Zadatak 1 *Podaci navedeni u tablici su vremenski intervali (u sekundama) između nailaska prvih 21 vozila na određeno križanje na autoputu Kwinana u Perthu.*

5	8	2	1	8	2	3	5	1	3
4	5	2	10	1	5	1	6	14	3

(a) *Nacrtajte stem-and-leaf dijagram za te podataka.*

(b) *Odredite karakterističnu petorku tih podataka, izračunajte raspon i interkvartil uzorka.*

(c) *Izračunajte aritmetičku sredinu, uzoračku varijancu i standardnu devijaciju.*

(d) *Grupirajte podatke u razrede i nacrtajte histogram uzorka.*

Rješenje.

(a)

steam	leaf
0	11112223333455555688
1	04

(b)

$$x_{(1)} = 1,\ x_{(20)} = 14,\ d = 13,\ m = \frac{x_{(10)} + x_{(11)}}{2} = \frac{3+4}{2} = 3.5,$$

$$q_L = x_{(\frac{21}{4})} = x_{(5)} + \frac{1}{4}(x_{(6)} - x_{(5)}) = 2,$$

$$q_U = x_{(\frac{63}{4})} = x_{(15)} + \frac{3}{4}(x_{(16)} - x_{(15)}) = 5 + \frac{3}{4} = 5.75,\ d_q = 5.75 - 2 = 3.75,$$

Karakteristična petorka: $(1, 2, 3.5, 5.75, 14)$.

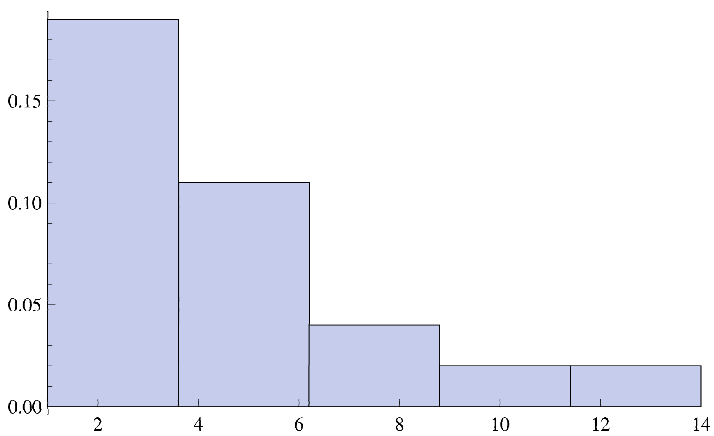
(c)

$$\bar{x} = \frac{1}{20}(4 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 4 + 4 \cdot 5 + 6 + 2 \cdot 8 + 10 + 14) = 4.45,$$

$$s^2 = \frac{1}{19}(4 \cdot 1^2 + 3 \cdot 2^2 + 442^2 + 3 \cdot 3^2 + 4^2 + 4 \cdot 5^2 + 6^2 + 2 \cdot 8^2 + 10^2 + 14^2 - 20 \cdot 4.45^2) = 11.7, \quad s = 3,43$$

(d) $k = 5,\ c = \frac{14-1}{5} = 2.6$

razredi	f_i	relativna frekvencija razreda
$[1, 3.6]$	10	0.19
$[3.6, 6.2]$	6	0.11
$[6.2, 8.8]$	2	0.04
$[8.8, 11.4]$	1	0.02
$[11.4, 14]$	1	0.02



Slika 1:

Zadatak 2 *U svrhu istraživanja ovisnosti raka pluća o pušenju, sprovedeno je sljedeće istraživanje. Za 9 zemalja prikupljeni su podaci o stopi smrtnosti muške populacije od raka pluća u godini 1950., te podaci o potrošnji cigareta* per capita *u 1930. godini. Podaci se nalaze u tablici.*

država	*Island*	*Norveška*	*Švedska*	*Kanada*	*Danska*	*Australija*	*SAD*	*Nizozemska*	*Švicarska*
cigarete	*220*	*250*	*310*	*510*	*380*	*455*	*1280*	*460*	*530*
stopa smrtnosti od raka	*58*	*90*	*115*	*150*	*165*	*170*	*190*	*245*	*250*

(a) *Procijenite pravac regresije za dane podatke. Nacrtajte procijenjeni pravac. Kolika je potrošnja cigareta ako je stopa smrtnosti muške populacije od raka pluća* 120*?*

(b) *Izračunajte Pearsonov koefcijent korelacije od X i Y . Prokomentirajte njegovu vrijednost.*

Rješenje.

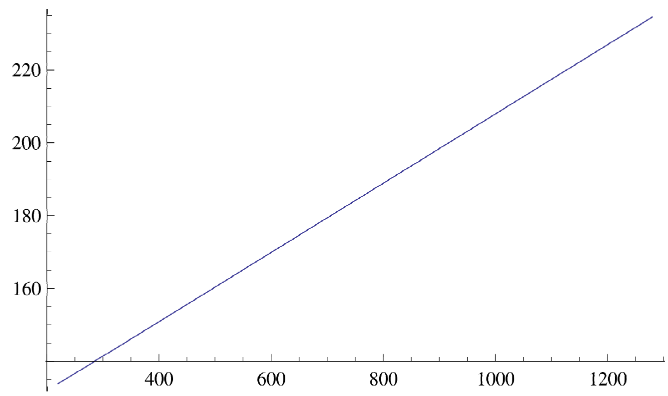
(a)

$$\bar{x} = 488.33,\ \bar{y} = 159.22,$$

$$s_x^2 = \frac{1}{8}(2949425 - 9 \cdot 488.33^2) = 100403.66,\ s_y^2 = \frac{1}{8}(261939 - 9 \cdot 159.22^2) = 4222.49,$$

$$s_{xy} = \frac{1}{8}(775860 - 9 \cdot 488.33 \cdot 159.22) = 9511.61,$$

$$\beta = \frac{9511.61}{100403.66} = 0.095,\ \alpha = 159.22 - 0.095 \cdot 488.33 = 112.96 \Rightarrow y = 0.095x + 112.96.$$



Slika 2:

(b)

$$r = \frac{9511.61}{316.86 \cdot 64.98} = 0.46195 > 0$$

$\Rightarrow$ pozitivna korelacija (kad x raste, y raste)

Zadatak 3 *Slučajan pokus sastoji se od bacanja simetričnog novčića tri puta za redom. Izračunajte vjerojatnost da je glava pala više puta nego pismo ako znamo da je prvo palo pismo.*

Rješenje.

A = glava je pala više puta nego pismo = $\{ggp, gpg, pgg\}$,

B = prvo je palo pismo = $\{ppp, ppg, pgp, pgg\}$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{k(A \cap B)}{k(\Omega)}}{\frac{k(B)}{k(\Omega)}} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{4}{8}} = \frac{1}{4}.$$

Zadatak 4 *Ptica slijeće u slučajno izabrano gnijezdo od ukupno tri gnijezda koja su joj na raspolaganju. Svako gnijezdo sadrži dva jaja i to: u prvom gnijezdu su oba jaja zdrava, u drugom je jedno zdravo i jedan mućak, a u trećem su oba jaja mućka. Nadite vjerojatnost da ptica sjedi na mućku. Ako je sjela na mućak, kolika je vjerojatnost da sjedi u drugom gnijezdu?*

Rješenje. H_1 = odabrano je prvo gnijezdo, H_2 = odabrano je drugo gnijezdo, H_3 = odabrano je treće gnijezdo $\Rightarrow P(H_1) = P(H_2) = P(H_3) = \frac{1}{3}$

A = ptica sijedi na mućku $\Rightarrow P(A|H_1) = 0,\ P(A|H_2) = 0.5,\ P(A|H_3) = 1$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{1}{3} \cdot 0.5 + \frac{1}{3} \cdot 1 = 0.5$$

$$\Rightarrow P(H_2|A) = \frac{\frac{1}{3} \cdot 0.5}{0.5} = \frac{1}{3}.$$

Zadatak 5 *Biramo slučajno troznamenkasti broj. Slučajna varijabla registrira broj jedinica u zapisu broja. Opišite X. Odredite očekivanje.*

Rješenje.

$$P(X=0) = \frac{8 \cdot 9 \cdot 9}{9 \cdot 10 \cdot 10} = \frac{18}{25},\ P(X=1) = \frac{9 \cdot 9 + 8 \cdot 9 + 8 \cdot 9}{9 \cdot 10 \cdot 10} = \frac{1}{4},\ P(X=2) = \frac{9+9+8}{9 \cdot 10 \cdot 10} = \frac{13}{450},$$

$$P(X=3) = \frac{1}{9 \cdot 10 \cdot 10} = \frac{1}{900}, \Rightarrow E[X] = \frac{14}{45} = 0.3111$$

Zadatak 6 *Neka je X slučajna varijabla koja broji sinove u obiteljima s 4 djece. Odredite vjerojatnost da u obitelji bude neparan broj kćeri.*

Rješenje. $X \sim B(4, 0.5)$

$$P(X=0) = \binom{4}{0} \cdot 0.5^0 \cdot 0.5^4 = 0.0625 = P(X=4)$$

$$P(X=1) = \binom{4}{1} \cdot 0.5^1 \cdot 0.5^3 = 0.25 = P(X=3)$$

$$P(X=2) = \binom{4}{2} \cdot 0.5^2 \cdot 0.5^2 = 0.375$$

A =u obitelji ima neparan broj kćeri $\Rightarrow P(A) = P(X=1) + P(X=3) = 0.0625 + 0.25 = 0.3125.$

Zadatak 7 *Tvornica u jednoj smjeni proizvede 10000 komada nekog proizvoda. Vjerojatnost da je proizvod neispravan je 0.05. Izračunajte vjerojatnost da u jednoj smjeni broj ispravnih proizvoda bude veći od 9450 a manji od 9520.*

Rješenje. X =broj neispravnih proizvoda, Y =broj ispravnih proizvoda

$$\Rightarrow X \sim B(10000, 0.05), Y \sim B(10000, 0.95)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow P(9450 \leq Y \leq 9520) &= P\left(\frac{9449.5 - 10000 \cdot 0.95}{\sqrt{10000 \cdot 0.95 \cdot 0.05}} \leq Y^* \leq \frac{9520.5 - 10000 \cdot 0.95}{\sqrt{10000 \cdot 0.95 \cdot 0.05}}\right) \\ &= P(-2.32 \leq Y^* \leq 0.94) = \Phi_0(0.94) + \Phi_0(2.32) = 0.8164 \end{aligned}$$

Zadatak 8 *Za koje $a \in \mathbf{R}$ je funkcija $f(x) = \begin{cases} x+1, & -1 \leq x < 0 \\ a\left(1 - \frac{x}{2}\right), & 1 \leq x \leq 2 \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$ funkcija gustoće vjerojatnosti neke slučajne varijable? Izračunajte $P(|X-1| \leq 3)$.*

Rješenje.

$$\int_{-\infty}^{-1} 0dx + \int_{-1}^{0} (x+1)\,dx + \int_{0}^{1} 0dx + \int_{1}^{2} a\left(1-\frac{x}{2}\right)dx + \int_{2}^{\infty} 0dx = 1$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{2}\Big|_{-1}^{0} + x\Big|_{-1}^{0} + a\Big|_{1}^{2} - a\frac{x^2}{4}\Big|_{1}^{2} = 1 \Rightarrow a = 2$$

$$\begin{aligned}
x \le -1, &\qquad F(x) = \int_{-\infty}^{x} 0dt = 0 \\
-1 \le x \le 0, &\qquad F(x) = 0 + \int_{-1}^{x} (t+1)\,dt = \left(\frac{t^2}{2}+t\right)\Big|_{-1}^{x} = \frac{x^2}{2} + x + \frac{1}{2} \\
0 \le x \le 1, &\qquad F(x) = \frac{1}{2} + \int_{0}^{x} 0dt = \frac{1}{2} \\
1 \le x \le 2, &\qquad F(x) = \frac{1}{2} + \int_{1}^{x} (2-t)dt = -\frac{1}{2}x^2 + 2x - 1 \\
x \ge 1, &\qquad F(x) = 1
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow P(|X-1| \le 3) = P(-2 \le X \le 4) = F(4) - F(-2) = 1 - 0 = 1$$

Zadatak 9 *Među 5000 beba rođenih prošle godine bilo je 2596 dječaka. Možemo li na osnovi tog uzorka, uz razinu značajnosti $\alpha = 0.01$, zaključiti da je vjerojatnost rođenja dječaka i djevojčica jednaka? Odredite 95% pouzdan interval za vjerojatnost rođenja dječaka.*

Rješenje.

$$H_0 : p = 1/2$$
$$H_1 : p \neq 1/2$$

$$\bar{x}_{5000} = \hat{p} = \frac{2596}{5000} = 0.5192 \Rightarrow Z = \frac{0.5192 - 0.5}{\sqrt{0.5 \cdot 0.5}} \cdot \sqrt{5000} = 2.71529$$

$$z_{0.005} = 2.575 \Rightarrow Z > z_{0.005}$$

$\Rightarrow H_0$ odbacujemo, tj.vjerojatnost rođenja dječaka i djevojčica nije jednaka.

Zadatak 10 *Mjeren je dobitak na težini (u gramima) tijekom 24 sata 11 pilića koji su hranjeni hranom bogatom proteinima te 11 pilića koji su hranjeni običnom hranom. Dobiveni su sljedeći podaci:*

"proteinska" hrana	134	146	104	119	124	161	107	83	113	129	97
"obična" hrana	122	95	127	112	85	107	121	116	103	143	130

Možemo li, uz razinu značajnosti $\alpha = 0.02$, zaključiti da su standardne devijacije dobitka na težini jednake u ove dvije populacije?

Rješenje.

$$H_0 : \sigma_1 = \sigma_2$$
$$H_1 : \sigma_1 \neq \sigma_2$$

$$\bar{x}_1 = \frac{1317}{11} = 119.727,\ s_1^2 = \frac{27622}{55} = 502.218,\ \bar{x}_2 = \frac{1261}{11} = 114.636, s_2^2 = \frac{3030}{11} = 275.455,$$

$$F = \frac{502.218}{275.455} = 1.82323$$

$$f_{0.01}(10,10) = 4.85 \Rightarrow f_{0.99}(10,10) = \frac{1}{4.85} = 0.206186 < F$$

$\Rightarrow H_0$ ne odbacujemo, tj. standardne devijacije su jednake.

Zadatak 11 *Mljekara proizvodi 4 vrste jogurta: obični, voćni, kefir i acidofil. Obični jogurt proizvodi se 3 puta više nego voćni, voćni jogurt i kefir proizvode se u jednakim količinama, a acidofila se proizvodi 3 puta manje nego kefira. U tablici je dana registrirana prodaja po vrstama. Odgovara li, uz razinu značajnosti $\alpha = 0.05$, struktura proizvodnje strukturi prodaje?*

VRSTA JOGURTA	*OBIČNI*	*VOĆNI*	*KEFIR*	*ACIDOFIL*
PRODANO KOMADA	315	101	108	32

Rješenje. OBIČNI : VOĆNI : KEFIR : ACIDOFIL= 9 : 3 : 3 : 1

$$f_1' = 556 \cdot \frac{9}{16} = 312.75,\ f_2' = 556 \cdot \frac{3}{16} = f_3' = 104.25,\ f_4' = 556 \cdot \frac{1}{16} = 34.75.$$

$$H = \frac{(315-312.75)^2}{312.75} + \frac{(101-104.25)^2}{104.25} + \frac{(108-104.25)^2}{104.25} + \frac{(32-34.75)^2}{34.75} = 0.471$$

$$\chi^2_{0.05}(4-1) = 7.81,\ H < \chi^2_{0.05}(3)$$

$\Rightarrow$ struktura proizvodnje odgovara strukturi prodaji.

Zadatak 12 *3 različita stroja proizvode istu vrstu vijaka. Duljine vijaka (u mm) dane su u tablici. Možemo li, uz razinu značajnosti $\alpha = 0.05$, zaključiti da duljina vijka ovisi o stroju koji ga je proizveo?*

stroj	*duljina*	*vijka*		
A	380	376	360	368
B	354	360	362	–
C	376	344	342	372

Rješenje.

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$$

$$\bar{x}_1 = 371,\ \bar{x}_2 = 358.667,\ \bar{x}_3 = 358.5,\ \bar{x} = 363.091$$

$$SST = 393.242,\ SSE = 1241.67,\ MST = 196.621,\ MSE = 155.209 \Rightarrow F = 1.26682$$

$f_{0.05}(2,8) = 4.46 \Rightarrow F < f_{0.05}(2,8) \Rightarrow H_0$ ne odbacujemo, tj. duljina vijka ne ovisi o stroju koji ga je proizveo.

Zadatak 13 *U tablici su dane potrošnja pare (u kg) neke tvornice i prosječna vanjska temperatura pojedinog mjeseca. Postoji li, uz razinu značajnosti* 0.05*, linearna veza između tog dvoje (potrošnje pare i prosječne mjesečne temperature)?*

MJ.	*SIJ.*	*VELJ.*	*OŽUJ.*	*TRAV.*	*SVIB.*	*LIP.*
TEMP.	21	24	32	47	50	59
POTR.	186	215	288	425	455	539

Rješenje.

$$H_0 : \alpha = 0$$
$$H_1 : \alpha \neq 0$$

$$\bar{x} = 38.83,\ \bar{y} = 351.333,\ s_x^2 = 236.567,\ s_{xy} = 2189.47$$

$$\Rightarrow \hat{\alpha} = \frac{2189.47}{236.567} = 9.25518,\ \hat{\beta} = 351.333 - 9.25518 \cdot 38.83 = -8.07609$$

$$y = 9.25518x - 8.07609$$

$$\hat{\sigma} = 1.20541,\ t_{0.025}(4) = 2.776$$

$$\Rightarrow T = \frac{9.25518}{1.20541} \cdot \sqrt{5 \cdot \frac{7097}{30}} = 264.066 > t_{0.025}(4)$$

$\Rightarrow H_0$ odbacujemo, tj. postoji linearna veza