Zadatak 1 *Za funkciju* $f(x) = \sin 2x$ *poznate su vrijednosti* $f(0)$ *i* $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$. *Odredite* $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$:

a) Hermiteovom metodom ako je još poznato i $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$, *(15)*

b) koristeći kubni splajn ako su poznate vrijednosti $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$, $f''(0)$ *i* $f''\left(\frac{\pi}{2}\right)$, *(15)*

c) numeričkim diferenciranjem ako je poznata vrijednost $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$. *(10)*

Izračunajte pravu grešku u sva tri slučaja.

Rješenje. a) $f'(x) = 2\cos 2x$

x_i	y_i	$f^{[1]}$	$f^{[2]}$
$x_{-1} = \frac{\pi}{2}$	$y_{-1} = ?$		
		$f'(x_{-1}) = ?$	
$x_{-1} = \frac{\pi}{2}$	$y_{-1} = ?$		$f[x_{-1}, x_{-1}, x_0] = ?$
		$f[x_{-1}, x_0] = ?$	
$x_0 = 0$	$y_0 = 0$		$f[x_{-1}, x_0, x_1] = ?$
		$f[x_0, x_1] = 1.27324$	
$x_1 = \frac{\pi}{4}$	$y_1 = 1$		$f[x_0, x_1, x_1] = -1.62114$
		$f'(x_1) = 0$	
$x_1 = \frac{\pi}{4}$	$y_1 = 1$		

$$\frac{1.27324 - f[x_{-1}, x_0]}{-\frac{\pi}{4}} = -1.62114 \Rightarrow f[x_{-1}, x_0] = 0$$

$$\Rightarrow \frac{0 - f'(x_{-1})}{-\frac{\pi}{2}} = -1.62114 \Rightarrow f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2.54648.$$

Kako je prava vrijednost $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2$ za pravu grešku imamo $|-2.54648 + 2| = 0.54648$.

b)

x_i	y_i	$f[x_i, x_{i+1}]$
$x_0 = 0$	$y_0 = 0$	
		$f[x_0, x_1] = \frac{4}{\pi}$
$x_1 = \frac{\pi}{4}$	$y_1 = 1$	
		$f[x_1, x_2] = -\frac{4}{\pi}$
$x_2 = \frac{\pi}{2}$	$y_2 = 0$	

$$\Rightarrow s_0 + 4s_1 + s_2 = 0.$$

Kako je i $f''(x) = -4\sin 2x$ imamo

$$2s_0 + s_1 = \frac{12}{\pi},$$

$$s_1 + 2s_2 = -\frac{12}{\pi}.$$

Rješenje sustava je $s_2 = -1.90986$, a prava grška $|-1.90986 + 2| = 0.09014$.

c)

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2 \cdot \frac{\pi}{4}}\left(f(0) - 4 \cdot f\left(\frac{\pi}{4}\right) + 3 \cdot f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = -2.54648.$$

Prava greška: $|-2.54648 + 2| = 0.54648$.

Zadatak 2 *Simpsonovom metodom s točnošću većom od* 10^{-4} *izračunajte* $\int_2^3 \ln\frac{x}{2}dx$. *Odredite pravu grešku.* *(15)*

Rješenje.

$$f(x) = \ln\frac{x}{2} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f''(x) = -\frac{1}{x^2} \Rightarrow f'''(x) = \frac{2}{x^3} \Rightarrow f^{iv}(x) = -\frac{6}{x^4}$$

$$\Rightarrow M_4 = f(2) = 0.375 \Rightarrow \frac{1}{180} \cdot 0.375h^4 < 10^{-4} \Rightarrow 2n > 2.136 \Rightarrow 2n = 4.$$

x_i	$f(x_i)$
$x_0 = 2$	$f(x_0) = 0$
$x_1 = 2.25$	$f(x_1) = 0.11778$
$x_2 = 2.5$	$f(x_2) = 0.22314$
$x_3 = 2.75$	$f(x_3) = 0.31845$
$x_4 = 3$	$f(x_4) = 0.40546$

$$\Rightarrow I_4 = \frac{1}{12}(0 + 4(0.11778 + 0.31845) + 2 \cdot 0.22314 + 0.40546) = 0.21639.$$

Kako je $\int_2^3 \ln\frac{x}{2}dx = x\ln\frac{x}{2}\Big|_2^3 - \int_2^3 dx = 0.21639$, prava greška je $|0.21639 - 0.21639| = 0$.

Zadatak 3 *Koristeći Laplaceovu transformaciju odredite rješenje diferencijalne jednadžbe $x''(t) + x(t) = 3 - 3\cos 2t$ uz početne uvjete $x(0) = 4, x'(0) = 0$.* *(15)*

Rješenje.

$$\mathcal{L}(x'') = p^2X - px_0 - x_0' = p^2X - 4p \Rightarrow p^2X - 4p + X = \frac{3}{p} - \frac{3p}{p^2+4}$$

$$\Rightarrow X = \frac{4p^4 + 16p^2 + 12}{p(p^2+1)(p^2+4)} = \frac{4p^2+12}{p(p^2+4)} = \frac{3}{p} + \frac{p}{p^2+4}$$

$$\Rightarrow x(t) = 3 + \cos 2t.$$

Zadatak 4 *Diferencijalnu jednadžbu $y' = \frac{x}{y}$, $y(0) = 1$ na intervalu $[0,1]$ s korakom $h = 0.5$ približno riješite modificiranom Eulerovom metodom, te Picardovom metodom u dvije iteracije i ocjenite koja je metoda točnija u točki $x = 1$ (izračunajte pravu grešku).* *(15)*

Rješenje. Pravo rješenje:

$$ydy = xdx \Rightarrow \frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + C \Rightarrow C = \frac{1}{2} \Rightarrow y = \sqrt{x^2+1} \Rightarrow y(1) = 1.41421.$$

Picardova metoda:

$$y_1(x) = 1 + \int_0^x xdx = 1 + \frac{x^2}{2} \Rightarrow y_2(x) = 1 + \int_0^x \frac{x}{1+\frac{x^2}{2}}dx = 1 + \ln(2+x^2) \Rightarrow y_2(1) = 1.40546.$$

Prava greška: $|1.40546 - 1.41421| = 0.00875$.

Modificirana Eulerova metoda:

$$x_0 + \frac{h}{2} = 0.25, y_0 + \frac{h\frac{x_0}{y_0}}{2} = 1 \Rightarrow \triangle y_0 = 0.5 \cdot \frac{0.25}{1} = 0.125 \Rightarrow y_1 = 1.125$$

$$x_1 + \frac{h}{2} = 0.75, y_1 + \frac{h\frac{x_1}{y_1}}{2} = 1.23611 \Rightarrow \triangle y_1 = 0.5 \cdot \frac{0.75}{1.23611} = 0.125 \Rightarrow y_2 = 1.42837$$

Prava greška: $|1.42837 - 1.41421| = 0.01416$.

Točnija je modificirana Eulerova metoda.

Zadatak 5 *Metodom zlatnog reza s greškom manjom od $\varepsilon = 0.5$ odredite minimum funkcije $f(x) = x^2 + \frac{4}{x}$ na intervalu $[1,2]$.* *(15)*

Rješenje. Kako je $a^{(0)} = 1$ i $c^{(0)} = 2$ imamo

$$\frac{b^{(0)} - 1}{1} = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \Rightarrow b^{(0)} = 1.38197.$$

Kako je još

$$f(a^{(0)}) = f(1) = 5, \quad f(c^{(0)}) = f(2) = 6, \quad f(b^{(0)}) = 4.80426$$

$$\Rightarrow f(b^{(0)}) < f(a^{(0)}) \text{ i } f(b^{(0)}) < f(c^{(0)}),$$

početne su točke dobro odabrane.

Sada,

$$x^{(0)} = c^{(0)} + a^{(0)} - b^{(0)} = 1.61803, \quad f(x^{(0)}) = 5.09017 > f(b^{(0)})$$

$$\Rightarrow a^{(1)} = 1, \quad b^{(1)} = a^{(0)} + x^{(0)} - b^{(0)} = 1.23607, \quad c^{(1)} = 1.61803, \quad |c^{(1)} - a^{(1)}| = 0.61803 > 0.5$$

$$\Rightarrow x^{(1)} = c^{(1)} + a^{(1)} - b^{(1)} = 1.38197, \quad f(x^{(1)}) = 4.80426 > f(b^{(1)}) = 4.76393$$

$$\Rightarrow a^{(2)} = 1, \quad b^{(2)} = a^{(1)} + x^{(1)} - b^{(1)} = 1.1459, \quad c^{(2)} = 1.38197, \quad |c^{(2)} - a^{(2)}| = 0.38197 < 0.5$$

$$\Rightarrow x^* = (a^{(2)} + c^{(2)})/2 = 1.19098.$$