25y = 0$ glasi $r^2 - 6r + 25 = 0$, čija su rješenja $r_{1,2} = 3 \pm 4i$, to je

$$y_h = e^{3x}\left(C_1\cos 4x + C_2\sin 4x\right).$$

a) Primjetimo da f možemo napisati u obliku $f(x) = (2x+3)e^{0x}\cos 0x$, odakle čitamo da je $a + bi = 0 + 0i$ što nije rješenje karakteristične jednadžbe, pa partikularno rješenje tražimo u obliku $y_p = Ax+B$. Deriviranjem, uvrštavanjem u diferencijalnu jednadžbu te izjednačavanjem koeficijenata uz x i x^0 dobije se

$$y_p = \frac{1}{625}(50x+87),$$

pa su sva rješenja diferencijalne jednadžbe $y'' - 6y' + 25y = 2x+3$ dana s

$$y = e^{3x}\left(C_1\cos 4x + C_2\sin 4x\right) + \frac{1}{625}(50x+87).$$

b) Kako je $f(x) = (2x+3)e^{3x}\cos 0x$ to je $a+bi = 3+0i$, što nije rješenje karakteristične jednadžbe. Sada parikularno rješenje tražimo u obliku $y_p = (Ax+B)e^{3x}$. Deriviranjem, uvrštavanjem u diferencijalnu jednadžbu, kraćenjem s $e^{3x} > 0$, te izjednačavanjem koeficijenata uz x i x^0 dobije se

$$y_p = \frac{1}{16}(2x+3)e^{3x}.$$

Sva rješenja diferencijalne jednadžbe $y'' - 6y' + 25y = (2x+3)e^{3x}$ su dana s

$$y = e^{3x}\left(C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x\right) + \frac{1}{16}(2x+3)e^{3x}.$$

c)Kako je $f(x) = (2x+3)e^{0x}\cos 4x$ to je $a+bi = 0+4i$, što nije rješenje karakteristične jednadžbe. Sada parikularno rješenje tražimo u obliku $y_p = (Ax+B)\cos 4x + (Cx+D)\sin 4x$. Deriviranjem, uvrštavanjem u diferencijalnu jednadžbu, te izjednačavanjem koeficijenata uz $x\cos 4x$, $x \sin 4x$, $\cos 4x$, te $\sin 4x$, dobije se

$$y_p = \frac{1}{47961}\left[9(231+146x)\cos 4x - 8(839+438x)\sin 4x\right].$$

Sva rješenja diferencijalne jednadžbe $y'' - 6y' + 25y = (2x+3)\cos 4x$ su dana s

$$y = e^{3x}\left(C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x\right) + \frac{1}{47961}\left[9(231+146x)\cos 4x - 8(839+438x)\sin 4x\right].$$

d) Kako $a+bi = 3+2i$ nije rješenje karakteristične jednadžbe, to partikularno rješenje tražimo u obliku $y_p = e^{3x}(A\cos 2x + B\sin 2x)$. Deriviranjem, uvrštavanjem u diferencijalnu jednadžbu, kraćenjem s $e^{3x} > 0$, te izjednačavanjem koeficijenata uz $\cos 2x$, $\sin 2x$, dobije se

$$y_p = \frac{1}{12}e^{3x}\cos 2x.$$

Sva rješenja diferencijalne jednadžbe $y'' - 6y' + 25y = e^{3x}\cos 2x$ su dana s

$$y = e^{3x}\left(C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x\right) + \frac{1}{12}e^{3x}\cos 2x.$$

e) Kako je $a+bi = 3+4i$ rješenje karakteristične jednadžbe (naravno jednostruko) , to partikularno rješenje tražimo u obliku

$$y_p = xe^{3x}(A\cos 4x + B\sin 4x).$$

Deriviranjem, uvrštavanjem u diferencijalnu jednadžbu, kraćenjem s $e^{3x} > 0$, te izjednačavanjem koeficijenata uz $\cos 4x$, $\sin 4x$, dobije se

$$y_p = \frac{1}{8}xe^{3x}\sin 4x.$$

Sva rješenja diferencijalne jednadžbe $y'' - 6y' + 25y = e^{3x}\cos 4x$ su dana s

$$y = e^{3x}\left(C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x\right) + \frac{1}{8}xe^{3x}\sin 4x.$$

f)Kako je $a+bi=3+4i$ rješenje karakteristične jednadžbe (naravno jednostruko) , to partikularno rješenje tražimo u obliku

$$y_p = xe^{3x}\left[(Ax+B)\cos 4x + (Cx+D)\sin 4x\right].$$

Deriviranjem, uvrštavanjem u diferencijalnu jednadžbu, kraćenjem s $e^{3x}>0$, te izjednačavanjem koeficijenata uz $\cos 4x$, $\sin 4x$, $x\cos 4x$, $x\sin 4x$ (koeficijenti uz $x^2\cos 4x$ i $x^2\sin 4x$ se trebaju skratiti s lijeve strane zbog toga što je $a+bi$ rješenje karakteristične jednadžbe) dobije se:

$$y_p = \frac{1}{64}xe^{3x}\left(4x\cos 4x - \sin 4x\right).$$

Sva rješenja diferencijalne jednadžbe $y'' - 6y' + 25y = xe^{3x}\sin 4x$ su dana s

$$y = e^{3x}\left(C_1\cos 4x + C_2\sin 4x\right) + \frac{1}{64}xe^{3x}\left(4x\cos 4x - \sin 4x\right).$$