Zadatak 1 *Vjerojatnost da osoba ima lošu reakciju na injekciju nekog seruma je 0.001. Odredite vjerojatnost da od 2000 osoba točno 3 osobe imaju lošu reakciju na serum.*

Rješenje.

$$X \sim B(2000, 0.001) \Rightarrow X \sim P(2000 \cdot 0.001) = P(2) \Rightarrow P(X = 3) = \frac{2^3}{3!}e^{-2} = 0.18$$

Zadatak 2 *Za koje* $a \in \mathbf{R}$ *je funkcija* $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{10} + \frac{1}{4}, & -2 < x \leq 0 \\ a, & 0 < x \leq 1 \\ 0, & \textit{inače} \end{cases}$ *funkcija gustoće vjerojatnosti neke slučajne varijable? Izračunajte* $P(-1 < X \leq 0.5)$.

Rješenje.

$$\int_{-\infty}^{-2} 0dx + \int_{-2}^{0} \left(\frac{x}{10} + \frac{1}{4}\right) dx + \int_{0}^{1} adx + \int_{1}^{\infty} 0dx = 1$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{20}\bigg|_{-2}^{0} + \frac{x}{4}\bigg|_{-2}^{0} + ax\bigg|_{0}^{1} = 1 \Rightarrow a = \frac{7}{10}$$

$$x \leq -2, \qquad F(x) = \int_{-\infty}^{x} 0dt = 0$$

$$-2 \leq x \leq 0, \qquad F(x) = 0 + \int_{-2}^{x} \left(\frac{t}{10} + \frac{1}{4}\right) dt = \left(\frac{t^2}{20} + \frac{t}{4}\right)\bigg|_{-2}^{x} = \frac{x^2}{20} + \frac{x}{4} + \frac{3}{10}$$

$$0 \leq x \leq 1, \qquad F(x) = \frac{3}{10} + \int_{0}^{x} \frac{7}{10}dt = \frac{3}{10} + \frac{7x}{10}$$

$$x \geq 1 F(x) = 1$$

$$\Rightarrow P(-1 < X \leq 0.5) = F(0.5) - F(-1) = \frac{3}{10} + \frac{7 \cdot 0.5}{10} - \frac{1}{20} + \frac{1}{4} - \frac{3}{10} = 0.55$$

Zadatak 3 *Tijekom 50 dana bilježen je broj prometnih nesreća na nekom križanju. Rezultati su dani u tablici. Možemo li, uz razinu značajnosti* 0.01*, zaključiti da je prosječni broj nesreća na tom križanju manji od 2?*

broj nesreća u 1 danu	0	1	2	3	4	5
broj dana	10	13	16	5	4	2

Rješenje.

$$H_0 : \mu = 2$$
$$H_1 : \mu < 2$$

$$\bar{x}_5 = 1.72,\ s_{50}^2 = 1.79755 \Rightarrow s_{50} = 1.34073 \Rightarrow T = \frac{1.72 - 2}{1.34073} \cdot \sqrt{50} = -1.47673$$

$$t_{0.01}(49) = 2.32635 \Rightarrow -t_{0.01}(49) < T$$

$\Rightarrow H_0$ ne odbacujemo, tj. broj nesreća na tom križanju nije manji od 2.

Zadatak 4 *Jedan je košarkaš od* 100 *slobodnih bacanja pogodio* 80*, a drugi je od* 200 *pogodio* 140*. Postoji li, uz razinu značajnosti* $\alpha = 0.05$*, razlika u preciznosti ovih košarkaša?* *(15)*

Rješenje.

$$H_0 : p_1 = p_2$$
$$H_1 : p_1 \neq p_2$$

$$\hat{p}_1 = 0.8,\ \hat{p}_2 = 0.7,\ \hat{p} = \frac{100 \cdot 0.8 + 200 \cdot 0.7}{300} = 0.73,\ Z = \frac{0.8 - 0.7}{\sqrt{0.73 \cdot 0.27}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{100} + \frac{1}{200}}} = 1.84$$

$$\Phi_0(z_{0.025}) = 0.475 \Rightarrow z_{0.025} = 1.96 \Rightarrow z_{0.025} > Z$$

$\Rightarrow H_0$ ne odbacujemo, tj. ne postoji razlika u preciznosti ovih košarkaša.

Zadatak 5 *Izvedeno je po 3 gađanja na 20 meta, pri čemu je u tablicu bilježen broj pogodaka X. Možemo li, uz razinu značajnosti 0.05, zaključiti da broj pogodaka u metu ima binomnu distribuciju?*

x_i	0	1	2	3
f_i	2	4	6	8

Rješenje.

$$p = \frac{40}{60} = 0.67,\ X \sim B(3; 0.67)$$

$$f_1' = 20 \cdot \binom{3}{0} 0.67^0 \cdot 0.33^3 = 0.71874, \qquad f_2' = 20 \cdot \binom{3}{1} 0.67^1 \cdot 0.33^2 = 4.37778,$$
$$f_3' = 20 \cdot \binom{3}{2} 0.67^2 \cdot 0.33^1 = 8.88822, \qquad f_4' = 20 \cdot \binom{3}{3} 0.67^3 \cdot 0.33^0 = 6.01526.$$

$$H = \frac{(6 - 5.09652)^2}{5.09652} + \frac{(6 - 8.88822)^2}{8.88822} + \frac{(8 - 6.01526)^2}{6.01526} = 1.7536$$
$$\chi^2_{0.05}(3 - 1 - 1) = 3.8,\ H < \chi^2_{0.05}(1)$$

$\Rightarrow$ broj pogodaka u metu ima binomu distribuciju.

Zadatak 6 *Tri kemičara trebala su odrediti postotak kalcija u nekom kemijskom spoju. Svaki kemičar dao je 3 procjene (rezultati su u tablici):*

kemičar	*postotak kalcija*		
1	84.99	84.04	84.38
2	85.15	85.13	84.88
3	84.72	84.48	85.16

Da li se, uz razinu značajnosti $\alpha = 0.05$, procjene ova 3 kemičara razlikuju?

Rješenje.

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$$
$$\bar{x}_1 = 84.47,\ \bar{x}_2 = 85.05,\ \bar{x}_3 = 84.79,\ \bar{x} = 84.77$$
$$SST = 0.5064,\ SSE = 0.7518,\ MST = 0.2532,\ MSE = 0.1253 \Rightarrow F = 2.02075$$

$f_{0.05}(2, 6) = 5.14 \Rightarrow F < f_{0.05}(2, 6) \Rightarrow H_0$ ne odbacujemo, tj. procjene kemičara se ne razlikuju.

Zadatak 7 *Posađeno je po 1 stablo na 5 različitih parcela, sa različitom količinom vodenog taloga. Poslije godinu dana izmjerena je visina stabla Y_i u kraju u kojem je količina vodenog taloga x_i, a rezultati su dani u tablici:*

x_i	8	12	14	16	18
Y_i	30	34	40	43	46

Procijenite pravac regresije na osnovi ovih podataka, 95% pouzdan interval za koeficijent pravca regresije i testirajte je li koeficijent korelacije jednak nuli ($\alpha = 0.05$).

Rješenje.

$$\bar{x} = 13.6,\ 38.6,\ S_x^2 = 14.8,\ s_{xy})24.8,\ s_y^2 = 42.8 \Rightarrow \hat{\alpha} = \frac{24.8}{14.8} = 1.68, \hat{\beta} = 38.6 - 1.68 \cdot 13.6 = 15.752$$
$$y = 1.68x + 15.752$$
$$SSE = (30 - 29.192)^2 + (34 - 35.912)^2 + (40 - 39.245)^2 + (43 - 42.632)^2 + (46 - 45.992)^2 = 5.014$$
$$\sigma = 1.29267,\ t_{0.025}(3) = 3.18245$$
$$1.68 - 3.18245 \cdot \frac{1.29267}{\sqrt{4 \cdot 14.8}} \leq \alpha \leq 1.68 + 3.18245 \cdot \frac{1.29267}{\sqrt{4 \cdot 14.8}} \Rightarrow 1.14533 \leq \alpha \leq 2.21467$$

$$H_0 : \rho = 0$$
$$H_1 : \rho \neq 0$$
$$R = \frac{24.8}{3.85 \cdot 6.54} = 0.9849 \Rightarrow Z = \frac{0.9849}{\sqrt{1 - 0.9849^2}} \cdot \sqrt{3} = 9.8536011 > t_{0.025}(3)$$

$\Rightarrow H_0$ odbacujemo, tj. korelacija postoji ($\neq 0$)