Zadatak 1 *S točnošću većom od* 10^{-6} *odredite* $\ln 58$. *Izračunajte ukupnu grešku.*

Rješenje.

$$58 = 2^6 \cdot \frac{58}{64} \Rightarrow \frac{29}{32} = \frac{1-x}{1+x} \Rightarrow x = \frac{3}{61}$$

$$n = 2 \Rightarrow R_5\left(\frac{3}{61}\right) \leq \frac{9}{4}\frac{\left(\frac{3}{61}\right)^5}{5} = 0.129 \cdot 10^{-6} < 0.25 \cdot 10^{-6}$$

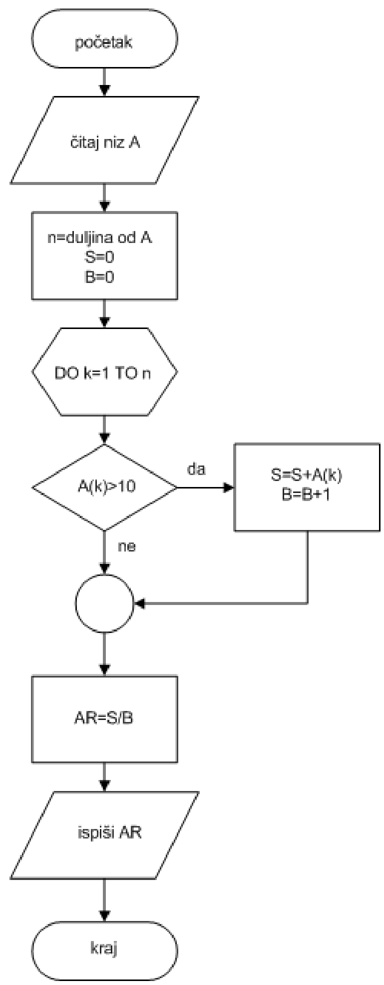
$$\Rightarrow \ln\frac{29}{32} = -2\left[\frac{3}{61} + \frac{1}{3}\left(\frac{3}{61}\right)^3\right] = -2[0.0491803 + 0.0000396] = -0.0984398$$

$$\ln 58 = 6\ln 2 + \ln\frac{29}{32} = 4.1588831 - 0.0984398 = 4.0604433$$

$$\varepsilon = 0.129 \cdot 10^{-6} + 2 \cdot 0.5 \cdot 10^{-7} + 0 = 0.229 \cdot 10^{-6} < 10^{-6}.$$

Zadatak 2 *Opišite dijagram toka i napišite program u Mathematica-i za algoritam koji za zadani niz realnih brojeva računa aritmetičku sredinu onih koji su veći od* 10.

Rješenje.



Slika 1:

```
A = { ,  ,  ,  ,  ,  ,  ,  ..., };
n = Length[A]; S = 0;  B = 0;
For[k = 1, k ≤ n, k = k + 1,
  If[A[[k]] > 10, {S = S + A[[k]], B = B + 1}];];
AR = S/B;
Print[AR]
```

Slika 2:

Zadatak 3 *Jacobijevom metodom (jednom iteracijom) odredite približno rješenje sustava*

$$\begin{aligned} 6x_1 + x_2 &= 9 \\ x_1 + 4x_2 &= 6. \end{aligned}$$

Odredite pravu grešku.

Rješenje.

$$D = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad N = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 9 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow x^{(0)} = D^{-1}b = \frac{1}{24}\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 9 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.5 \\ 1.5 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow x^{(1)} = \frac{1}{24}\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 9 \\ 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1.5 \\ 1.5 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1.25 \\ 1.125 \end{bmatrix}$$

Pravo rješenje:

$$\begin{aligned} 6x_1 + x_2 &= 9 \\ x_1 + 4x_2 &= 6 \end{aligned} \Leftrightarrow \begin{aligned} 6x_1 + x_2 &= 9 \\ -6x_1 - 24x_2 &= -36 \end{aligned} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.3043 \\ 1.1739 \end{bmatrix}$$

Prava greška:

$$\varepsilon = \sqrt{(1.25 - 1.3043)^2 + (1.125 - 1.1739)^2} = 0.07307$$

Zadatak 4 *Odredite vezu oblika* $y = e^{\frac{x+a}{b}}$ *ako je*

x_k	1	2	3
y_k	2.7	4.5	7.4

Rješenje.

$$\ln y = \frac{x+a}{b} \Rightarrow \ln y = \frac{a}{b} + \frac{1}{b}x \Rightarrow \bar{y} = a_0 + a_1\bar{x}, \quad \bar{y} = \ln y, \bar{x} = x, a_0 = \frac{a}{b}, a_1 = \frac{1}{b}$$

$\bar{x}_i$	1	2	3
$\bar{y}_i$	1	1.5	2

$$\Rightarrow \sum_{i=0}^{2} \bar{x}_i = 6, \sum_{i=0}^{2} \bar{x}_i^2 = 14, \sum_{i=0}^{2} \bar{x}_i\bar{y}_i = 10, \sum_{i=0}^{2} \bar{y}_i = 4.5 \Rightarrow a_0 = 0.5, a_1 = 0.5$$

$$\Rightarrow b = \frac{1}{a_1} = 2, \; a = 2 \cdot a_0 = 1 \Rightarrow y = e^{\frac{x+1}{2}}$$

Zadatak 5 *Odredite polinom prvog stupnja koji u smislu metode najmanjih kvadrata najbolje aproksimira funkciju* $f(x) = \ln x$ *na intervalu* $[1, 2]$.

Rješenje.

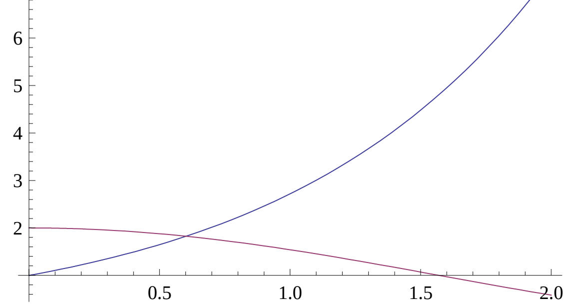
$$\int_1^2 x dx = \frac{3}{2}, \; \int_1^2 x^2 dx = \frac{7}{3}, \; \int_1^2 \ln x dx = 0.38629, \; \int_1^2 x \ln x dx = 0.63629$$

$$a_0 = \frac{\frac{7}{3} \cdot 0.38629 - \frac{3}{2} \cdot 0.63629}{\frac{7}{3} - \frac{9}{4}} = -0.63712, \; a_1 = \frac{0.63629 - \frac{3}{2} \cdot 0.38629}{\frac{7}{3} - \frac{9}{4}} = 0.68229$$

$$\varphi(x) = -0.63712 + 0.68229x$$

Zadatak 6 *Za jednadžbu* $e^x = \cos x + 1$ *odredite funkciju* φ *s kojom se može provesti metoda iteracije za određivanje pozitivne nultoke.*

Rješenje.



Slika 3:

$$f(x) = e^x - 1 - \cos x, \quad f(0) = -1 < 0, \quad f(1) = 1.18 > 0 \Rightarrow \text{ nultočka je unutar intervala } [0,1]$$

$$x = \ln(\cos x + 1) \Rightarrow \varphi(x) = \ln(\cos x + 1) \Rightarrow \varphi'(x) = -\frac{\sin x}{\cos x + 1} \Rightarrow |\varphi'(x)| < 1$$

Zadatak 7 *Newtonovom metodom (jednom iteracijom) odredite približno rješenje sustava*

$$\begin{array}{rcl} x^2 - y^2 + 1 & = & 0 \\ x + y - 5 & = & 0 \end{array},$$

uzimajući za početne vrijednosti $x_0 = y_0 = 1$.

Rješenje.

$$F(X) = \begin{bmatrix} x^2 - y^2 + 1 \\ x + y - 5 \end{bmatrix}, \; X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow F'(X) = \begin{bmatrix} 2x & -2y \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow [F'(x)]^{-1} = \frac{1}{2x + 2y} \begin{bmatrix} 1 & 2y \\ -1 & 2x \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.25 \\ 2.75 \end{bmatrix}$$

Zadatak 8 *Za funkciju* $f(x) = 3^{-x}$ *poznate su vrijednosti* $f(-1), f(0)$ *i* $f(1)$. *Odredite* $f'(0)$:

a) Hermiteovom metodom ako je još poznato i $f'(-1)$,

b) koristeći kubni splajn ako su poznate vrijednosti $f'(-1)$ *i* $f'(1)$,

c) numeričkim diferenciranjem.

Izračunajte pravu grešku u sva tri slučaja.

Rješenje. a) $f'(x) = -3^{-x} \ln 3$

x_i	y_i	$f^{[1]}$	$f^{[2]}$	
$x_{-1} = 0$	$y_{-1} = 1$			
		$f'(x_{-1}) = ?$		
$x_{-1} = 0$	$y_{-1} = 1$		$f[x_{-1}, x_{-1}, x_1] = ?$	
		$f[x_{-1}, x_1] = -2$		$f[x_{-1}, x_{-1}, x_1, x_1] = ?$
$x_1 = -1$	$y_1 = 3$		$f[x_{-1}, x_1, x_1] = 1.29584$	
		$f'(x_1) = -3.29584$		$f[x_{-1}, x_1, x_1, x_2] = -0.31459$
$x_1 = -1$	$y_1 = 3$		$f[x_1, x_1, x_2] = 0.98125$	
		$f[x_1, x_2] = -1.33333$		
$x_2 = 1$	$y_2 = 0.33333$			

$$\frac{1.29584 - f[x_{-1}, x_{-1}, x_1]}{-1} = -0.31459 \Rightarrow f[x_{-1}, x_{-1}, x_1] = 0.98125$$

$$\Rightarrow \frac{-2 - f'(x_{-1})}{-1} = 0.98125 \Rightarrow f'(0) = -1.01875.$$

Kako je prava vrijednost $f'(0) = -1.09861$ za pravu grešku imamo $|-1.01875 + 1.09861| = 0.07986$.

b)

x_i	y_i	$f[x_i, x_{i+1}]$
$x_0 = -1$	$y_0 = 3$	
		$f[x_0, x_1] = -2$
$x_1 = 0$	$y_1 = 1$	
		$f[x_1, x_2] = -0.66667$
$x_2 = 1$	$y_2 = 0.33333$	

$$\Rightarrow s_0 + 4s_1 + s_2 = 3(-2 - 0.66667) = -8.00001.$$

Kako je i $f'(-1) = -3.29584$ i $f'(1) = -0.36620$, imamo $s_1 = -1.08449$, a prava grška je $|-1.08449 + 1.09861| = 0.01412$.

c)

$$f'(0) = \frac{1}{2 \cdot 1}(0.33333 - 3) = -1.33333.$$

Greška: $|-1.33333 + 1.09861| = 0.23472$.

Zadatak 9 *Simpsonovom metodom s točnošću većom od* 10^{-3} *izračunajte* $\int_2^5 \sqrt{x-1}dx$. *Odredite pravu grešku.*

Rješenje.

$$f(x) = \sqrt{x-1} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2}(x-1)^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow f''(x) = -\frac{1}{4}(x-1)^{-\frac{3}{2}} \Rightarrow f'''(x) = \frac{3}{8}(x-1)^{-\frac{5}{2}} \Rightarrow f^{iv}(x) = -\frac{15}{16}(x-1)^{-\frac{7}{2}}$$

$$\Rightarrow M_4 = -f(2) = \frac{15}{16} \Rightarrow \frac{h^4}{180} \cdot \frac{3 \cdot 15}{16} < 10^{-3} \longrightarrow\Rightarrow 2n > 5.964 \Rightarrow 2n = 6.$$

x_i	$f(x_i)$
$x_0 = 2$	$f(x_0) = 1$
$x_1 = 2.5$	$f(x_1) = 1.22474$
$x_2 = 3$	$f(x_2) = 1.41421$
$x_3 = 3.5$	$f(x_3) = 1.58114$
$x_4 = 4$	$f(x_4) = 1.73205$
$x_5 = 4.5$	$f(x_5) = 1.87083$
$x_6 = 5$	$f(x_6) = 2$

$$\Rightarrow I_6 = \frac{3}{18}(1+4(1.22474+1.58114+1.87083)+2(1.41421+1.73205)+2) = 4.66656.$$

Kako je $\int_2^5 \sqrt{x-1}dx = \frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}}\Big|_2^5 = 4.66667$, prava greška je $|4.66656 - 4.66667| = 0.00011$.

Zadatak 10 *Koristeći Laplaceovu transformaciju odredite rješenje diferencijalne jednadžbe* $x''(t) + x'(t) = -2\cos t$ *uz početne uvjete* $x(0) = 1, x'(0) = -1$.

Rješenje.

$$\mathcal{L}(x') = pX - x_0 = pX - 1,\ \mathcal{L}(x'') = p^2X - px_0 - x_0' = p^2X - p + 1 \Rightarrow p^2X - p + 1 + pX - 1 = -2 \cdot \frac{p}{p^2+1}$$

$$\Rightarrow X = \frac{p(p^2-1)}{(p^2+1)(p+1)} = \frac{p}{p^2+1} - \frac{1}{p^2+1}$$

$$\Rightarrow x(t) = \cos t - \sin t.$$

Zadatak 11 *Diferencijalnu jednadžbu* $y' = xy^2$, $y(0) = 1$ *na intervalu* $[0, 1]$ *s korakom* $h = 0.5$ *približno riješite Eulerovom metodom, te Picardovom metodom u dvije iteracije i ocjenite koja je metoda točnija u točki* $x = 1$ *(izračunajte pravu grešku).*

Rješenje. Pravo rješenje:

$$\frac{dy}{y^2} = xdx \Rightarrow -\frac{1}{y} = \frac{x^2}{2} + C \Rightarrow C = -1 \Rightarrow y = \frac{2}{2-x^2} \Rightarrow y(1) = 2.$$

Picardova metoda:

$$y_1(x) = 1 + \int_0^x xdx = 1 + \frac{x^2}{2} \Rightarrow y_2(x) = 1 + \int_0^x x\left(1 + \frac{x^2}{2}\right)^2 dx = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^6}{24} \Rightarrow y_2(0.5) = 1.14128,\ y_2(1) = 1.79167.$$

Prava greška: $|1.79167 - 2| = 0.20833$.

Eulerova metoda:

$$y_1 = 1 + 0.5 \cdot 0 \cdot 1 = 1$$

$$y_2 = 1 + 0.5 \cdot 0.5 \cdot 1^2 = 1.25$$

Prava greška: $|1.25 - 2| = 0.75$.

Točnija je Picardova metoda.

Zadatak 12 *Koristeći shemu konačnih razlika približno rješite rubni problem za parcijalnu diferencijalnu jednadžbu prvog reda:*

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} = x + y, & na \quad S = [0,1] \times [-1,0] \\ u(x,y) = y, & na \quad \Gamma = \partial S \end{cases}$$

$s\ h = k = 0.5$.

Rješenje.

$$\frac{u_{ij+1} - u_{ij}}{h} + \frac{u_{i+1j} - u_{ij}}{h} = x_i + y_j \Rightarrow u_{ij+1} + u_{i+1j} - 2u_{ij} = 0.5(x_i + y_j).$$

Kako je

$$x_0 = 0,\ x_1 = 0.5,\ x_2 = 1,\ \ y_0 = -1,\ y_1 = -0.5,\ y_2 = 0,$$

zbog rubnog uvjeta imamo

$$u_{00} = u_{20} = u_{10} = y_0 = -1,\ \ u_{01} = u_{21} = y_1 = -0.5,\ u_{02} = u_{22} = u_{12} = y_2 = 0.$$

Sada, za $i = j = 1$ imamo

$$u_{12} + u_{21} - 2u_{11} = 0.5(-0.5 + 0.5) \Rightarrow u_{11} = -0.25.$$