MATEMATIKA 2

seminari

studij: **Prehrambena tehnologija i Biotehnologija**

Sadržaj

1 Neodređeni integral

1.1 Pojam neodređenog integrala

Definicija 1 *Za funkciju $F : \langle a,b\rangle \to \mathbf{R}$ kažemo da je* **primitivna funkcija** *(antiderivacija) funkcije $f : \langle a,b\rangle \to \mathbf{R}$ ako je $F'(x) = f(x)$ za svaki $x \in \langle a,b\rangle$.*

Primjer 1 1. *Neka je $f(x) = x^3$. Provjerite da su $F_1(x) = \frac{1}{4}x^4$, $F_2(x) = \frac{1}{4}x^4 + 1$, $F_3(x) = \frac{1}{4}x^4 + \sqrt[4]{\pi}$ primitivne funkcije funkcije f.*

2. *Neka je $f(x) = \frac{1}{x}$. Pokažite da je funkcija $F(x) = \ln(C|x|)$ primitivna funkcija funkcije f za svaki $C > 0$.*

3. *Pokažite da je funkcija $F(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}}\right)$ primitivna funkcija funkcije $f(x) = \frac{1}{1+\cos^2 x}$ za $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$.*

Teorem 1 *Neka su $F, G : \langle a,b\rangle \to \mathbf{R}$ dvije primitivne funkcije funkcije $f : \langle a,b\rangle \to \mathbf{R}$, tj. $F'(x) = G'(x) = f(x)$ za svaki $x \in \langle a,b\rangle$. Tada postoji konstanta $C \in \mathbf{R}$ tako da je $G(x) = F(x) + C$ za svaki $x \in \langle a,b\rangle$.*

Rješenje: Slijedi iz Lagrangeovog teorema srednje vrijednosti primjenjenog na funkciju $H(x) = G(x) - F(x)$.

Definicija 2 *Skup svih primitivnih funkcija funkcije f zovemo* **neodređenim integralom** *i označavamo sa (v. Teorem 1):*

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

pri čemu je F bilo koja primitivna funkcija funkcije f. Kažemo da je $f(x)$ podintegralna funkcija, $f(x)dx$ podintegralni izraz, x varijabla integracije i C konstanta integracije.

Zadatak 1 *Odredite neodređene integrale a) $\int x^6\,dx$ b) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}}$ c) $\int \sin(3x)dx$.*

Rješenje: Deriviranjem desne strane jednakosti lako se provjeri da je
a) $\int x^6\,dx = \frac{1}{7}x^7 + C$. b) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$. c) $\int \sin(3x)dx = -\frac{1}{3}\cos(3x) + C$.

Zadatak 2 *Odredite neodređene integrale*
a) $\int e^{3x}\,dx$ *b)* $\int e^{5x+2}\,dx$ *c)* $\int \frac{dx}{x+2}$ *d)* $\int \frac{dx}{7x-3}$.

Rješenje:

$$a)\quad \int e^{3x}\,dx = \frac{1}{3}\int e^{3x}\,d(3x) = \frac{1}{3}e^{3x} + C$$

$$b)\quad \int e^{5x+2}\,dx = \frac{1}{5}\int e^{5x+2}\,d(5x+2) = \frac{1}{5}e^{5x+2} + C$$

$$c)\quad \int \frac{1}{x+2}\,dx = \int \frac{1}{x+2}\,d(x+2) = \ln|x+2| + C$$

$$d)\quad \int \frac{1}{7x-3}\,dx = \frac{1}{7}\int \frac{1}{7x-3}\,d(7x-3) = \frac{1}{7}\ln|7x-3| + C$$

1.2 Osnovna svojstva neodređenog integrala. Neposredna integracija

Osnovna svojstva neodređenog integrala su:

1. $d\int f(x)dx = f(x)dx \Leftrightarrow \left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$
   pr. $d\int \ln x dx = \ln x dx$.

2. $\int dF(x) = F(x) + C \Leftrightarrow \int F'(x)dx = F(x) + C$
   pr. $\int d(\sin x) = \sin x + C$

3. $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx, \quad k \in \mathbf{R}$
   pr. $\int \frac{3}{x}dx = 3\int \frac{dx}{x} = 3\ln|x| + C$

4. $\int (f_1(x) + f_2(x))dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx$
   pr. $\int (x^3 + 2^x - 1)dx = \int x^3 dx + \int 2^x dx - \int dx = \frac{x^4}{4} + \frac{2^x}{\ln 2} - x + C$

5. $$\int f(\phi(x))\phi'(x)\,dx = F(\phi(x)) + C \tag{1}$$
   pri čemu je $F'(x) = f(x)$.

Metoda neposredne integracije sastoji se u tome da korištenjem gornjih osnovnih svojstava neodređenog integrala neke neodređene integrale svedemo na tablične.

Zadatak 3

$$\int \frac{(1-x)^2}{x\sqrt{x}}dx = \int \frac{dx}{x\sqrt{x}} - 2\int \frac{x}{x\sqrt{x}}dx + \int \frac{x^2}{x\sqrt{x}} = -\frac{2}{\sqrt{x}} - 4\sqrt{x} + \frac{2}{3}x\sqrt{x} + C.$$

Zadatak 4

$$\int \frac{2x-3}{x^2-3x+5}dx = \left\{ \begin{array}{l} t = x^2-3x+5 \\ dt = (2x-3)dx \end{array} \right\} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|x^2-3x+5| + C.$$

Je li potrebna apsolutna vrijednost?

Zadatak 5

$$\int \frac{\cos x}{(1+\sin x)^3}dx = \left\{ \begin{array}{l} t = 1+\sin x \\ dt = \cos x dx \end{array} \right\} = \int \frac{dt}{t^3} = -\frac{1}{2t^2} + C = -\frac{1}{2(1+\sin x)^2} + C.$$

Zadatak 6 *(DZ)*

$$\begin{aligned} \int \frac{\cos 2x}{\sin^2 x \cos^2 x}dx &= \int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x}dx - \int \frac{\sin^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x}dx \\ &= \int \frac{dx}{\sin^2 x} - \int \frac{dx}{\cos^2 x} = -\operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x + C. \end{aligned}$$

Zadatak 7

$$\int \frac{x^2\, dx}{1+x^2} = \int \frac{x^2+1-1}{1+x^2}dx = \int dx - \int \frac{dx}{1+x^2} = x - \operatorname{arctg} x + C.$$

Zadatak 8

$$\int \frac{dx}{5+x^2} = \frac{1}{5}\int \frac{dx}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{5}\int \frac{d\left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right)}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{5}} + C.$$

Zadatak 9 *(DZ)*

$$\int \frac{x^2}{1+x^6}dx = \left\{ \begin{array}{c} t = x^3 \\ dt = 3x^2 dx \end{array} \right\} = \int \frac{dt}{3(1+t^2)} = \frac{1}{3}\operatorname{arctg} t + C = \frac{1}{3}\operatorname{arctg}(x^3) + C.$$

Zadatak 10

$$\int 5^{2-3x}dx = \int 5^{2-3x}\left(-\frac{1}{3}d(2-3x)\right) = \left\{ \begin{array}{l} t = 2-3x \\ dt = -3dx \end{array} \right\}$$

$$= -\frac{1}{3}\int 5^t dt = -\frac{1}{3}\frac{5^t}{\ln 5} + C = -\frac{1}{3}\frac{5^{2-3x}}{\ln 5} + C.$$

Zadatak 11

$$\int x\sqrt{2+x^2}dx = \left\{ \begin{array}{l} t = 2+x^2 \\ dt = 2xdx \end{array} \right\} = \int \sqrt{t}\frac{dt}{2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}t\sqrt{t} + C = \frac{1}{3}(2+x^2)\sqrt{2+x^2} + C.$$

Zadatak 12

$$\int \frac{\arcsin x + x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int \frac{\arcsin x dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \int \arcsin x d \arcsin x - \frac{1}{2}\int (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} d(1-x^2) = \frac{1}{2}\arcsin^2 x - \sqrt{1-x^2} + C.$$

Zadatak 13

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sin x} &= \int \frac{dx}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \int \frac{dx}{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}} = \int \frac{d(\operatorname{tg}\frac{x}{2})}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}} \\ &= \int d\left(\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|\right) = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C. \end{aligned}$$

Zadatak 14 *(DZ) Analognim transformacijam kao u prethodnom zadatku odredite a)* $\int \frac{dx}{\cos x}$ *b)* $\int \frac{dx}{1+\sin x}$ *c)* $\int \frac{dx}{1+\cos x}$.

1.3 Metoda supstitucije

Korištenjem formule za derivaciju kompozicije funkcija i formule za derivaciju inverzne funkcije dobije se:

$$\int f(x)\,dx = \left\{ \begin{array}{c} x = \varphi(t) \\ dx = \varphi'(t)dt \end{array} \right\} = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt.$$

Ili preciznije: Ako je $F(t)$ primitivna funkcija funkcije $f(\varphi(t))\varphi'(t)$, onda je $F(\varphi^{-1}(x))$ primitivna funkcija funkcije $f(x)$, odnosno $\int f(x)dx = F(\varphi^{-1}(x)) + C$ pri čemu je $F'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t)$.
Napomena: Usporedi formulu u metodi supstitucije sa (1) u osnovnim svojstvima neodređenog integrala.

Zadatak 15 *Riješite* $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$ *supstitucijom a)* $x = \frac{1}{t}$ *b)* $x = \operatorname{tg} t$.

Rješenje:

$$a) \quad \int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}} = \left\{ \begin{array}{c} x = \frac{1}{t} \\ dx = -\frac{1}{t^2}dt \end{array} \right\} = \int \frac{-\frac{dt}{t^2}}{\frac{1}{t}\sqrt{1+\frac{1}{t^2}}} = -\int \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}$$

$$= -\ln\left(t + \sqrt{1+t^2}\right) + C = -\ln\left(\frac{1}{x} + \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right) + C.$$

$$b) \quad \int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}} = \left\{ \begin{array}{c} x = \operatorname{tg} t \Rightarrow t = \operatorname{arctg} x \\ dx = \frac{dt}{\cos^2 t} \end{array} \right\} = \int \frac{\frac{dt}{\cos^2 t}}{\operatorname{tg} t\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 t}}$$

$$= \int \frac{dt}{\sin t} = \int \frac{d\left(\operatorname{tg} \frac{t}{2}\right)}{\operatorname{tg} \frac{t}{2}} = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{t}{2} \right| + C = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{\operatorname{arctg} x}{2} \right| + C.$$

□

Usporedite oblike primitivnih funkcija u prethodnom zadatku pod a) i b). S obzirom na Teorem 1 što zaključujete?

Zadatak 16 *Riješite korištenjem trig. supstitucije oblika* $x = a \sin t$ *a)* $\int \sqrt{2 - x^2} dx$ *b) (DZ)* $\int \sqrt{5 - x^2} dx$.

Rješenje:

a) $$\int \sqrt{2 - x^2} dx = \left\{ \begin{array}{c} x = \sqrt{2} \sin t \Rightarrow t = \arcsin \frac{x}{\sqrt{2}} \\ dx = \sqrt{2} \cos t dt \end{array} \right\} = \int \sqrt{2 - 2\sin^2 t} \sqrt{2} \cos t \, dt$$

$$= 2 \int \cos^2 t \, dt = \int (1 + \cos 2t) dt = t + \frac{1}{2} \sin 2t + C$$

$$= t + \sin t \sqrt{1 - \sin^2 t}) + C = \arcsin \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{x}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - \frac{x^2}{2}} + C = \arcsin \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} x \sqrt{2 - x^2} + C.$$

b) $$\int \sqrt{5 - x^2} dx = \left\{ \begin{array}{c} x = \sqrt{5} \sin t \Rightarrow t = \arcsin \frac{x}{\sqrt{5}} \\ dx = \sqrt{5} \cos t dt \end{array} \right\} = \int \sqrt{5 - 5\sin^2 t} \sqrt{5} \cos t \, dt$$

$$= 5 \int \cos^2 t \, dt = 5 \int \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = \frac{5}{2} \left(t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) + C$$

$$= \frac{5}{2} (t + \sin t \sqrt{1 - \sin^2 t}) + C = \frac{5}{2} \left(\arcsin \frac{x}{\sqrt{5}} + \frac{x}{\sqrt{5}} \sqrt{1 - \frac{x^2}{5}} \right) + C.$$

□

1.4 Metoda parcijalne integracije

Integrirajući formulu za deriviranje produkta funkcija dobije se formula parcijalne integracije izražena u sljedećem teoremu.

Teorem 2 *Neka su* f *i* g *neprekidno derivabilne na* $\langle a, b \rangle$. *Tada vrijedi sljedeća jednakost neodređenih integrala*

$$\int f(x) g'(x) dx = f(x) g(x) - \int g(x) f'(x) dx.$$

Pokrata: U primjeni formula parcijalne integracije se najčešće zapisuje u diferencijalnom obliku:

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

$$\boxed{\texttt{OBLICI:} \qquad \int P_n(x) \left\{ \begin{array}{c} e^{ax} \\ \sin \alpha x \\ \cos \beta x \end{array} \right\} dx.}$$

Zadatak 17 *Odredite a)* $\int x \sin(\pi x) dx$ *b)* $\int x^2 e^{-3x} dx$.

Rješenje:

$$a) \quad \int x \sin(\pi x) dx = \left\{ \begin{array}{c} u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = \sin(\pi x) dx \Rightarrow v = -\frac{1}{\pi} \cos(\pi x) \end{array} \right\}$$

$$= -\frac{1}{\pi} x \cos(\pi x) + \frac{1}{\pi} \int \cos(\pi x) dx = -\frac{1}{\pi} x \cos(\pi x) + \frac{1}{\pi^2} \sin(\pi x) + C.$$

$$b) \quad \int x^2 e^{-3x} dx = \left\{ \begin{array}{c} u = x^2 \Rightarrow du = 2x dx \\ dv = e^{-3x} dx \Rightarrow v = -\frac{1}{3} e^{-3x} \end{array} \right\} = -\frac{1}{3} x^2 e^{-3x} + \frac{2}{3} \int x e^{-3x} dx$$

$$= \left\{ \begin{array}{c} u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = e^{-3x} dx \Rightarrow v = -\frac{1}{3} e^{-3x} \end{array} \right\} = -\frac{1}{3} x^2 e^{-3x} + \frac{2}{3} \left[-\frac{1}{3} x e^{-3x} + \frac{1}{3} \int e^{-3x} dx \right]$$

$$= -\frac{1}{3} x^2 e^{-3x} - \frac{2}{9} x e^{-3x} - \frac{2}{27} e^{-3x} + C = -\frac{1}{3} e^{-3x} \left[x^2 + \frac{2}{3} x + \frac{2}{9} \right] + C.$$

$\square$

Zadatak 18 *(DZ) Odredite* $\int \frac{x^2 - 3x + 5}{e^{4x}} dx$ $\qquad \left(\ldots = -\frac{1}{32}(8x^2 - 20x + 35) e^{-4x} + C \right)$.

$$\boxed{\texttt{OBLICI:} \qquad \int P_n(x) \left\{ \begin{array}{c} \ln(ax) \\ \arcsin(\alpha x) \\ \mathrm{arctg}(\beta x) \end{array} \right\} dx.}$$

Zadatak 19 *Odredite a)* $\int x \ln 2x dx$ *b)* $\int \arcsin x dx$.

Rješenje:

$$a)\ \int x\ln(2x)dx = \left\{\begin{array}{c} u=\ln(2x) \Rightarrow du=\frac{dx}{x} \\ dv = xdx \Rightarrow v=\frac{x^2}{2}\end{array}\right\} = \frac{x^2}{2}\ln(2x) - \frac{1}{2}\int xdx = \frac{1}{2}x^2\ln(2x) - \frac{x^2}{4} + C.$$

$$b)\quad \int \arcsin x dx = \left\{\begin{array}{c} u=\arcsin x \Rightarrow du=\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ dv = dx \Rightarrow v=x\end{array}\right\} = x\arcsin x - \int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= x\arcsin x + \frac{1}{2}\int (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} d(1-x^2) = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C.$$

$\square$

''CIKLIČKA'' PARCIJALNA INTEGRACIJA

Zadatak 20 *Koristeći cikličku integraciju odredite*
a) $\int \sqrt{x^2-1}\,dx$ *b)* $\int \sqrt{x^2+1}\,dx$ *c)* $\int \sqrt{1-x^2}\,dx$.

Rješenje:

$$\begin{aligned}
a)\quad I &= \int \sqrt{x^2-1}\,dx = \int \frac{x^2-1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx = \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}\,dx - \int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx \\
&= \left\{\begin{array}{ll} u=x & dv=\frac{xdx}{\sqrt{x^2-1}} \\ du=dx & v=\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2-1)}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{2}\frac{(x^2-1)^{1/2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{x^2-1}\end{array}\right\} \\
&= x\sqrt{x^2-1} - \int \sqrt{x^2-1}\,dx - \ln|x+\sqrt{x^2-1}| \\
\Rightarrow\quad 2I &= x\sqrt{x^2-1} - \ln|x+\sqrt{x^2-1}| + C \\
I &= \frac{1}{2}x\sqrt{x^2-1} - \frac{1}{2}\ln|x+\sqrt{x^2-1}| + C
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b)\quad I &= \int \sqrt{x^2+1}\,dx = \int \frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}\,dx + \int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx \\
&= \left\{\begin{array}{ll} u=x & dv=\frac{xdx}{\sqrt{x^2+1}} \\ du=dx & v=\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2+1)}{\sqrt{x^2+1}} = \sqrt{x^2+1}\end{array}\right\} \\
&= x\sqrt{x^2+1} - \int \sqrt{x^2+1}\,dx + \ln(x+\sqrt{x^2+1}) \\
\Rightarrow\quad 2I &= x\sqrt{x^2+1} + \ln(x+\sqrt{x^2+1}) + C \\
I &= \frac{1}{2}x\sqrt{x^2+1} + \frac{1}{2}\ln(x+\sqrt{x^2+1}) + C
\end{aligned}$$

$$c)\quad I = \int \sqrt{1-x^2}\,dx = \int \frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx - \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx +$$

$$
\begin{aligned}
&= \left\{ \begin{array}{ll} u = x & dv = \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} \\ du = dx & v = -\frac{1}{2}\int \frac{d(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2} \end{array} \right\} \\
&= \arcsin x - \left(-x\sqrt{1-x^2} + \int \sqrt{1-x^2}\, dx \right) \\
\Rightarrow \quad 2I &= \arcsin x + x\sqrt{1-x^2} + C \\
I &= \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\arcsin x + C
\end{aligned}
$$

NAPOMENA: zadatak pod c) najbolje je riješiti metodom iz Zadatka 16 □

Zadatak 21 *(DZ) Odredite a)* $\int e^x \sin x dx$ *b)* $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{1+x^2}}$.

Rješenje:

$$
a) \quad I = \int e^x \sin x dx = \left\{ \begin{array}{c} u = \sin x \Rightarrow du = \cos x dx \\ dv = e^x dx \Rightarrow v = e^x \end{array} \right\} = e^x \sin x - \int e^x \cos x dx
$$

$$
= \left\{ \begin{array}{c} u = \cos x \Rightarrow du = -\sin x dx \\ dv = e^x dx \Rightarrow v = e^x \end{array} \right\} = e^x \sin x - \left[e^x \cos x + \int e^x \sin x dx \right]
$$

$$
= e^x \left[\sin x - \cos x\right] - I.
$$

Dobije se $I = e^x(\sin x - \cos x) - I$, što daje $I = \frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x) + C$.

$$
b) \quad I = \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1+x^2}} = \int x \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}} = \left\{ \begin{array}{c} u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}} \Rightarrow v = \sqrt{1+x^2} \end{array} \right\}
$$

$$
= x\sqrt{1+x^2} - \int \sqrt{1+x^2} dx = x\sqrt{1+x^2} - \int \frac{1+x^2}{\sqrt{1+x^2}} dx,
$$

dobije se $I = x\sqrt{1+x^2} - \ln(x + \sqrt{1+x^2}) - I$, što daje $I = \frac{1}{2}(x\sqrt{1+x^2} - \ln(x + \sqrt{1+x^2})) + C$. □

2 Određeni integral

2.1 Osnovni pojmovi

Neka je $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ ograničena funkcija. Subdivizija D intervala $[a, b]$ je konačan niz točaka $x_0, x_1, \ldots, x_n$ tako da je $D ... a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{i-1} < x_i \cdots < x_n = b$. Neka su dane međutočke $\bar{x}_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \ldots n$. Za navedene podatke definira se integralna (Riemannova) suma sa:

$$
S(D) = \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)(x_i - x_{i-1}).
$$

Definicija 3 *Fja f je integrabilna na $[a, b]$ ako postoji*

$$\lim_{\mathrm{m}(D)\to 0} S(D) = \lim_{\mathrm{m}(D)\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)(x_i - x_{i-1})$$

pri čemu je očica subdivizije $\mathrm{m}(D)$ *definirana sa* $\mathrm{m}(D) = \max\{x_i - x_{i-1}; i = 1, \ldots n\}$.

U tom slučaju navedeni limes označavamo sa $\int_a^b f(x)dx$.

Zadatak 22 *(DZ) Izračunajte približnu vrijednost od* $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ *koristeći ekvidistantnu subdiviziju sa* $n = 4$.

Rješenje:

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \approx \sum_{i=1}^{4} f(\bar{x}_i)(x_i - x_{i-1})$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{1+(1/4)^2} + \frac{1}{1+(1/2)^2} + \frac{1}{1+(3/4)^2} + \frac{1}{1+1^2}\right) = \frac{2449}{3400} \approx 0.72029.$$

Usporedite sa pravom vrijednošću $\pi/4$. □

Zadatak 23 *(DZ) Po definiciji određenog integrala izračunajte* $\int_0^1 x^2 dx$.

Rješenje: Koristimo ekvidistantnu subdiviziju intervala $[0, 1]$ i za međutočke biramo desne rubove podintervala ($\bar{x}_i = x_i$). Imamo:

$$\int_0^1 x^2 dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^{n} i^2 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{1}{3}$$

□

2.2 Newton-Leibnizova formula

Osnovna formula određenog integrala je Newton-Leibnizova formula koja predstavlja analitički izraz kojim se uspostavlja veza između određenog integrala i primitivne funkcije, tj.

Teorem 3 *Ako je funkcija $f(x)$ integrabilna na intervalu $[a, b]$ i ima na tom intervalu primitivnu funkciju $F(x)$, tj. $F'(x) = f(x)$, tada je vrijednost određenog integrala jednaka razlici vrijednosti primitivne funkcije za gornju i donju granicu integrala, tj.*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Zadatak 24

$$\int_{-1}^{1}(2x^2 - x^3)dx = \left(\frac{2x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right)\Big|_{-1}^{1} = \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{4}\right) - \left(-\frac{2}{3} - \frac{1}{4}\right) = \frac{4}{3}$$

Zadatak 25

$$\int_{-2}^{2}\frac{dx}{x^2+4} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}\Big|_{-2}^{2} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}1 - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}(-1) = \frac{1}{2}\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}$$

Zadatak 26

$$\int_{\pi/2}^{3\pi/4}\sin x dx = -\cos x\Big|_{\pi/2}^{3\pi/4} = -\cos\frac{3\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} + 0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Zadatak 27

$$\int_{2}^{5}\sqrt{x+3}\,dx = \int_{2}^{5}\sqrt{x+3}\,d(x+3) = \frac{(x+3)^{3/2}}{\frac{3}{2}}\Big|_{2}^{5} = \frac{2}{3}(8\sqrt{8} - 5\sqrt{5}) = \frac{2}{3}(16\sqrt{2} - 5\sqrt{5})$$

Zadatak 28

$$\int_{0}^{1}\frac{dx}{x^2+2x+4} = \int_{0}^{1}\frac{dx}{(x+1)^2+3} = \frac{1}{3}\int_{0}^{1}\frac{dx}{(\frac{x+1}{\sqrt{3}})^2+1} = \frac{1}{\sqrt{3}}\int_{0}^{1}\frac{d(\frac{x+1}{\sqrt{3}})}{(\frac{x+1}{\sqrt{3}})^2+1}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{3}}\Big|_{0}^{1} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\operatorname{arctg}\frac{2}{\sqrt{3}} - \operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\operatorname{arctg}\frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{\pi}{6}\right)$$

Zadatak 29

$$\int_{-2}^{2}\frac{2x+1}{x+3}\,dx = \int_{-2}^{2}\frac{2(x+3)-5}{x+3}\,dx = 2\int_{-2}^{2}dx - 5\int_{-2}^{2}\frac{1}{x+3}\,dx$$
$$= 2x\Big|_{-2}^{2} - 5\ln|x+3|\Big|_{-2}^{2} = 2(2-(-2)) - 5(\ln 5 - \ln 1) = 8 - 5\ln 5$$

Zadatak 30

$$\int_{0}^{100\pi}\sqrt{1-\cos 2x}dx = \int_{0}^{100\pi}\sqrt{2\sin^2 x}dx = 50\sqrt{2}\int_{0}^{2\pi}|\sin x|dx$$
$$= 50\sqrt{2}\int_{0}^{\pi}\sin x dx - 50\sqrt{2}\int_{\pi}^{2\pi}\sin x dx = -50\sqrt{2}\cos x\Big|_{0}^{\pi} + 50\sqrt{2}\cos x\Big|_{\pi}^{2\pi} = 200\sqrt{2}$$

2.3 Supstitucija u određenom integralu

Jednostavna posljedica Newton-Leibnizove formule i formule za derivaciju kompozicije funkcija je sljedeći teorem koji daje uvjete za supstituciju u određenom integralu.

Teorem 4 *Neka je $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ neprekidna funkcija i neka je $\varphi : [\alpha, \beta] \to \mathbf{R}$ funkcija sa neprekidnom prvom derivacijom tako da je $\varphi(\alpha) = a$ i $\varphi(\beta) = b$. Tada je*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Zadatak 31

$$\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{dx}{5+4\cos x} = \left\{ \begin{array}{c} t = \operatorname{tg}\frac{x}{2} \quad t(\frac{2\pi}{3}) = \sqrt{3} \quad t(0) = 0 \\ dx = \frac{2dt}{1+t^2} \Rightarrow \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{array} \right\} =$$

$$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{5+4\frac{1-t^2}{1+t^2}} = 2\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dt}{9+t^2} = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \operatorname{arctg}\frac{t}{3}\Big|_0^{\sqrt{3}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{9}$$

Zadatak 32 *(predavanja)*

$$\int_0^{100\pi} \frac{dx}{4+\cos x} = 50 \cdot \int_0^{2\pi} \frac{dx}{4+\cos x} = \left\{ \begin{array}{c} x' = x - \pi \\ x = x' + \pi \end{array} \right\} = 50 \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dx'}{4 - \cos x'}$$

$$= 100 \int_0^\pi \frac{dx'}{4-\cos x'} = \left\{ \begin{array}{c} t = \operatorname{tg}\frac{x'}{2} \in \langle 0, \infty \rangle \\ dx' = \frac{2dt}{1+t^2} \end{array} \right\} = 100 \cdot \int_0^\infty \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{4 - \frac{1-t^2}{1+t^2}}$$

$$= 100 \cdot \int_0^\infty \frac{2dt}{4+4t^2-1+t^2} = 100\int_0^\infty \frac{2dt}{3+5t^2} = 40\int_0^\infty \frac{dt}{\frac{3}{5}+t^2}$$

$$= 40 \cdot \sqrt{\frac{5}{3}} \cdot \operatorname{arctg}\frac{t\sqrt{5}}{\sqrt{3}}\Big|_0^\infty = 40\frac{\sqrt{15}}{3} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{20}{3}\sqrt{15}\pi$$

Zadatak 33

$$\int_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}dx = \left\{ \begin{array}{c} x = \frac{1}{\cos t} \\ \\ dx = \frac{\sin t\, dt}{\cos^2 t} \end{array} \right\} = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt{\frac{1}{\cos^2 t} - 1}}{\frac{1}{\cos t}} \frac{\sin t\, dt}{\cos^2 t} = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1-\cos^2 t}{\cos^2 t}dt = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos^2 t}dt - \int_0^{\frac{\pi}{3}} dt = \operatorname{tg} t\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} - t\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = \sqrt{3} - \frac{\pi}{3}$$

2.način

$$\int_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}dx = \left\{ \begin{array}{ll} x=\frac{1}{t} & x=1 \Rightarrow t=1 \\ dx=-\frac{dt}{t^2} & x=2 \Rightarrow t=1/2 \end{array} \right\} = -\int_1^{1/2} \frac{\sqrt{\frac{1}{t^2}-1}}{\frac{1}{t}}\frac{dt}{t^2}$$

$$= \int_{1/2}^1 \frac{\sqrt{1-t^2}}{t^2}\,dt = \left\{ \begin{array}{ll} t=\sin y & t=1/2 \Rightarrow y=\pi/6 \\ dt=\cos y dy & t=1 \Rightarrow y=\pi/2 \end{array} \right\}$$

$$= \int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{\sqrt{1-\sin^2 y}}{\sin^2 y}\,\cos y\,dy = \int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{\cos^2 y}{\sin^2 y}\,dy = \int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{1-\sin^2 y}{\sin^2 y}\,dy$$

$$= \int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{dy}{\sin^2 y} - \int_{\pi/6}^{\pi/2} dy = -\operatorname{ctg} y\Big|_{\pi/6}^{\pi/2} - y\Big|_{\pi/6}^{\pi/2} = -\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2} + \operatorname{ctg}\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} = \sqrt{3} - \frac{\pi}{3}$$

Zadatak 34

$$\int_4^9 \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}dx = \left\{ \begin{array}{cc} t^2=x & t(9)=3 \\ 2tdt=dx & t(4)=2 \end{array} \right\} = \int_2^3 \frac{1-t}{1+t}\cdot 2tdt = 2\int_2^3 \frac{t-t^2}{1+t}dt$$

$$= \left((-t^2+t):(t+1) = -t+2-\frac{2}{t+1} \right)$$

$$= -2\cdot\int_2^3 tdt + 4\cdot\int_2^3 dt - 4\cdot\int_2^3 \frac{dt}{1+t} = -2\cdot\frac{t^2}{2}\Big|_2^3 + 4t\Big|_2^3 - 4\ln|1+t|\Big|_2^3 =$$

$$= -9+4+12-8-4\ln|4|+4\ln|3| = -1+4\ln\frac{3}{4}$$

Zadatak 35 *(DZ)*

$$\int_0^1 \arcsin x\,dx = \textit{(vidi Zad.19b)} = \ldots = \frac{\pi}{2} - 1$$

Zadatak 36 *(DZ)*

$$\int_1^{e^2} \ln x\,dx = \ldots = 1 + e^2$$

Zadatak 37 *(DZ)*

$a)$ $$\int_0^2 \sqrt{1+x^2}\,dx = \textit{(vidi Zad.20b)} = \ldots = \sqrt{5} + \frac{1}{2}\ln(2+\sqrt{5})$$

$b)$ $$\int_1^3 \sqrt{x^2-1}\,dx = \textit{(vidi Zad.20a)} = \ldots = 3\sqrt{2} - \frac{1}{2}\ln(3+2\sqrt{2})$$

2.4 Parcijalna integracija u određenom integralu

Kako je $f(x)g(x)$ primitivna funkcija funkcije $f(x)g'(x)+f'(x)g(x)$ to korištenjem Newton-Leibnizove formule slijedi sljedeći teorem.

Teorem 5 *Neka su $f, g : [a, b] \to \mathbf{R}$ funkcije sa neprekidnom prvom derivacijom. Tada je*

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b g(x)f'(x)dx.$$

Zadatak 38

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{xdx}{\sin^2 x} = \left\{ \begin{array}{cc} u = x & dv = \frac{dx}{\sin^2 x} \\ du = dx & v = -\operatorname{ctg} x \end{array} \right\} = -x \operatorname{ctg} x \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{\sin x} dx =$$

$$= \left\{ \begin{array}{cc} t = \sin x & t(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2} \\ dt = \cos x dx & t(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{array} \right\} = -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\sqrt{3} + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1}{t} dt = -\frac{\pi}{4} + \frac{\sqrt{3}\pi}{6} + \ln|t| \Big|_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} =$$

$$= \frac{2\sqrt{3}\pi - 3\pi}{12} + \ln\sqrt{2}$$

Zadatak 39

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (x^{10} + x) \sin x dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^{10} \sin x dx + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx = 2 \int_0^{\pi/2} x \sin x \, dx$$

$$= \left\{ \begin{array}{cc} u = x & dv = \sin x dx \\ du = dx & v = -\cos x \end{array} \right\} =$$

$$= 2 \cdot \left(-x \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx \right) = 2 \cdot \left(0 + \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \right) = 2$$

3 Primjena određenog integrala

3.1 Kvadratura (površina ravninskih likova)

Kartezijeve koordinate

Ako je krivocrtni trapez u ravnini zadan sa

$$D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2; a \le x \le b, f_1(x) \le y \le f_2(x)\}$$

onda je površina od D dana sa

$$P = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx.$$

Parametarski oblik: Ako je krivulja $y = f(x)$ zadana parametarski sa $x = \varphi(t),\ y = \psi(t)$ (φ je strogo monotona funkcija) onda je površina od D dana sa

$$P = \int_{t_1}^{t_2} \psi(t)\varphi'(t)dt.$$

Polarne koordinate

Ako je krivocrtni isječak u ravnini zadan u polarnim koordinatama sa

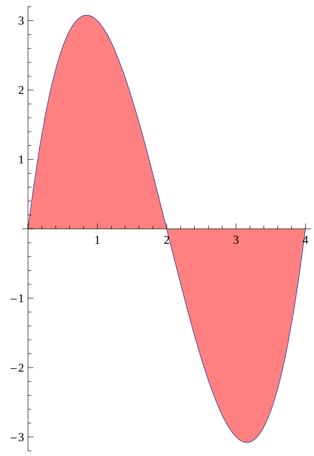
$$D = \{(\varphi, r) \in \mathbf{R} \times [0, \infty\rangle; a \leq \varphi \leq \beta, 0 \leq r_1(\varphi) \leq r \leq r_2(\varphi)\}$$

onda je površina od D dana sa

$$P = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta (r_2(\varphi)^2 - r_1(\varphi)^2)d\varphi.$$

Zadatak 40 *Izračunajte površinu lika omeđenog sa* $y = x^3 - 6x^2 + 8x,\ y = 0.$

Rješenje:

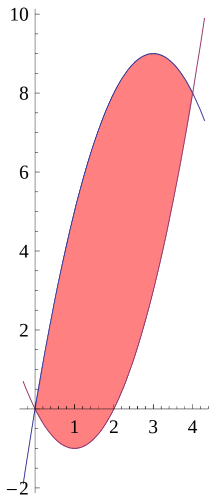


$$\begin{aligned} P &= \int_0^2 (x^3 - 6x^2 + 8x)dx - \int_2^4 (x^3 - 6x^2 + 8x)dx \\ &= \left(\frac{x^4}{4} - 2x^3 + 4x^2\right)\Big|_0^2 + \left(-\frac{x^4}{4} + 2x^3 - 4x^2\right)\Big|_2^4 = 8. \end{aligned}$$

$\square$

Zadatak 41 *Izračunajte površinu lika omeđenog sa* $y = 6x - x^2,\ y = x^2 - 2x$.

Rješenje:

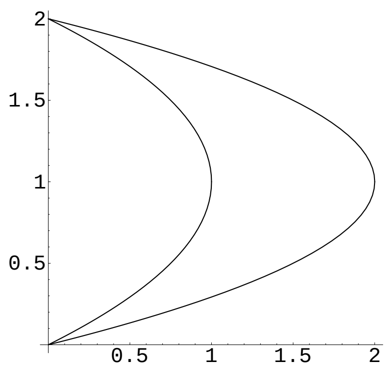


$$P = \int_0^4 [6x - x^2 - (x^2 - 2x)]dx = \int_0^4 (8x - 2x^2)dx = \left(4x^2 - \frac{2}{3}x^3\right)\Big|_0^4 = \frac{64}{3}.$$

$\square$

Zadatak 42 *Izračunajte površinu lika omeđenog sa* $2(y-1)^2 = 2 - x$, $(y-1)^2 = 1 - x$.

Rješenje:

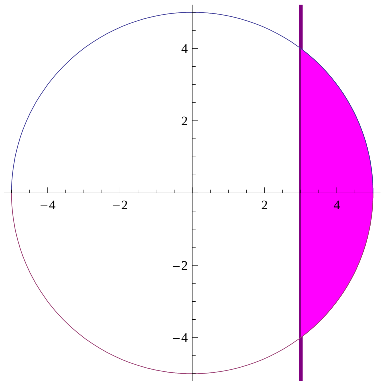


$$P = \int_0^2 [2 - 2(y-1)^2 - (1 - (y-1)^2)]dy = \int_0^2 (-y^2 + 2y)dy = -\frac{y^3}{3}\Big|_0^2 + y^2\Big|_0^2 = \frac{4}{3}.$$

$\square$

Zadatak 43 *Izračunajte površinu lika omeđenog sa* $x^2 + y^2 \leq 25,\ x \geq 3.$

Rješenje:

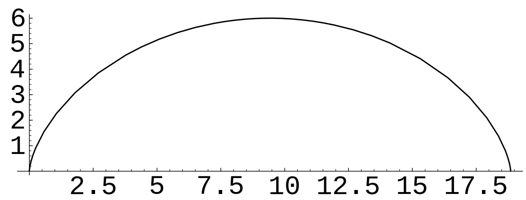


$$
\begin{aligned}
P &= 2\int_3^5 \sqrt{25-x^2}dx = \left\{ \begin{array}{c} x = 5\sin t,\ t = \arcsin\frac{x}{5} \\ dx = 5\cos t dt \end{array} \right\} \\
&= 50\int_{\arcsin(3/5)}^{\pi/2} \cos^2 t dt = 25\int_{\arcsin(3/5)}^{\pi/2} (1+\cos 2t)dt \\
&= 25t\Big|_{\arcsin(3/5)}^{\pi/2} + 25\sin t\sqrt{1-\sin^2 t}\Big|_{\arcsin(3/5)}^{\pi/2} = \frac{25\pi}{2} - 25\arcsin\frac{3}{5} - 12.
\end{aligned}
$$

□

Zadatak 44 *Izračunajte površinu lika omeđenog prvim svodom cikloide* $x = 3(t-\sin t),\ y = 3(1-\cos t)$ *i osi apscise.*

Rješenje:

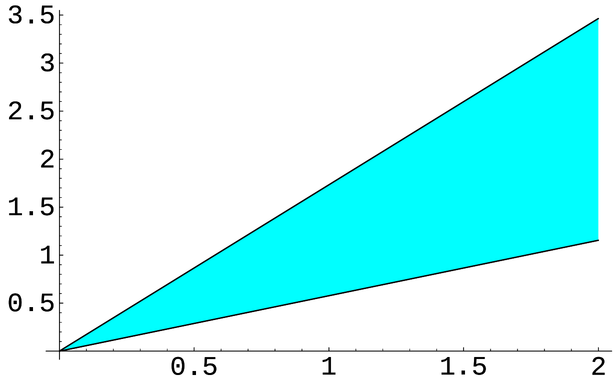


$$
\begin{aligned}
P &= \int_0^{2\pi} 3(1-\cos t)\cdot 3(1-\cos t)dt = 9\int_0^{2\pi}(1-2\cos t+\cos^2 t)dt \\
&= 9t\Big|_0^{2\pi} - 18\sin t\Big|_0^{2\pi} + \frac{9}{2}\int_0^{2\pi}(1+\cos 2t)dt = 18\pi + \frac{9}{2}t\Big|_0^{2\pi} + \frac{9}{4}\sin 2t\Big|_0^{2\pi} = 27\pi.
\end{aligned}
$$

□

Zadatak 45 *Izračunajte površinu lika omeđenog sa* $r = \frac{2}{\cos\varphi}$, $\varphi = \frac{\pi}{6}$, $\varphi = \frac{\pi}{3}$.

Rješenje:

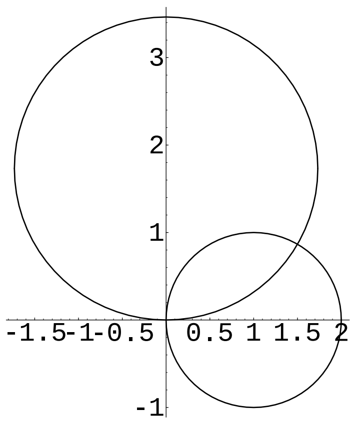


$$P = \frac{1}{2}\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{4}{\cos^2\varphi} d\varphi = 2\operatorname{tg}\varphi\Big|_{\pi/6}^{\pi/3} = \frac{4\sqrt{3}}{3}.$$

□

Zadatak 46 *Izračunajte površinu lika omeđenog sa* $x^2 + y^2 \leq 2\sqrt{3}y$, $x^2 + y^2 \leq 2x$.

Rješenje:

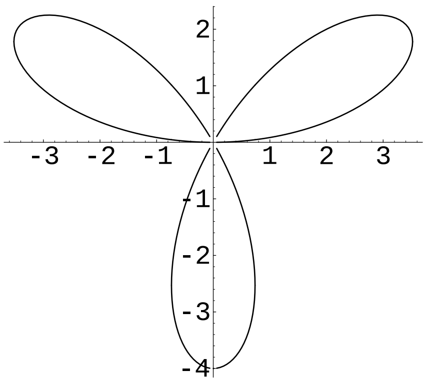


$$\begin{aligned}
P &= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/6} 12\sin^2\varphi d\varphi + \frac{1}{2}\int_{\pi/6}^{\pi/2} 4\cos^2\varphi d\varphi \\
&= 3\int_0^{\pi/6}(1-\cos 2\varphi)d\varphi + \int_{\pi/6}^{\pi/2}(1+\cos 2\varphi)d\varphi \\
&= 3\varphi\Big|_0^{\pi/6} - \frac{3\sin 2\varphi}{2}\Big|_0^{\pi/6} + \varphi\Big|_{\pi/6}^{\pi/2} + \frac{\sin 2\varphi}{2}\Big|_{\pi/6}^{\pi/2} = \frac{5\pi}{6} - \sqrt{3}.
\end{aligned}$$

□

Zadatak 47 *Izračunajte površinu lika omeđenog sa* $r = 4\sin 3\varphi$.

Rješenje:



$$P = \frac{3}{2}\int_0^{\pi/3}(4\sin 3\varphi)^2 d\varphi = 24\int_0^{\pi/3}\frac{1-\cos 6\varphi}{2}d\varphi = 12\varphi\Big|_0^{\pi/3} - 2\sin 6\varphi\Big|_0^{\pi/3} = 4\pi.$$

□

3.2 Rektifikacija (duljina luka krivulje)

Kartezijeve koordinate

Ako je krivulja zadana sa $y = f(x), x \in [a, b]$ onda je njezina duljina dana sa

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + y'(x)^2}dx.$$

Parametarski oblik: Ako je krivulja zadana parametarski sa $x = \varphi(t), y = \psi(t)$ onda je njezina duljina dana sa

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2}dt.$$

Polarne koordinate

Ako je krivulja zadana sa $r = r(\varphi), \varphi \in [\alpha, \beta]$ onda je njezina krivulja dana sa

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r(\varphi)^2 + r'(\varphi)^2} d\varphi.$$

Zadatak 48 *Izračunajte duljinu luka krivulje* $y = x^{3/2}$ *od* $x = 0$ *do* $x = 5$.

Rješenje:

$$s = \int_0^5 \sqrt{1 + \left(\frac{3}{2}x^{1/2}\right)^2} dx = \frac{1}{2}\int_0^5 \sqrt{4+9x} dx = \frac{1}{18}\cdot\frac{2}{3}(4+9x)\sqrt{4+9x}\Big|_0^5 = \frac{335}{27}.$$

$\square$

Zadatak 49 *Izračunajte duljinu luka krivulje* $y = x^{2/3}$ *od* $x = 0$ *do* $x = 8$.

Rješenje:

$$s = \int_0^4 \sqrt{1 + \left(\frac{3}{2}y^{1/2}\right)^2} dy = \frac{1}{2}\int_0^4 \sqrt{4+9y} dy = \frac{1}{18}\cdot\frac{2}{3}(4+9y)\sqrt{4+9y}\Big|_0^4 = \frac{8}{27}(10\sqrt{10}-1).$$

$\square$

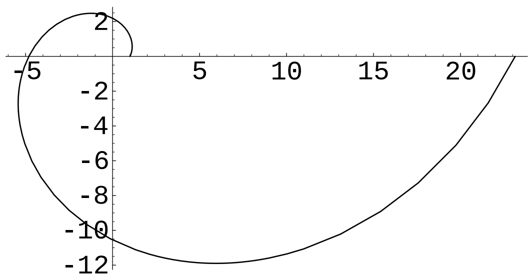
Zadatak 50 *Koji put prevali čestica koja se kreće po krivulji* $x = \cos^2 t,\ y = \sin^2 t$ *u vremenu od* $t = 0$ *do* $t = 2\pi$.

Rješenje:

$$\begin{aligned} s &= \int_0^{2\pi} \sqrt{4\cos^2 t \sin^2 t + 4\sin^2 t \cos^2 t} dt = 2\sqrt{2}\int_0^{2\pi} |\cos t \sin t| dt \\ &= 2\sqrt{2}\int_0^{\pi} |\sin 2t| dt = 2\sqrt{2}\int_0^{\pi/2} \sin 2t dt - 2\sqrt{2}\int_{\pi/2}^{\pi} \sin 2t dt \\ &= -\sqrt{2}\cos 2t\Big|_0^{\pi/2} + \sqrt{2}\cos 2t\Big|_{\pi/2}^{\pi} = 4\sqrt{2}. \end{aligned}$$

$\square$

Zadatak 51 *Izračunajte duljinu prvog luka logaritamske zavojnice* $r = e^{\frac{1}{2}\varphi}$ *od* $\varphi = 0$ *do* $\varphi = 2\pi$.



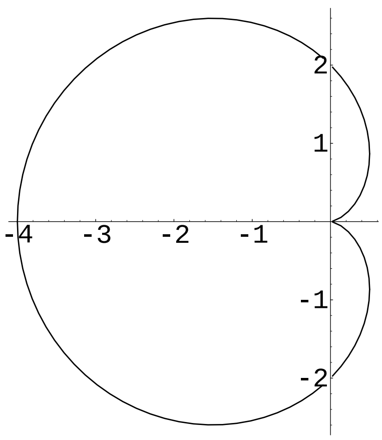
Rješenje:

$$\begin{aligned} s &= \int_0^{2\pi} \sqrt{e^{\varphi} + \left(\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}\varphi}\right)^2} d\varphi = \frac{\sqrt{5}}{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{e^{\varphi}} d\varphi = \frac{\sqrt{5}}{2} \int_0^{2\pi} e^{\frac{1}{2}\varphi} d\varphi \\ &= \sqrt{5} e^{\frac{1}{2}\varphi} \Big|_0^{2\pi} = \sqrt{5} e^{\pi} - \sqrt{5}. \end{aligned}$$

□

Zadatak 52 *Izračunajte opseg kardioide* $r = 2(1 - \cos\varphi)$.

Rješenje:



$$
\begin{aligned}
s &= \int_0^{2\pi} \sqrt{4(1-\cos\varphi)^2 + 4\sin^2\varphi}\, d\varphi = 2\sqrt{2}\int_0^{2\pi} \sqrt{1-\cos\varphi}\, d\varphi \\
&= 4\int_0^{2\pi} \left|\sin\frac{\varphi}{2}\right| d\varphi = 4\int_0^{2\pi} \sin\frac{\varphi}{2} d\varphi = -8\cos\frac{\varphi}{2}\Big|_0^{2\pi} = 16.
\end{aligned}
$$

$\square$

3.3 Kubatura (volumen tijela)

3.3.1 Kubatura rotacijskih tijela

Rotacija oko osi paralelnih sa osi apscisa:
Ako područje

$$D = \{(x,y) : a \leq x \leq b,\ y_0 \leq y \leq f(x) \text{ ili } f(x) \leq y \leq y_0\}$$

(područje D je omeđeno sa krivuljom $y = f(x)$ i pravcima $x = a$, $x = b$, $y = y_0$) rotira oko pravca $y = y_0$ dobije se tijelo volumena

$$V_{y=y_0} = \pi \int_a^b [f(x) - y_0]^2\, dx = \pi \int_a^b [y - y_0]^2\, dx.$$

Specijalno ako je $y_0 = 0$ (rotacija oko $x-$osi) formula glasi

$$V_{y=0} = \pi \int_a^b f^2(x) dx = \pi \int_a^b y^2 dx.$$

Ako područje

$$D = \{(x,y) : a \leq x \leq b, 0 \leq f(x) \leq y \leq g(x) \text{ ili } g(x) \leq y \leq f(x) \leq 0\}$$

(područje D je omeđeno krivuljama $y = f(x)$, $y = g(x)$ i pravcima $x = a$, $x = b$ i cijelo se nalazi ili "ispod" ili "iznad" osi apscisa pri čemu je krivulja $y = g(x)$ "udaljenija" od osi apscisa) rotira oko osi apscisa dobije se tijelo volumena

$$V_{y=0} = \pi \int_a^b [g^2(x) - f^2(x)] dx.$$

Rotacija oko osi paralelne sa osi ordinata:

Ako je područje D omeđeno krivuljom $y = f(x)$, pravcima $x = a$, $x = b$ i $y = 0$ i cijelo se nalazi ili sa "desne" ili sa "lijeve" strane pravca $x = x_0$, onda njegovom rotacijom oko pravca $x = x_0$ nastaje tijelo volumena

$$V_{x=x_0} = 2\pi \int_a^b |x - x_0|\, |f(x)| dx = 2\pi \int_a^b |x - x_0|\, |y| dx.$$

Specijalno, ako je $x_0 = 0$ (rotacija oko $y-$ osi) formula glasi

$$V_{x=0} = 2\pi \int_a^b |x||y| dx.$$

Najjednostavniji slučaj je kada se cijelo područje nalazi "iznad" osi apscisa ($y \geq 0$) i "desno" od osi ordinata ($x \geq 0$). U tom slučaju volumen tijela nastalog rotacijom područja

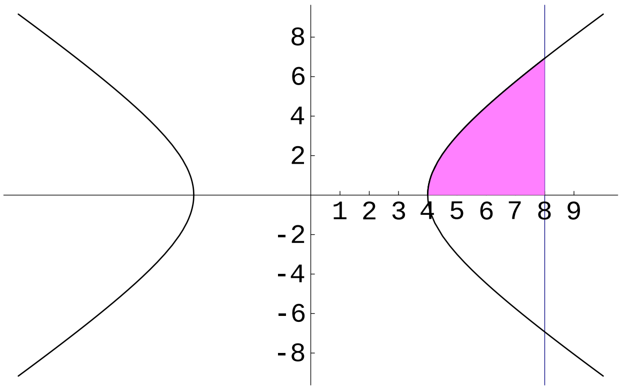
$$D = \{(x, y) : 0 \leq a \leq x \leq b,\ 0 \leq y \leq f(x)\}$$

oko osi ordinata glasi

$$V_{x=0} = 2\pi \int_a^b x f(x) dx.$$

Zadatak 53 *Površina omeđena sa* $x^2 - y^2 = 16,\ y = 0,\ x = 8$ *rotira oko* x*-osi. Odredite volumen nastalog rotacionog tijela.*

Rješenje:

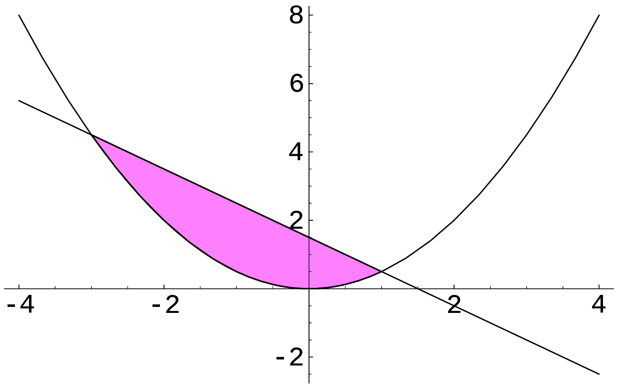


$$V_{y=0} = \pi \int_4^8 (x^2 - 16) dx = \pi \left[\frac{x^3}{3} \Big|_4^8 - 16x \Big|_4^8 \right] = \frac{256\pi}{3}.$$

□

Zadatak 54 *Površina omeđena sa* $y = \frac{x^2}{2}$, $y = \frac{3}{2} - x$ *rotira oko* x*-osi. Odredite volumen nastalog rotacionog tijela.*

Rješenje:

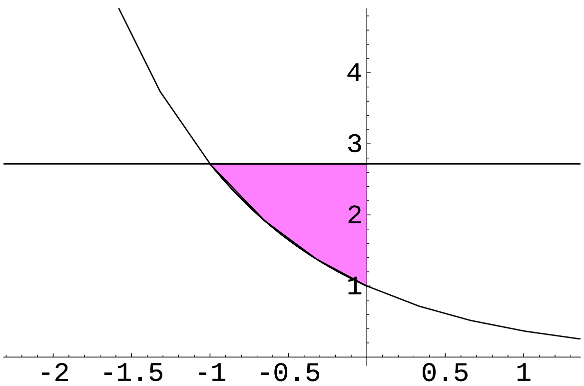


$$
\begin{aligned}
V_{y=0} &= \pi \int_{-3}^{1} \left[\left(\frac{3}{2} - x \right)^2 - \left(\frac{x^2}{2} \right)^2 \right] dx = \pi \int_{-3}^{1} \left(\frac{9}{4} - 3x + x^2 - \frac{x^4}{4} \right) dx \\
&= \pi \left[\frac{9x}{4} - \frac{3x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{20} \right] \Big|_{-3}^{1} = \frac{89\pi}{15}.
\end{aligned}
$$

□

Zadatak 55 *Površina omeđena sa* $y = e^{-x}$, $y = e$, $x = 0$ *rotira oko* y*-osi. Odredite volumen nastalog rotacionog tijela.*

Rješenje: Prvi način:



$$
\begin{aligned}
V_{x=0} &= \pi\int_1^e(-\ln y)^2dy=\pi\int_1^e\ln^2 ydy=\left\{\begin{array}{c} u=\ln^2 y\Rightarrow du=\frac{2\ln y}{y}dy \\ dv=dy\Rightarrow v=y\end{array}\right\} \\
&= \pi y\ln^2 y\Big|_1^e-2\pi\int_1^e\ln ydy=\left\{\begin{array}{c} u=\ln y\Rightarrow du=\frac{1}{y}dy \\ dv=dy\Rightarrow v=y\end{array}\right\} \\
&= e\pi-2\pi y\ln y\Big|_1^e+2\pi\int_1^e dy=e\pi-2e\pi+2\pi y\Big|_1^e=\pi(e-2).
\end{aligned}
$$

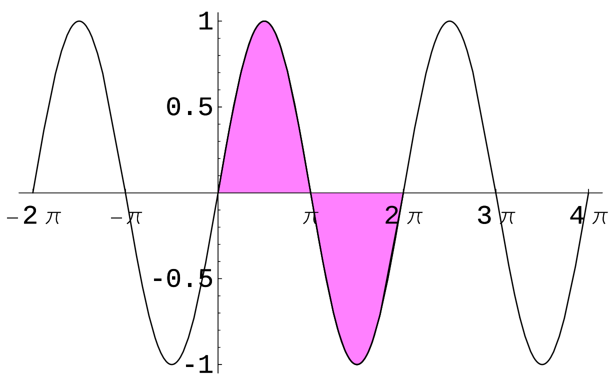
Drugi način:

$$
\begin{aligned}
V_{x=0} &= 2\pi\int_{-1}^0|x|(e-e^{-x})dx=2\pi\left[\int_{-1}^0 xe^{-x}dx-e\int_0^1 xdx\right] \\
&= \left\{\begin{array}{c} u=x\Rightarrow du=dx \\ dv=e^{-x}dx\Rightarrow v=-e^{-x}\end{array}\right\}=2\pi\left[-xe^{-x}\Big|_{-1}^0+\int_{-1}^0 e^{-x}dx-e\frac{x^2}{2}\Big|_{-1}^0\right] \\
&= 2\pi\left[-e-e^{-x}\Big|_{-1}^0+\frac{e}{2}\right]=\pi(e-2).
\end{aligned}
$$

□

Zadatak 56 *Površina omeđena sa $y=\sin x,\ y=0,\ 0\leq x\leq 2\pi$ rotira oko y-osi. Odredite volumen nastalog rotacionog tijela.*

Rješenje:

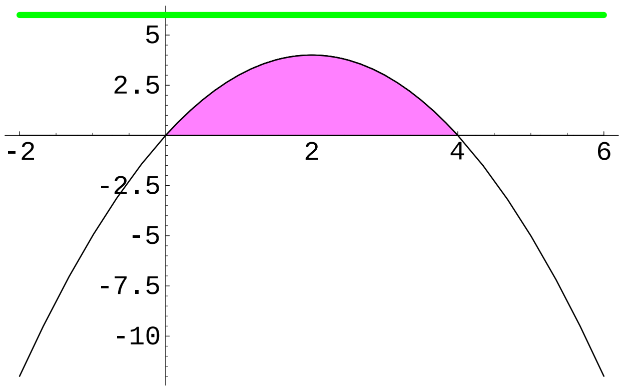


$$
\begin{aligned}
V_{x=0} &= 2\pi\left[\int_0^\pi x\sin xdx+\int_\pi^{2\pi}x(-\sin x)dx\right]=\left\{\begin{array}{c} u=x\Rightarrow du=dx \\ dv=\sin xdx\Rightarrow v=-\cos x\end{array}\right\} \\
&= 2\pi\left[-x\cos x\Big|_0^\pi+\int_0^\pi\cos xdx+x\cos x\Big|_\pi^{2\pi}-\int_\pi^{2\pi}\cos xdx\right]=8\pi^2.
\end{aligned}
$$

□

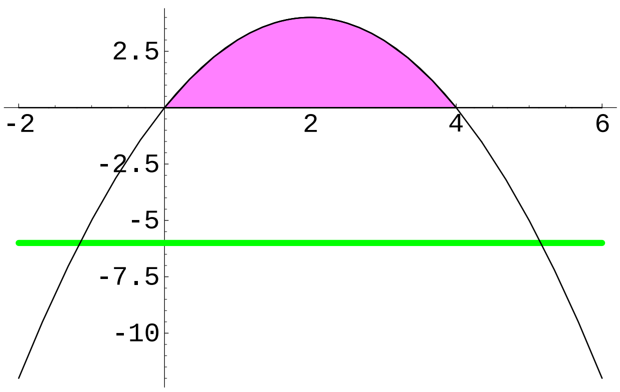
Zadatak 57 *Površina omeđena sa $y = 4x - x^2$, $y = 0$ rotira oko pravca a) $y = 6$, b) $y = -6$. Odredite volumen nastalog rotacionog tijela.*

Rješenje: a)



$$\begin{aligned} V_{y=6} &= \pi \int_0^4 [(-6)^2 - (4x - x^2 - 6)^2] dx = \pi \int_0^4 (-x^4 + 8x^3 - 28x^2 + 48x) dx \\ &= \pi \left[-\frac{x^5}{5} + 2x^4 - \frac{28x^3}{3} + 24x^2 \right] \Big|_0^4 = \frac{1408}{15}\pi \end{aligned}$$

b)

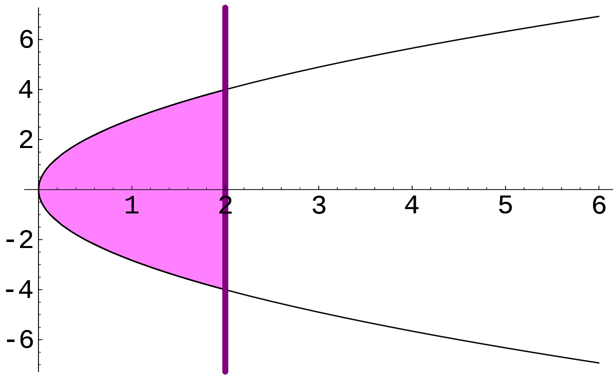


$$V_{y=-6} = \pi \int_0^4 [(4x - x^2 + 6)^2 - 6^2] dx = \ldots = \frac{2432}{15}\pi.$$

$\square$

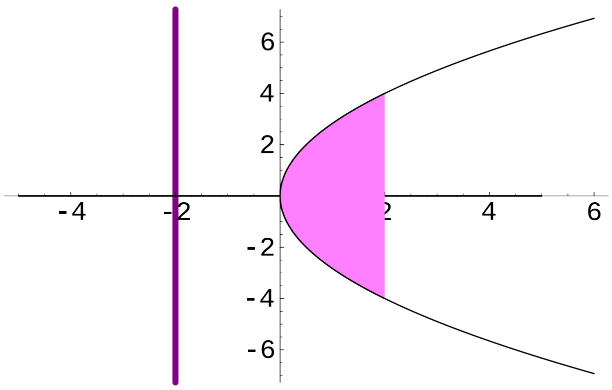
Zadatak 58 *Površina omeđena sa $y^2 = 8x$, $x = 2$ rotira oko pravca a) $x = 2$, b) $x = -2$. Odredite volumen nastalog rotacionog tijela.*

Rješenje: a)



$$V_{x=2} = \pi \int_{-4}^{4} \left(\frac{y^2}{8} - 2 \right)^2 dy = \frac{\pi}{64} \left[\frac{y^5}{5} - 32\frac{y^3}{3} + 256y \right] \Big|_{-4}^{4} = \frac{256}{15}\pi.$$

b)

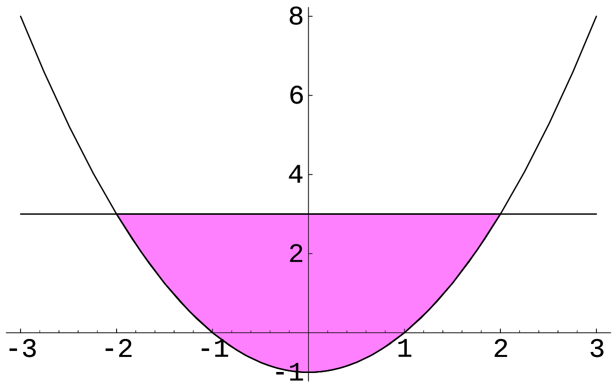


$$V_{x=-2} = \pi \int_{-4}^{4} \left[4^2 - \left(\frac{y^2}{8} + 2 \right)^2 \right] dy = \ldots = \frac{1024}{15}\pi.$$

□

Zadatak 59 *Površina omeđena sa $y = x^2 - 1$, $y = 3$ rotira oko x-osi. Odredite volumen nastalog rotacionog tijela.*

Rješenje:



$$\begin{aligned} V_{y=0} &= 2\pi\int_0^2 9dx - 2\pi\int_1^2 (x^2-1)^2dx = 18\pi x\Big|_0^2 - 2\pi\int_1^2 (x^4-2x^2+1)dx \\ &= 36\pi - 2\pi\left[\frac{x^5}{5}-\frac{3x^3}{3}+x\right]\Big|_1^2 = \frac{464\pi}{15} \end{aligned}$$

□

3.3.2 Cavalerijev princip (izračunavanje volumena tijela pomoću poznatog poprečnog presjeka)

Ako je $P = P(x)$ površina presjeka tijela ravninom okomitom na neki pravac (koji uzimamo za x-os) u točki s apscisom x, onda je volumen tog tijela

$$V = \int_a^b P(x)dx,$$

gdje su a i b apscise krajnjih presjeka tijela ($a < b$).

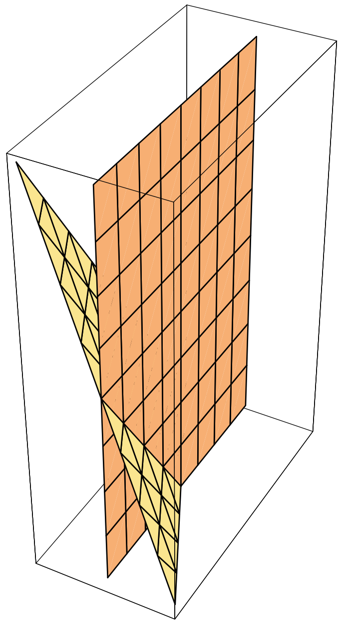
Zadatak 60 *Koristeći Cavalerijev prrincip izračunajte volumen piramide određene točkama* $O(0,0,0),\ A(1,0,0),\ B(0,2,0),\ C(0,0,3)$.

Rješenje:

$$AB: 2x+y=2,\ AC: 3x+z=3,\ BC: 3y+2z=6.$$

Presjek tijela ravninom okomitom na x-os je pravokutni trokut MNP (pravi kut u M), t.d. je $M \in AO,\ N \in AB$ i $P \in AC$, tj. $M(x,0,0)$, $N(x, 2-2x, 0),\ P(x,0,3-3x)$ pa imamo

$$P(x) = P_{\triangle MNP} = \frac{|MN|\cdot|MP|}{2} = \frac{(3-3x)(2-2x)}{2} = 3(1-x)^2,$$

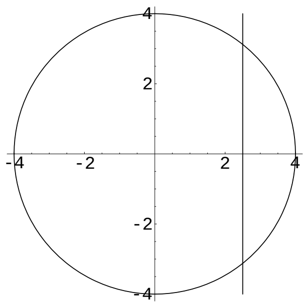


$$\Rightarrow V = \int_0^1 3(1-x)^2 dx = 3\int_0^1 (1-2x+x^2)dx = 3\left[x - x^2 + \frac{x^3}{3}\right]\Big|_0^1 = 1.$$

□

Zadatak 61 *Baza tijela je krug polumjera* 4*. Odredite volumen ako je svaki presjek tog tijela ravninom okomitom na određeni promjer jednakostraničan trokut.*

Rješenje: Ako za promjer uzmemo x-os, vrhovi A i B jednakostraničnog



trokuta ABC leže na kruznici $x^2+y^2=16$, pa je onda je $A(x, -\sqrt{16-x^2}, 0)$, $B(x, \sqrt{16-x^2}, 0)$ i $|AB| = 2\sqrt{16-x^2}$.

$$P(x) = P_{\triangle ABC} = \frac{|AB|^2\sqrt{3}}{4} = (16-x^2)\sqrt{3},$$

$$\Rightarrow V = \int_{-4}^{4} (16 - x^2)\sqrt{3}dx = \sqrt{3}\left[16x - \frac{x^3}{3}\right]\Big|_{-4}^{4} = \frac{256\sqrt{3}}{3}.$$

□

3.4 Komplanacija (površina rotacione plohe)

Površina plohe nastale rotacijom oko pravca $y = y_0$ krivulje $f(x),\ x \in [a, b]$, dana je sa

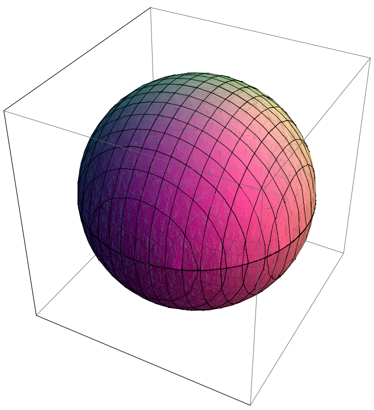
$$P_{y=y_0} = 2\pi \int_a^b |y - y_0| \frac{ds}{dx} dx = 2\pi \int_a^b |y - y_0| \sqrt{1 + y'^2} dx,$$

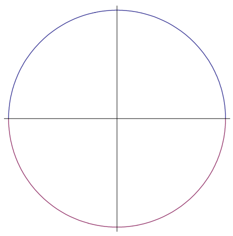
gdje je ds diferencijal luka krivulje.
Parametarski oblik: Ako je krivulja zadana parametarski sa $x = \varphi(t), y = \psi(t)$ onda je površina rotacione plohe dana sa

$$P_{y=y_0} = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} |\psi(t) - y_0| \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2} dt.$$

Zadatak 62 *Koristeći formulu za površinu rotacione plohe izračunajte površinu sfere* $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

Rješenje: Sfera je rotaciona ploha koja nastaje rotacijom kružnice





$x^2 + y^2 = R^2$ oko x-osi, pa je njena površina dana sa

$$P_{y=0} = 2\pi \int_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2} \sqrt{1 + \left(\frac{-2x}{2\sqrt{R^2 - x^2}}\right)^2} dx = 4\pi \int_0^R R dx = 4R^2\pi.$$

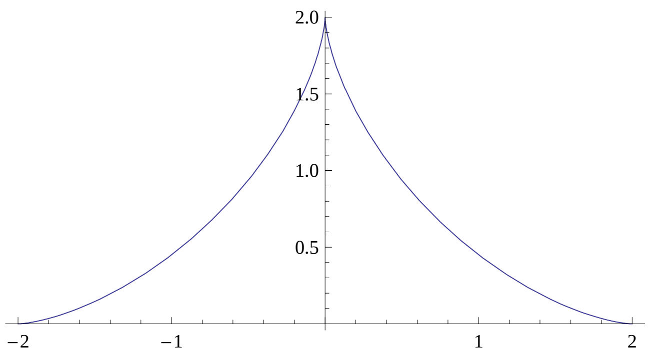
□

Zadatak 63 *Površina omeđena astroidom* $x = 2\cos^3 t,\ y = 2\sin^3 t,\ y = 0$ *rotira oko* x*-osi. Odredite površinu nastale rotacione plohe.*

Rješenje:

$$\begin{aligned}
P_{y=0} &= 4\pi \int_0^{\pi/2} 2\sin^3 t \sqrt{36\cos^4 t \sin^2 t + 36\sin^4 t \cos^2 t} dt \\
&= 48\pi \int_0^{\pi/2} \sin^3 t |\cos t \sin t| dt = 48\pi \int_0^{\pi/2} \sin^4 t \cos t dt \\
&= 48\pi \int_0^{\pi/2} \sin^4 t d(\sin t) = 48\pi \frac{\sin^5 t}{5}\Big|_0^{\pi/2} = \frac{48\pi}{5}.
\end{aligned}$$

□



4 Matrice i determinante

4.1 Pojam matrice i operacije s matricama

Matrica je pravokutna shema realnih ili kompleksnih brojeva raspoređenih u retke i stupce i njih zovemo elementima matrice. Matrica A sa m redaka, n stupaca i s elementima a_{ij} zapisuje se kao

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = [a_{ij}].$$

Takvu matricu zovemo $m \times n$ (čitaj: m puta n) matrica ili matrica tipa (reda, dimenzije) $m \times n$. Pritom niz brojeva $a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}, \ldots, a_{in}$ zovemo i-ti redak, a niz brojeva $a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{mj}$ poredanih jedan ispod drugog, j-ti stupac matrice A. Ako vrijedi $m = n$, kažemo da je A kvadratna matrica reda n.

Matricu sa samo jednim retkom zovemo jednoretčana matrica, a matricu sa samo jednim stupcem zovemo jednostupčana matrica. Matrica A je jednaka matrici B ako imaju isti broj redaka i isti broj stupaca i za njihove elemente vrijedi $a_{ij} = b_{ij}$, za sve i i j. S $M_{m,n}$ označavat ćemo skup svih $m \times n$ matrica.

Neka su $A, B \in M_{m,n}$. Matricu $C \in M_{m,n}$ s elementima

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \quad 1 \leq i \leq m, \quad 1 \leq j \leq n$$

zovemo zbrojem ili sumom matrica A i B i pišemo $C = A + B$.

Ako je $A \in M_{m,n}$ i $c \in \mathbf{R}$, matricu $B \in M_{m,n}$ s elementima

$$b_{ij} = ca_{ij}, \quad 1 \leq i \leq m, \quad 1 \leq j \leq n$$

zovemo umnožak ili produkt matrice sa skalarom c i označavamo $B = cA$.

Neka je $A \in M_{m,n}$ i $B \in M_{n,p}$. Umnožak ili produkt matrica A i B je matrica $C = A \cdot B \in M_{m,p}$ kojoj su elementi određeni formulom

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \quad \text{za sve} \quad 1 \leq i \leq m, \quad 1 \leq j \leq p.$$

Važnu klasu matrica čine dijagonalne matrice. Najpoznatiji primjer dijagonalne matrice je jedinična matrica

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \in M_{n,n}.$$

Lako je provjeriti da za svaku kvadratnu matricu $A \in M_{n,n}$ vrijedi

$$A \cdot I = I \cdot A = A.$$

Malo općenitija, dijagonalna matrica je ona kod koje su svi izvandijagonalni elementi jednaki nuli. Dijagonalnu matricu kojoj su dijagonalni elementi $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ označavamo s $\mathrm{diag}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, tj.

$$\mathrm{diag}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \ddots & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & \ddots & \alpha_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha_n \end{bmatrix}.$$

Nul-matrica je matrica kojoj su svi elementi nula i kraće se označava s 0 i, također pripada klasi dijagonalnih matrica.

Potencije kvadratne matrice A definiraju se induktivno:

$$A^0 = I, \quad A^n = AA^{n-1} \text{ za } n \in \mathbf{N}.$$

Lako se pokaže da vrijedi $A^nA^m = A^mA^n = A^{m+n}$ za sve nenegativne cijele brojeve m i n. Stoga je dobro definiran matrični polinom

$$P_k(A) = a_kA^k + a_{k-1}A^{k-1} + \ldots + a_1A + a_0I,$$

pri čemu su $a_0, \ldots, a_k$ realni brojevi.

Postoji još jedna vrlo korisna operacija na matricama. Naziva se operacijom transponiranja.

Neka je $A \in M_{m,n}$. Matrica $A^T \in M_{n,m}$ naziva se transponirana matrica matrici A, ako je svaki redak od A^T jednak odgovarajućem stupcu matrice A. Prema tome, transponiranu matricu dobivamo tako da stupce (retke) matrice zamijenimo njenim retcima (stupcima). Ako je

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \text{onda je} \quad A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Glavna svojstva operacije transponiranja su
(a) $(A^T)^T = A$,
(b) $(A + B)^T = A^T + B^T$,
(c) $(AB)^T = B^TA^T$.

Zadatak 64 *Ako je* $A = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 3 & 4 \\ -5 & -6 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 5 & -6 \\ 2 & -2 & 3 \end{bmatrix}$ *odredite* $3A + B^T$.

Rješenje:

$$3\cdot \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 3 & 4 \\ -5 & -6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -2 \\ -6 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\cdot(-2)+1 & 3\cdot 2+2 \\ 3\cdot 3+5 & 3\cdot 4-2 \\ 3\cdot(-5)-6 & 3\cdot(-6)+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 8 \\ 14 & 10 \\ -21 & -15 \end{bmatrix}$$

□

Zadatak 65 *Odredite matricu* X *koja zadovoljava uvjet* $2A - 3X = B$, *ako je* $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -5 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$.

Rješenje:

$$2A - 3X = B \Rightarrow 3X = 2A - B \Rightarrow X = \frac{2}{3}A - \frac{1}{3}B$$

$$\Rightarrow X = \frac{2}{3}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} - \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -5 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

□

Zadatak 66 *Odredite $m, n \in \mathbf{N}$ iz:*
a) $A_{3\times 4} \cdot B_{4\times 5} = C_{m\times n}$
b) $A_{2\times 3} \cdot B_{m\times n} = C_{2\times 6}$
c) $A_{2\times m} \cdot B_{n\times 3} = C_{2\times 3}$

Rješenje:
a) $m = 3,\ n = 5$
b) $m = 3,\ n = 6$
c) $m = n \in \mathbf{N}$ □

Zadatak 67

$$\begin{bmatrix} -2 & 3 & 4 & 0 \\ 5 & -1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ -1 & 0 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2\cdot 1 + 3\cdot 0 + 4\cdot(-1) + 0\cdot 4 & -2\cdot 2 + 3\cdot(-1) + 4\cdot 0 + 0\cdot 0 \\ 5\cdot 1 + (-1)\cdot 0 + 2\cdot(-1) + 3\cdot 4 & 5\cdot 2 + (-1)\cdot(-1) + 2\cdot 0 + 3\cdot 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -6 & -7 \\ 15 & 11 \end{bmatrix}.$$

Zadatak 68 *Dokažite da je matrica A nultočka polinoma $P_2(x) = x^2 - 4x - 5$, ako je $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.*

Rješenje: $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 8 & 8 \\ 8 & 9 & 8 \\ 8 & 8 & 9 \end{bmatrix}$,

$$A^2 - 4A - 5I = \begin{bmatrix} 9 & 8 & 8 \\ 8 & 9 & 8 \\ 8 & 8 & 9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 8 & 8 \\ 8 & 4 & 8 \\ 8 & 8 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Primjetite da je $P_2(x) = (x-5)(x+1)$, pa iako je $P_2(A) = 0$ matrica A je različita i od $5I$ i od $-I$. □

Zadatak 69 *Neka je* $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. *Izračunajte a)* $A^3 (= 0)$, *b)* $(A^T)^3$.

Zadatak 70 *Zadano je:* $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, $BA^T = \begin{bmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 3 & 7 & -2 \\ 7 & 4 & 8 \end{bmatrix}$.
Odredite $(AB)^T$.

Rješenje: $(AB)^T = B^T \cdot A^T$, B je simetrična, tj. $B^T = B$

$$\Rightarrow (AB)^T = B^T \cdot A^T = B \cdot A^T = \begin{bmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 3 & 7 & -2 \\ 7 & 4 & 8 \end{bmatrix}.$$

□

Zadatak 71 $\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}^3 = ?$

Rješenje:

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}^2 &= \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \\
= \begin{bmatrix} \cos^2\alpha - \sin^2\alpha & -2\sin\alpha\cos\alpha \\ 2\sin\alpha\cos\alpha & -\sin^2\alpha + \cos^2\alpha \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos 2\alpha & -\sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & \cos 2\alpha \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}^3 &= \begin{bmatrix} \cos 2\alpha & -\sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & \cos 2\alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \cos 2\alpha\cos\alpha - \sin 2\alpha\sin\alpha & -\sin\alpha\cos 2\alpha - \sin 2\alpha\cos\alpha \\ \sin 2\alpha\cos\alpha + \cos 2\alpha\sin\alpha & -\sin 2\alpha\sin\alpha + \cos 2\alpha\cos\alpha \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \cos 3\alpha & -\sin 3\alpha \\ \sin 3\alpha & \cos 3\alpha \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

□

4.2 Determinante

Determinanta kvadratne matrice je funkcija $\det : M_{n,n} \to \mathbf{C}$ i označavamo je s $\det A$, $|A|$ ili

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Definiramo je induktivno po redu matrice:

$$n=1,\quad A=[a_{11}] \quad \Rightarrow \quad \mathrm{det}A=a_{11}$$
$$n=2,\quad A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{det}A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_1$$

Za matrice višeg reda determinata se definira (a može se izračunati i njena vrijednost) koristeći tzv. razvoj determinante po retku ili stupcu, koji se još naziva i Laplaceov razvoj determinante.

Neka je $A\in M_{n,n}$. S $M_{ij}\in M_{n-1,n-1}$ označit ćemo podmatricu od A koja nastaje izbacivanjem njenog i-tog retka i j-tog stupca. Npr. ako je

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,j-1} & a_{1j} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,j-1} & a_{ij} & a_{i,j+1} & \cdots & a_{i,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{nj} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

onda je

$$M_{ij}=\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Minora elementa a_{ij} matrice $A\in M_{n,n}$ je detreminanta matrice M_{ij}. Algebarski komplement elementa a_{ij} je skalar $A_{ij}=(-1)^{i+j}\mathrm{det}M_{ij}$.

Sada, za $A\in M_{n,n}$ vrijedi

$$\mathrm{det}A=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij},\quad 1\leq i\leq n.$$

Ovu formulu nazivamo razvoj determinante po i-tom retku. Isto tako vrijedi formula Sada, za $A=(a_{ij})\in M_{n,n}$ vrijedi

$$\mathrm{det}A=\sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij},\quad 1\leq j\leq n$$

koju nazivamo razvoj determinante po j-tom stupcu.

Zadatak 72 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$, $M_{23},\ A_{23},\ M_{33},\ A_{33} = ?$

Rješenje: $M_{23} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{bmatrix}$, $M_{33} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{bmatrix}$,

$$A_{23} = (-1)^{2+3}\det M_{23} = -\det M_{23},\ A_{33} = (-1)^{3+3}\det M_{33} = \det M_{33}.$$

□

Zadatak 73 *Izračunajte* $D = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 5 & 4 & 2 \\ -3 & 0 & 5 \end{vmatrix}$

a) razvojem po drugom retku
b) razvojem po trećem stupcu

Rješenje: a)

$$\begin{aligned} D &= 5(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} + 4(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} + 2(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} \\ &= -5(5-0) + 4(-10+9) - 2(0+3) = -35. \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} D &= 3(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} + 2(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} + 5(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} \\ &= 3(0+12) - 2(0+3) + 5(-8-5) = -35. \end{aligned}$$

□

Svojstva determinanti:

1. $\det A = \det A^T$
2. Zamjenom dva susjedna retka (ili stupca) deteminanta mijenja predznak
3. Ako su u determinanti dva retka (stupca) jednaka (ili proporcionalna) ona je jednaka nuli
4. Determinanta matrice dobivena iz početne matrice A množenjem nekog retka ili stupca skalarom λ jednaka je $\lambda \cdot \det A$ (ovo pravilo češće se koristi na način da se svi elementi nekog retka ili stupca skrate za zajednički faktor koji se izvlači ispred determinante). Odavde slijedi $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$ za kvadratnu matricu A reda n.

5. Ako matrice C, A, B imaju sve retke jednake osim $i-$tog, pri čemu je $i-$ti redak matrice C jednak zbroju $i-$tih redaka matrica A i B, onda je $\det C = \det A + \det B$. Napomenimo da općenito ne vrijedi da je $\det(A+B) = \det A + \det B$.

6. Vrijednost determinante se ne mijenja ako se nekom retku (ili stupcu) pribroje elementi nekog drugog retka (ili stupca) pomnoženi skalarom λ

7. Binet-Cauchyjev teorem: $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$

Zadatak 74 *Izračunajte* $\begin{vmatrix} -4 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -4 \end{vmatrix}$.

Rješenje: Dodajući prvom stupcu prvo drugi stupac, te treći, četvrti i peti stupac (primjetite da je zbroj elemenata po recima jednak 0), te razvijajući determinantu po prvom stupcu dobije se:

$$\begin{vmatrix} -4 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -4 \end{vmatrix} = 0.$$

□

Zadatak 75 *Izračunajte* $\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix}$ *koristeći svojstva determinante.*

Rješenje: Dodajući drugi stupac trećem stupcu, izlučujući iz trećeg stupca zajednički faktor dobije se

$$\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a+b+c \\ 1 & b & a+b+c \\ 1 & c & a+b+c \end{vmatrix} = (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & c & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

□

Zadatak 76 *Pokažite na primjeru determinanti reda 4 da ako su svi elementi ispod (iznad) glavne dijagonale jednaki 0, onda je determinanta jednaka produktu dijagonalnih elemenata.*

Rješenje: Primjer gornje trokutaste matrice. Razvijanjem uzastopce po prvom stupcu dobije se:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} \begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} \\ 0 & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}.$$

□

Zadatak 77 *Korištenjem elementarnih transformacija na recima i stupcima matrice (tj. korištenjem svojstava determinante) svedite sljedeće determinante na gornje trokutaste i izračunajte ih: a)* $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 5 & 7 & 8 \end{vmatrix}$ *b)* $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 2 & 4 & -3 \\ 5 & -3 & 2 \end{vmatrix}$

Rješenje: b)

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 2 & 4 & -3 \\ 5 & -3 & 2 \end{vmatrix} = \left\{ \begin{array}{c} \text{Pomnožimo drugi redak sa -1 i dodamo prvom retku} \\ \text{Pomnožimo drugi redak sa -2 i dodamo trećem retku} \end{array} \right\}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -6 & 8 \\ 2 & 4 & -3 \\ 1 & -11 & 8 \end{vmatrix} = \left\{ \begin{array}{c} \text{Pomnožimo prvi redak sa -2 i dodamo drugom retku} \\ \text{Pomnožimo prvi redak sa -1 i dodamo trećem retku} \end{array} \right\}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -6 & 8 \\ 0 & 16 & -19 \\ 0 & -5 & 0 \end{vmatrix} = \left\{ \begin{array}{c} \text{Izlučimo -5 iz trećeg retka} \\ \text{Zamijenimo drugi i treći redak} \end{array} \right\} = 5 \begin{vmatrix} 1 & -6 & 8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 16 & -19 \end{vmatrix}$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{Pomnožimo drugi redak sa} \\ \text{-16 i dodamo trećem retku} \end{array} \right\} = 5 \begin{vmatrix} 1 & -6 & 8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -19 \end{vmatrix} = 5 \cdot 1 \cdot 1 \cdot (-19) = -95.$$

□

Zadatak 78 *Neka je matrica* $A = [a_{i,j}]$ *zadana sa* $a_{i,j} = |i - j|$. *Izračunajte* $\det A$ *ako je matrica* A *formata a)* 2×2 *b)* 3×3 *c)* 4×4.

Rješenje: c) Iz definicije se lako vidi da je $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Sada je:

$$\det A = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \left\{ \begin{array}{c} \text{1. i 2. redak} \\ \text{zamjene mjesta} \end{array} \right\} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \left\{ \begin{array}{c} \text{Pomnožimo prvi redak sa } -2 \text{ i dodajmo trećem} \\ \text{Pomnožimo prvi redak sa } -3 \text{ i dodajmo četvrtom} \end{array} \right\} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 2 & -2 & -6 \end{vmatrix}$$

$$= -2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & -3 \\ 1 & -1 & -3 \end{vmatrix} = \left\{ \begin{array}{c} \text{Pomnožimo prvi redak sa } -1 \text{ i dodajmo drugom} \\ \text{Pomnožimo prvi redak sa } -1 \text{ i dodajmo trećem} \end{array} \right\}$$

$$= -2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -6 \\ 0 & -3 & -6 \end{vmatrix} = 12 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -12.$$

□

Zadatak 79 *Odredite* $\det A$ *ako je matrica* A *reda 10 zadana sa* $a_{i,j} = i \cdot j$.

Rješenje:

$$\det A = 10! \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & 10 \\ 1 & 2 & 3 & \ldots & 10 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \ldots & 10 \end{vmatrix} = 0.$$

□

Zadatak 80 *Izračunajte* $\det(A^{100})$ *ako je* $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.

Rješenje: $\det(A^{100}) = (\det A)^{100} = 1.$ □

4.3 Pojam inverzne matrice. Matrične jednadžbe.

Definicija 4 *Matricu* B *zovemo inverznom matricom matrice* A *ako je* $A \cdot B = B \cdot A = I$ *(*I *jedinična matrica).*
Oznaka: $B = A^{-1}$.
Naziv: Matricu koja ima inverznu zovemo regularnom matricom. Matricu koja nema inverznu matricu zovemo singularnom matricom.

Kako je jedinična matrica kvadratna, to očito i matrica A (pa onda i A^{-1}) ima isti broj redaka i stupaca kao i I.

Primjer 2 *Pokažimo da je matrica* $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ *singularna matrica. Pretpostavimo suprotno. Neka je* $B = \begin{bmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} \\ b_{2,1} & b_{2,2} \end{bmatrix}$ *inverzna matrica matrice* A

tj. neka je $AB = BA = I$. *Kako je* $AB = \begin{bmatrix} b_{1,1}+b_{2,1} & b_{1,2}+b_{2,2} \\ b_{1,1}+b_{2,1} & b_{1,2}+b_{2,2} \end{bmatrix}$, *da bi vrijedilo* $AB = I$ *mora vrijediti* $b_{1,1}+b_{2,1} = 1$ *i* $b_{1,1}+b_{2,1} = 0$, *što je nemoguće, što znači da* A^{-1} *ne postoji.*

Ako je $AA^{-1} = I$ tada koristeći Binet-Cauchyjev teorem (i očitu činjenicu da je $\det I = 1$) slijedi $\det A \cdot \det A^{-1} = 1$, što očito daje $\det A \neq 0$.

Ako je $\det A \neq 0$, tada možemo formirati matricu

$$B = \frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \dots & A_{1,n} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \dots & A_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{n,1} & A_{n,2} & \dots & A_{n,n} \end{bmatrix}^T = \frac{1}{\det A}A^*.$$

Matricu A^* (transponiranu matricu matrice algerbarskih komplemenata) zovemo adjunktom matrice A. Lako se vidi (koristeći Laplaceov razvoj determinante i svojstvo da je determinanta matrice sa dva ista retka jednaka 0) da je $AA^* = A^*A = \det A \cdot I$. Odavde odmah slijedi da je $AB = BA = I$ tj. da je $B = A^{-1}$.

Time je dobiven sljedeći teorem.

Teorem 6 *A je regularna matrica akko je* $\det A \neq 0$

Vrijede sljedeća svojstva invertiranja matrica:

1. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
2. $(A^{-1})^{-1} = A$
3. $(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda}A^{-1}$, $\lambda \neq 0$
4. $\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$.

Inverzna matrica se može dobiti i sljedećim postupkom (Gaussov algoritam; daleko efikasniji od nalaženja adjunkte u slučaju matrica velikog reda): Ukoliko je $\det A \neq 0$, onda se matrica $[A \vdots I]$ (jedinična matrica I se nadopiše do matrice A), elementarnim transformacijama na recima može dovesti do oblika $[I \vdots A^{-1}]$.

Pod elementarnim transformacijam na recima podrazumjevaju se sljedeći postupci:

1. Zamjena dva retka.

2. Množenje nekog retka brojem različitim od 0.

3. Dodavanje nekog retka pomnoženog sa brojem nekom drugom redku.

Zadatak 81 *Odredite A^{-1} za $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$, koristeći a) adjunktu matrice A b) Gaussov algoritam.*

Rješenje: a) Kako je $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -6 \neq 0$, to je matrica A regularna. Odredimo matricu algebarskih komplemenata matrice A. Imamo redom:

$$A_{1,1} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -6,\ A_{1,2} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -2,\ A_{1,3} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 0,$$

$$A_{2,1} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 3,\ A_{2,2} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2,\ A_{2,3} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -3,$$

$$A_{3,1} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 0,\ A_{3,2} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -2,\ A_{3,3} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Odavde je

$$A^{-1} = \frac{1}{-6} \left| \begin{matrix} -6 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & -3 \\ 0 & -2 & 0 \end{matrix} \right]^T = \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ 1/3 & -1/3 & 1/3 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}.$$

b)

$$[A|I] = \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 & -1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/2 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 & -1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/2 & 0 \end{array} \right].$$

Odavde čitamo:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ 1/3 & -1/3 & 1/3 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}.$$

$\square$

Zadatak 82 *Za koje vrijednosti parametra $k \in \mathbf{R}$ postoji inverzna matrica matrice* $A = \begin{bmatrix} 2 & -k & 3 \\ -2 & 1 & -3 \\ 2 & 7 & 5 \end{bmatrix}$.

Rješenje: Kako je

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -k & 3 \\ -2 & 1 & -3 \\ 2 & 7 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -k & 3 \\ 0 & 1-k & 0 \\ 0 & 7+k & 2 \end{vmatrix} = 4(1-k),$$

to $\det A \neq 0 \Leftrightarrow 4(1-k) \neq 0 \Leftrightarrow k \neq 1$ povlači da je matrica A regularna (v. gornji teorem). ∎

Zadatak 83 *Ako je* $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ *i* $\det A = ad - bc \neq 0$, *pokažite da je* $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$.

Rješenje: Lako se provjeri da je $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = (ad-bc)I$. ∎

Zadatak 84 *Riješite matričnu jednadžbu a) $AX = B$ b) $XA = B$, gdje je* $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$.

Rješenje: Primjetimo da je $\det A = 4 - 6 = -2 \neq 0$, što znači da je A regularna matrica.
a) Jednadžba $AX = B$ sada povlači $X = A^{-1}B$, što daje (v. prethodni zadatak)

$$X = A^{-1}B = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & -3 \\ 5 & 7/2 \end{bmatrix}.$$

b) Jednadžba $XA = B$ sada povlači $X = BA^{-1}$, što daje

$$X = BA^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 19/2 & -7/2 \end{bmatrix}.$$

∎

Zadatak 85 *Riješite matričnu jednadžbu $XA - 2B = C$ ako je* $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$,

$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 6 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$.

Rješenje: Kako je očito $\det A = 1$ to je A regularna matrica, pa jednadžba $XA - 2B = C$ povlači $X = (C + 2B)A^{-1}$. Primjetimo da imamo dobro "ulančane" matrice jer je matrica $C + 2B$ formata 2×3 dok je matrica A^{-1} reda 3 tj. formata 3×3, pa je matrica X formata 2×3.

Odredimo A^{-1} Gaussovim algoritmom:

$$[A|I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right],$$

što daje $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Konačno

$$X = (2B + C)A^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 5 & -2 & 13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -3 & 1 \\ 5 & -7 & 15 \end{bmatrix}.$$

$\square$

Zadatak 86 *Riješite matričnu jednadžbu* $(2A^{-1}X)^{-1} = A^*$*, ako je* $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$.

Rješenje: Kako je $\det A = 10 \neq 0$, to je matrica A regularna pa je zadatak dobro zadan. Sada je

$$\left(2A^{-1}X\right)^{-1} = A^* \Leftrightarrow \left(2A^{-1}X\right)^{-1} = (\det A)A^{-1} \Leftrightarrow 2A^{-1}X = \frac{1}{\det A}A \Leftrightarrow X = \frac{1}{2\det A}A^2$$

$$= \frac{1}{20}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \frac{1}{20}\begin{bmatrix} -5 & -10 \\ 15 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/4 & -1/2 \\ 3/4 & 1/2 \end{bmatrix}$$

$\square$

Zadatak 87 *Riješite matričnu jednadvzbu a)* $AX = 5X + 3A^*$ *b)* $XA = 5X + 3A^*$ *gdje je* $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$.

Rješenje: a) Očito je $AX = 5X + 3A^* \Leftrightarrow (A - 5I)X = 3A^*$. Dalji postupak rješavanja ovisi o tome je li matrica $A - 5I = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$ regularna ili singularna. No kako je $\det(A - 5I) = 4 \neq 0$ to je matrica $A - 5I$ regularna matrica. Sada je

$$(A - 5I)X = 3A^* \Leftrightarrow X = 3(A - 5I)^{-1}A^* = 3 \cdot \frac{1}{4}\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{3}{4}\begin{bmatrix} -6 & -2 \\ 4 & -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9/2 & -3/2 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}.$$

b) Imamo $XA = 5X + 3A^* \Leftrightarrow X(A - 5I) = 3A^* \Leftrightarrow X = 3A^*(A - 5I)^{-1}$. Odavde se lako vidi da je rješenje i ove jednadžbe

$$X = \begin{bmatrix} -9/2 & -3/2 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}.$$

Napomena: Iako kod matričnog množenja treba paziti na poredak množitelja ovdje smo dobili isto rješenje. Ovdje to nije slučajnost već posljedica jednakosti $A^{-1}(A-\lambda I)^{-1} = (A-\lambda I)^{-1}A^{-1}$. Pokažite tu jednakost. Ona povlači i da je $A^*(A - \lambda I)^{-1} = (A - \lambda I)^{-1}A^*$. □

4.4 Rang matrice

Važan pojam kod razmatranja postojanja rješenja kod linearnih sustava je **rang matrice** sustava.

Definicija 5 *Matrica $A \neq 0$ ima rang r ako je barem jedna subdeterminanta $r-$tog reda različita od 0, dok su sve subdeterminante višeg reda jednake 0. Po definiciji nul-matrica ima rang jednak 0.*
Oznaka: $r(A) = r$.

Navedene definicijske uvjete je računski zahtjevno provjeravati (npr. matrica reda 4 ima 16 subdeterminanti reda 3, pa kada bi htjeli pokazati da je rang takve matrice jednak 2, morali bi naći barem jednu subdeterminantu reda 2 različitu od 0 (što nije problem) i pokazati da sve subdeterminante reda 3 (kojih ima 16) su jednake 0.

Daleko brže je korištenjem elementarnih transformacija sa retcima i stupcima (koje čuvaju "različitost" od 0 determinanata (u ovom slučaju subdeterminanata)) reducirati matricu na matricu istog ranga koja u gornjem lijevom kutu ima jediničnu matricu reda r.

Zadatak 88 *Odredite rang matrice* $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Rješenje:

$$r(A) = r\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}\right) = r\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & -5 & 5 & -6 & -3 \\ 0 & -5 & 5 & -6 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & -2 & -1 \end{bmatrix}\right)$$

$$= r\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & -5 & 5 & -6 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = r\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right)$$

$$= r\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = 3.$$

$\square$

Zadatak 89 *Za koje vrijednosti parametra k je rang matrice* $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \\ 4 & k & 6 \end{bmatrix}$ *jednak* 2.

Rješenje:

$$r(A) = r\left(\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \\ 4 & k & 6 \end{bmatrix}\right) = r\left(\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & k-2 & 0 \end{bmatrix}\right)$$

Ako je $k = 2$ tada je $r(A) = 2$. $\square$

4.5 Sustavi linearnih jednadžbi

Jedan od najvažnijih problema linearne algebre jest rješavanje sustava linearnih jednadžbi

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m. \end{array} \tag{2}$$

Uvođenjem matrice sustava $A \in M_{m,n}$, jednostupčane matrice rješenja $x \in M_{n,1}$ i jednostupčane matrice desne strane sustava $b \in M_{m,1}$,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix},$$

sustav (2) prelazi u matrični problem

$$Ax = b.$$

- Sustav je **suglasan** ako postoji barem jedno rješenje tog sustava. U protivnom je **nesuglasan**.
- Suglasan sustav je **određen** ako ima **samo** jedno rješenje.
- Sustav koji ima više rješenja je **neodređen**.

4.5.1 Cramerove formule

U slučaju kada je $m = n$ imamo

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \cdots & + & a_{nn}x_n & = & b_n, \end{array} \tag{3}$$

pa je determinanta

$$D = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

tzv. **determinanta sustava**.

Ako je $D \neq 0$, rješenje sustava (3) dano je **Cramerovim formulama**:

$$D \cdot x_i = D_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

gdje je D_i determinanta koja se dobije iz determinante D tako da se elementi i-tog stupca zamijene "slobodnim" članovima $b_1, b_2, \ldots, b_n$.

Zadatak 90 *Uz pomoć Cramerovih formula riješite sustav*

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & -2 \\ 2x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & = & 6 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 2 \end{array}.$$

Rješenje:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 18,$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 6 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \ldots = 18, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 6 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \ldots = 36,$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \ldots = -18 \qquad \Rightarrow x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_3 = -1.$$

□

Za opći slučaj ($m \neq n$) imamo **Kronecker-Capellijev teorem**: Sustav je suglasan $\Leftrightarrow$ rang matrice sustava jednak je rangu proširene matrice sustava.

4.5.2 Gaussova metoda

Zadatak 91 *Gaussovom metodom riješite sustav:*

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 1 \\ 2x_1 & - & x_2 & & & - & 3x_4 & = & 2 \\ 3x_1 & & & - & x_3 & + & x_4 & = & -3 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & - & 2x_3 & + & 5x_4 & = & -6 \end{array}.$$

Rješenje:

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 2 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & -3 & 2 \\ 3 & 0 & -1 & 1 & -3 \\ 2 & 2 & -2 & 5 & -6 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrrr|r} 2 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -5 & 5 & -9 \\ 0 & 3 & -3 & 6 & -7 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{rrrr|r} 2 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -5 & 5 & -9 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrrr|r} 2 & -1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 15 & -14 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{rrrr|r} 2 & -1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & -14/3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4/3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrrr|r} 2 & -1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 5/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4/3 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 5/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4/3 \end{array}\right] \quad \Rightarrow \begin{array}{rcr} x_1 & = & 0 \\ x_2 & = & 2 \\ x_3 & = & 5/3 \\ x_4 & = & -4/3 \end{array}.$$

□

Zadatak 92 *Gaussovom metodom riješite sustav:*

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & - & 4x_4 & = & 4 \\ & & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & -3 \\ x_1 & + & 3x_2 & & & - & 3x_4 & = & 1 \\ & - & 7x_2 & + & 3x_3 & + & x_4 & = & -3 \end{array}.$$

Rješenje:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & | & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & | & -3 \\ 1 & 3 & 0 & -3 & | & 1 \\ 0 & -7 & 3 & 1 & | & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & | & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & | & -3 \\ 0 & 5 & -3 & 1 & | & -3 \\ 0 & -7 & 3 & 1 & | & -3 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 & | & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & | & -3 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & | & 12 \\ 0 & 0 & -4 & 8 & | & -24 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 & | & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & | & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & | & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & | & -8 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & | & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & | & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \begin{array}{rcr} x_1 & = & -8 \\ x_2 & = & 3+t \\ x_3 & = & 6+2t \\ x_4 & = & t \end{array}, \quad t \in \mathbf{R}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ 3 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbf{R}.$$

$\square$

Zadatak 93 *Diskutirajte sustav*

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 0 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & + & ax_2 & - & 2x_3 & = & 2 \end{array}$$

u ovisnosti o parametru a.

Rješenje:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & | & 0 \\ 2 & -1 & 1 & | & 1 \\ 2 & a & -2 & | & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & -3 & 3 & | & 1 \\ 0 & a-2 & 0 & | & 2 \end{bmatrix}$$

Ako je $a = 2$ sustav je nesuglasan ($r(A) < r(Ab)$). Ako je $a \neq 2$ računamo dalje

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & -3 & 3 & | & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & 2/(a-2) \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & | & -2/(a-2) \\ 0 & 0 & 3 & | & (a+4)/(a-2) \\ 0 & 1 & 0 & | & 2/(a-2) \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & | & -2/(a-2) \\ 0 & 0 & 1 & | & (a+4)/3(a-2) \\ 0 & 1 & 0 & | & 2/(a-2) \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 & | & 2/(a-2) \\ 0 & 0 & 1 & | & (a+4)/3(a-2) \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{rcr} x_1 & = & 1/3 \\ x_2 & = & 2/(a-2) \\ x_3 & = & (a+4)/3(a-2) \end{array}.$$

□

Zadatak 94 *Diskutirajte sustav*

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 1 \\ x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 & = & a \\ 3x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & & & = & 4 \end{array}$$

u ovisnosti o parametru a.

Rješenje:

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 2 & 3 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 & a \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 4 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 2 & -1 & a \\ 2 & 3 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 4 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 2 & -1 & a \\ 0 & 5 & -5 & 3 & 1-2a \\ 0 & 5 & -5 & 3 & 4-3a \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 2 & -1 & a \\ 0 & 5 & -5 & 3 & 1-2a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3-a \end{array}\right].$$

Ako je $a \neq 3$ sustav je nesuglasan, a ako je $a = 3$ sustav je suglasan i neodređen. □

Zadatak 95 *Riješite matričnu jednadžbu $AX = B$ ako je $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.*

Rješenje:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & = & 1 \\ 3x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 2 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 2 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 5 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & -2 & 1 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 5 & 1 & 0 & 3 \\ 13 & 0 & 1 & 8 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \begin{array}{rcr} x_1 & = & t \\ x_2 & = & 3-5t \\ x_3 & = & 8-13t \end{array} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 8 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \\ -13 \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbf{R}.$$

□

Zadatak 96 *Riješite matričnu jednadžbu* $XA^8 + A^* = XA - A^{11}$ *ako je* $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Rješenje:

$$X(A^8 - A) = -A^* - A^{11}, \quad A^* = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I \text{ za parne potencije}$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = A \text{ za neparne potencije}$$

$$\Rightarrow A^8 - A = I - A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow \det(A^8 - A) = 0 \Rightarrow (A^8 - A)^{-1}$ ne postoji pa rješavamo sustav $X(I - A) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{array}{rcrcl} x_{11} & - & x_{12} & = & 0 \\ -x_{11} & + & x_{12} & = & 0 \\ x_{21} & - & x_{22} & = & 0 \\ -x_{21} & + & x_{22} & = & 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow x_{11} = x_{12} = a, \Rightarrow x_{21} = x_{22} = b \Rightarrow X = \begin{bmatrix} a & a \\ b & b \end{bmatrix}, \quad a, b \in \mathbf{R}.$$

□

5 Funkcije dviju i više varijabla

Funkcije čije je područje definicije (domena) podskup jednog od sljedećih skupova

$$\mathbf{R}^2 = \{(x, y)\,; x, y \in \mathbf{R}\}$$

$$\mathbf{R}^3 = \{(x, y, z)\,; x, y, z \in \mathbf{R}\}$$

$$\mathbf{R}^4 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4)\,; x_i \in \mathbf{R},\ i = 1, 2, 3, 4\}$$

nazivamo funkcijama dviju, tri ili četiri varijabla.

Primjer 3 *1.* $f(x, y) = xy$, $\mathbf{R}^2 \ni (x, y) \mapsto x \cdot y$.

2. $f(x,y) = \operatorname{arctg}\frac{x}{y}$; $f(x,x) = \frac{\pi}{4}$

3. $f(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

4.

$$f(x,y,z) = ax + by + cz = \begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

5.

$$P = c\frac{T}{V},$$

P tlak, T temperatura, V volumen.

6.

$$D = \sqrt{a^2+b^2+c^2},$$

D prostorna dijagonala kvadra sa bridovima a, b, c.

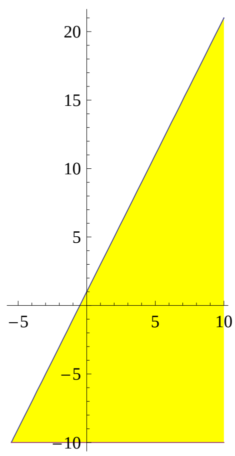
5.1 Domena funkcije dvije varijable

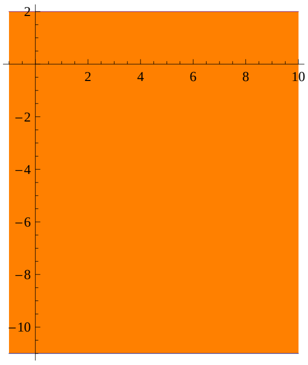
Ako je zadano pridruživanje $(x,y) \mapsto z = f(x,y)$, onda se skup

$$D = \{(x,y)\ ;\ f(x,y) \in \mathbf{R}\} \subseteq \mathbf{R}^2$$

naziva (prirodnom) domenom funkcije f.

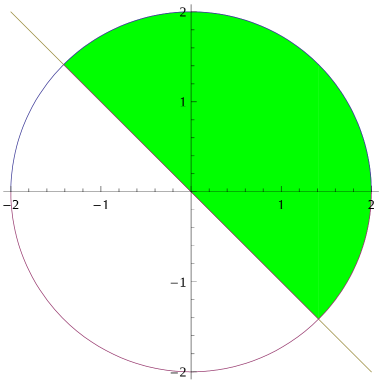
Zadatak 97 *Odredite domenu funkcije* $f(x,y) = \ln(2x - y + 1)$.
Rješenje: $2x - y + 1 > 0$





Zadatak 98 *Odredite domenu funkcije* $f(x, y) = \sqrt{x+1} + \frac{1}{\sqrt[4]{2-y}}$.
Rješenje: $x \geq 1, \; y < 2$

Zadatak 99 *Odredite domenu funkcije* $f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2} + \ln(x + y)$.
Rješenje: $x^2 + y^2 \leq 4, \; x + y > 0$

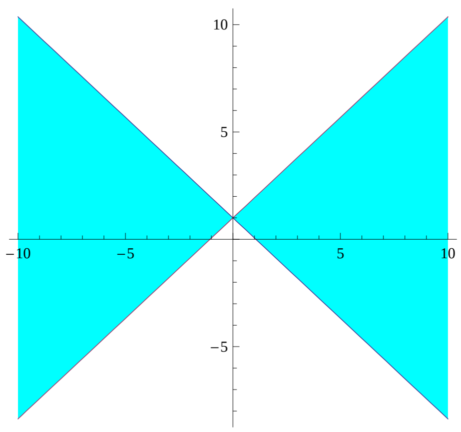


Zadatak 100 *Odredite domenu funkcije* $f(x, y) = \arccos \frac{y-1}{x}$. *Odredite što su nivo-krivulje (ekvipotencijalne krivulje) ove funkcije.*

Rješenje: $\quad -1 \leq \frac{y-1}{x} \leq 1 \Rightarrow \frac{y-1+x}{x} \geq 0, \; \frac{y-1-x}{x} \leq 0$

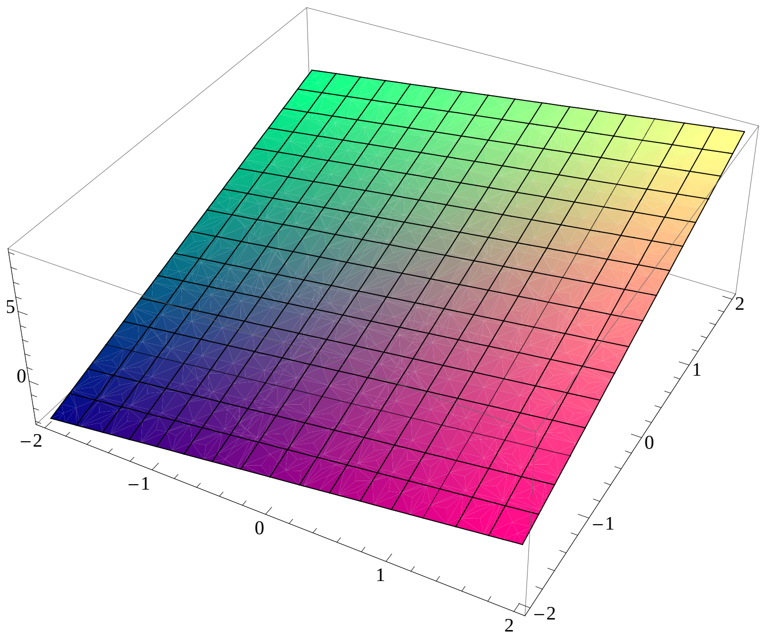
$$c = \arccos \frac{y-1}{x} \Rightarrow y = \cos c \cdot x + 1 \Rightarrow \text{ ekvipotencijalne krivulje su pravci.}$$

$\square$



5.2 Plohe i krivulje u $\mathbb{R}^3$

Plohe prvog reda: ravnina (graf afine (linearne) funkcije dviju varijabla)



Plohe drugog reda: Vidi http://www.pbf.hr/matematika/matematika2/plohe.pdf
Pravac u prostoru: - krivulja (parametarsko zadavanje, ne kao graf funkcije)

5.3 Diferencijalni račun funkcija dviju ili više varijabla

5.3.1 Parcijalne derivacije prvog reda

Neka je $f : D \to \mathbf{R}$, $D \subseteq \mathbf{R}^2$ dana funkcija dviju varijabli: $D \ni (x, y) \mapsto f(x, y)$ i $(x_0, y_0) \in D$. Parcijalne derivacije prvog reda su definirane sa:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}.$$

Primjetimo da iz definicije parcijalnih derivacija slijedi da su to "obične" derivacije funkcija jedne varijable

$$x \mapsto f(x, y_0),$$

$$y \mapsto f(x_0, y),$$

pa se nasljeđuju i osnovna pravila deriviranja (zbroja, produkta, kvocjenta, kompozicije).

Također iz geometrijske interpretacije derivacije funkcije jedne varijable neposredno slijedi da je jednadžba tangente (tangencijalni pravac) na krivulju dobivenu presjekom plohe (grafa funkcije f) $z = f(x, y)$ i ravnine $y = y_0$ u točki $(x_0, y_0, f(x_0, y_0)$ dana sa

$$t_1 \ldots \frac{x - x_0}{1} = \frac{y - y_0}{0} = \frac{z - f(x_0, y_0)}{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)}.$$

Na isti način se dobije jednadžba tangencijalnog pravca na krivulju koja je presjek plohe $z = f(x, y)$ i ravnine $x = x_0$ u točki $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$:

$$t_2 \ldots \frac{x - x_0}{0} = \frac{y - y_0}{1} = \frac{z - f(x_0, y_0)}{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)}.$$

Zadatak 101 *Po definiciji odredite* $\frac{\partial f}{\partial x}(4, -1)$ *i* $\frac{\partial f}{\partial y}(4, -1)$ *ako je* $f(x, y) = \sqrt{1 - 2xy}$.

Rješenje:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(4, -1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(4 + \Delta x, -1) - f(4, -1)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{1 - 2(4 + \Delta x)(-1)} - \sqrt{1 - 2 \cdot 4 \cdot (-1)}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{9 + 2\Delta x} - 3}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{9 + 2\Delta x - 9}{\Delta x(\sqrt{9 + 2\Delta x} + 3)} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2}{\sqrt{9 + 2\Delta x} + 3} = \frac{1}{3}.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(4, -1) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(4, -1 + \Delta y) - f(4, -1)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\sqrt{1 - 2 \cdot 4 \cdot (-1 + \Delta y)} - 3}{\Delta y}$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\sqrt{9 - 8\Delta y} - 3}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{-8\Delta y}{\Delta y(\sqrt{9 - 8\Delta y} + 3)} = -\frac{4}{3}.$$

□

Zadatak 102 *Po definiciji parc. derivacije odredite funkcije* $(x, y) \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$, $(x, y) \mapsto \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ *ako je* $f(x, y) = e^{x+2y}$.

Rješenje:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{(x+\Delta x)+2y} - e^{x+2y}}{\Delta x}$$

$$= e^{x+2y} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = e^{x+2y}.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{e^{x+2(y+\Delta y)} - e^{x+2y}}{\Delta y}$$

$$= e^{x+2y} \lim_{\Delta y \to 0} \frac{e^{2\Delta y} - 1}{\Delta y} = e^{x+2y} 2 \lim_{\Delta y \to 0} \frac{e^{2\Delta y} - 1}{2\Delta y} = 2e^{x+2y}.$$

□

Zadatak 103 *Koristeći tablično deriviranje odredite* $\frac{\partial z}{\partial x}$ *i* $\frac{\partial z}{\partial y}$ *ako je a)* $z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$ *b)* $z = x^y$.

Rješenje: a)

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \left(-\frac{y}{x^2}\right) = -\frac{y}{x^2 + y^2}.$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \left(\frac{1}{x}\right) = \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

b)

$$\frac{\partial z}{\partial x} = yx^{y-1},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^y \ln x.$$

□

Zadatak 104 *Odredite* $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial z}$, *ako je*

$$f(x,y,z) = x^{y^z}.$$

Rješenje:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y^z \cdot x^{y^z - 1},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^{y^z} \ln x \cdot z y^{z-1} = x^{y^z} y^{z-1} z \ln x,$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = x^{y^z} \ln x \cdot y^z \ln y.$$

□

Zadatak 105 *odredite* $\frac{\partial z}{\partial x}$ *i* $\frac{\partial z}{\partial y}$ *ako je* $z(x,y) = x \ln(xy)$.

Zadatak 106 *Provjerite zadovoljava li funkcija* $z = \ln(x^2 + xy + y^2)$ *parcijalnu dif. jedn.*

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 2.$$

Rješenje: Kako je

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{x^2 + xy + y^2}(2x + y),$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{x^2 + xy + y^2}(x + 2y),$$

to se uvrštavanjem dobije:

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = x\frac{1}{x^2 + xy + y^2}(2x+y) + y\frac{1}{x^2 + xy + y^2}(x+2y) = \frac{2(x^2 + xy + y^2)}{x^2 + xy + y^2} = 2.$$

□

Zadatak 107 *a) Odredite jednadžbu tangente krivulje koja je presjek ploha* $z = \frac{x^2}{y^2-3}$, $y = 2$ *u točki* $T(3,2,9)$. *b) Odredite jednadžbu tangente krivulje koja je presjek ploha* $z = \frac{x^2}{y^2-3}$, $x = 3$ *u točki* $T(3,2,9)$.

Rješenje: a) Kako je $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{y^2-3}$, to je $\frac{\partial z}{\partial x}(3,2) = \frac{2 \cdot 3}{2^2-3} = 6$, pa tražena jednadžba tangente glasi

$$t_1 \ldots \frac{x-3}{1} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-9}{6}.$$

b) Kako je $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-x^2 2y}{(y^2-3)^2}$, to je $\frac{\partial z}{\partial y}(3,2) = \frac{-9 \cdot 2 \cdot 2}{(2^2-3)^2} = -36$, pa tražena jednadžba tangente glasi

$$t_2 \ldots \frac{x-3}{0} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-9}{-36}.$$

□

5.3.2 Parcijalne derivacije drugog i viših redova. Schwarzov teorem.

Parcijalnim deriviranjem funkcije dviju varijabli $f : D \to \mathbf{R}$, $D \subseteq \mathbf{R}^2$ dobivamo dvije nove funkcije dviju varijabla

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y).$$

Parcijalno derivirajući svaku od tih funkcija po obje varijable dobivamo četiri parcijalne derivacije drugog reda:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x,y), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x,y),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x,y), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x,y).$$

Primjer 4 *Odredimo sve parcijalne derivacije drugog reda funkcije $f(x,y) = x^3 + 5x^2y + 7xy^2$.*
Odredimo prvo parcijalne derivacije prvog reda:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + 10xy + 7y^2, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 5x^2 + 14xy.$$

Ponovnim parcijalnim deriviranjem dobivamo:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = 6x + 10y, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = 10x + 14y,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = 10x + 14y, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = 14x.$$

Primjetimo da smo u gornjem primjeru dobili jednakost funkcija (mješovitih parcijalnih derivacija)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}.$$

Dobivena jednakost vrijedi i općenitije što je izraženo u sljedećem teoremu:

Teorem 7 (Schwarzov teorem) *Ako su mješovite parcijalne derivacije $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$ i $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$ neprekidne na $D \subseteq \mathbf{R}^2$, onda je*

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x,y).$$

Napomenimo da Schwarzov teorem govori o nezavisnosti o poretku parcijalnog deriviranja, što ćemo i podrazumjevati kod definiranja parcijalnih derivacija viših redova.

Parcijalne derivacije trećeg reda dobivamo parcijalnim deriviranjem svih parcijalnih derivacija drugog reda (ne uvažavajući Schwarzov teorem dobili bi osam parcijalnih derivacija trećeg reda, 16 parc. der. četvrtog reda itd.) U uvjetima Schwarzovog teorem imamo sljedeće 4 parcijalne derivacije trećeg reda:

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2}, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x}, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}.$$

Analogno definirajući parcijalne derivacije četvrtog reda, sve parcijalne derivacije četvrtog reda glase:

$$\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}, \quad \text{sva četiri puta deriviramo po varijabli} \quad x,$$

$$\frac{\partial^4 f}{\partial y \partial x^3}, \text{ tri puta deriviramo po varijabli } x, \text{ jednom po var. } y, \text{ neovisno o poretku,}$$

$$\frac{\partial^4 f}{\partial y^2 \partial x^2}, \text{ dva puta deriviramo po varijabli } x, \text{ dva puta po var. } y, \text{ neovisno o poretku,}$$

$$\frac{\partial^4 f}{\partial y^3 \partial x}, \text{ jednom deriviramo po varijabli } x, \text{ tri puta po var. } y, \text{ neovisno o poretku,}$$

$$\frac{\partial^4 f}{\partial y^4}, \quad \text{sva četiri puta deriviramo po varijabli} \quad y.$$

Napomena 1 *Koliko različitih parcijalnih derivacija četvrtog reda bez uvažavanja Schwarzovog teorema daje istu parcijalnu derivaciju četvrtog reda uvažavajući Schwarzov teorem za svaki od gornjih slučajeva? Odgovorite na isto pitanje i za parcijalne derivacije petog i viših redova.*

Zadatak 108 *Ispitajte jednakost u Schwarzovom teoremu za funkcije a)* $f(x,y) = \ln(x^2 - y)$ *b)* $f(x,y) = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$.

Zadatak 109 *Pokažite da je funkcija* $f(x,y) = \ln(x^2 + y^2)$ *harmonijska funkcija tj. da zadovoljava Laplaceovu parc. dif. jedn.*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

Zadatak 110 *Pokažite da je funkcija*

$$f(x,y,z)=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

harmonijska u $\mathbf{R}^3\setminus\{(0,0,0)\}$ *tj. da zadovoljava Laplaceovu dif. jedn.*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=0$$

za svaki $(x,y,z)\neq(0,0,0)$.

Zadatak 111 *Odredite vrijednost svih parcijalnih derivacija četvrtog reda funkcija a)* $f(x,y)=x^4$ *b)* $f(x,y)=x^3y$ *c)* $f(x,y)=x^2y^2$ *c)* $f(x,y)=xy^3$ *d)* $f(x,y)=y^4$ *u* $O(0,0)$.

Zadatak 112 *Odredite koja je parcijalna derivacija desetog reda funkcije* $f(x,y)=x^7y^3$ *u* $O(0,0)$ *različita u 0, te izračunajte njezinu vrijednost.*

5.3.3 Diferencijali funkcije dviju varijabla. Linearne i kvadratne aproksimacije.

Prisjetimo se da prvi diferencijal predstavlja linearni dio (totalnog) prirasta funkcije (linearan u smislu linearnosti prirasta nezavisne varijable) i za funkciju jedne varijable $y=y(x)$ u x_0 defiran je sa $dy=y'(x_0)dx$. Motivacija za takvo uvođenje prvog diferencijala se vidi iz jednadžbe tangente $y-y(x_0)=y'(x_0)(x-x_0)$ (zamjeni se $y-y_0$ sa dy, a $x-x_0$ sa $dx=\Delta x$. Totalni ili prvi diferencijal funkcije $z=z(x,y)$ u (x_0,y_0) definiran je sa:

$$dz(x_0,y_0)=\frac{\partial z}{\partial x}(x_0,y_0)dx+\frac{\partial z}{\partial y}(x_0,y_0)dy.$$

Navedeni oblik prvog diferencijala kao linearnog dijela totalnog prirasta $\Delta z(x_0,y_0)=z(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-z(x_0,y_0)$ dobiven je iz jednadžbe tangencijalne ravnine

$$\pi\ldots z-z(x_0,y_0)=\frac{\partial z}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0)+\frac{\partial z}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)$$

na plohu $z=z(x,y)$ u točki (x_0,y_0).

Napomena 2 *Tangencijalna ravnina očito sadrži tangencijalne pravce* t_1 *i* t_2 *(v. definiciju parcijalnih derivacija) čiji su vektori smjera* $\vec{s_1}=\vec{i}+$

$\frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0)\vec{k}$ i $\vec{s_2} = \vec{j} + \frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0)\vec{k}$. Kako je u tom slučaju vektor normale tangencijalne ravnine

$$\vec{n} = \vec{s_1} \times \vec{s_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & \frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0) \\ 0 & 1 & \frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0) \end{vmatrix} = -\frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0)\vec{i} - \frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0)\vec{j} + \vec{k}$$

uvrštavanjem u opći oblik jednadžbe ravnine

$$-\frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) - \frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) + 1(z - z_0) = 0$$

odakle slijedi navedena jednadžba tangencijalne ravnine

$$\pi \ldots z - z(x_0, y_0) = \frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Zadatak 113 *Odredite prvi diferencijal funkcije $z = \arcsin \frac{x}{y}$. Zapišite totalni prirast funkcije z u točki $T(1, 2)$. Izračunajte (koristeći kalkulator) vrijednost tog totalnog prirasta za prirast nezavisnih varijabli $\Delta x = 0.2$, $\Delta y = -0.3$. Odredite dobiveni prvi diferencijal u $T(1, 2)$, te njegovu vrijednost za $\Delta x = 0.2$, $\Delta y = -0.3$.*

Rješenje:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{y^2}}} \cdot \frac{1}{y} = \frac{1}{\sqrt{y^2 - x^2}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{y^2}}} \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right) = -\frac{x}{y\sqrt{y^2 - x^2}}$$

$$\Rightarrow dz = \frac{1}{\sqrt{y^2 - x^2}}dx - \frac{x}{y\sqrt{y^2 - x^2}}dy.$$

$$\Delta z(1, 2) = z(1+\Delta x, 2+\Delta y) - z(1, 2) = \arcsin \frac{1 + \Delta x}{2 + \Delta y} - \arcsin \frac{1}{2} = \arcsin \frac{1 + \Delta x}{2 + \Delta y} - \frac{\pi}{6}.$$

Uvrštavanjem $\Delta x = 0.2$, $\Delta y = -0.3$ dobije se

$$\Delta z(1, 2) = \arcsin \frac{1 + 0.2}{2 - 0.3} - \frac{\pi}{6} = 0.26033.$$

Uvrštavanjem $T(1, 2)$ u gornji oblik prvog diferencijala dobije se

$$dz(1, 2) = \frac{\sqrt{3}}{3}dx - \frac{\sqrt{3}}{6}dy,$$

što za $dx = \Delta x = 0.2$, $dy = \Delta y = -0.3$ daje

$$dz(1,2) = \frac{\sqrt{3}}{3}0.2 - \frac{\sqrt{3}}{6}(-0.3) = 0.20207.$$

$\square$

Primjena prvog diferencijala kao linearne aproksimacije:

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) \approx f(x, y) + \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y,$$

gdje su Δx i Δy "male" vrijednosti.

Zadatak 114 *Za koliko se približno promjeni volumen kružnog valjka ($r = 3cm$, $H = 5cm$) ako se polumjer baze uveća za $0.02cm$, a visina smanji za $0.01mm$.*

Rješenje:

$$V = r^2\pi H \Rightarrow \Delta V \approx dV = \frac{\partial V}{\partial r}\Delta r + \frac{\partial V}{\partial H}\Delta H,$$

pa iz $\frac{\partial V}{\partial r} = 2r\pi H$, $\frac{\partial V}{\partial H} = r^2\pi$ i $\Delta r = 0.02$, $\Delta H = -0.001$ imamo

$$\Delta V = 2 \cdot 3 \cdot \pi \cdot 5 \cdot 0.02 + 3^2\pi(-0.001) = 0.591\pi.$$

$\square$

Zadatak 115 *Približno pomoću prvog diferencijala (linearne aproksimacije) odredite* $\sqrt[3]{5.9 + \sqrt{4.2}}$.

Rješenje:

$$z = \sqrt[3]{x + \sqrt{y}},\ x = 6,\ y = 4,\ \Delta x = -0.1,\ \Delta y = 0.2,$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x + \sqrt{y})^2}},\ \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x + \sqrt{y})^2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}}$$

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{5.9 + \sqrt{4.2}} &\approx \sqrt[3]{6 + \sqrt{4}} + \frac{1}{3\sqrt[3]{(6 + \sqrt{4})^2}} \cdot (-0.1) + \frac{1}{3\sqrt[3]{(6 + \sqrt{4})^2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{4}}(0.2) \\ &= 2 - \frac{0.1}{12} + \frac{0.2}{48} = 1.9958. \end{aligned}$$

$\square$

Viši diferencijali (diferencijali višeg reda): Viši diferencijali se definiraju induktivno ili rekurzivno. Npr. drugi diferencijal jest:

$$d^2z(x_0, y_0) = d(dz)(x_0, y_0) = d\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right)(x_0, y_0)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right)(x_0, y_0)dx + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right)(x_0, y_0)dy,$$

što korištenjem Schwarzovog teorema daje oblik drugog diferencijala

$$d^2z(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(x_0, y_0)dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(x_0, y_0)dy^2$$

Općenito:

$$d^n z = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^n z = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\frac{\partial^n}{\partial x^{n-i}\partial y^i}dx^{n-i}dy^i.$$

Više diferencijale kao i kod funkcija jedne varijable, koristimo u aproksimacijama viših redova:
Kvadratna aproksimacija:

$$\Delta z(x_0, y_0) \approx dz(x_0, y_0) + \frac{1}{2!}d^2z(x_0, y_0).$$

Kubna aproksimacija:

$$\Delta z(x_0, y_0) \approx dz(x_0, y_0) + \frac{1}{2!}d^2z(x_0, y_0) + \frac{1}{3!}d^3z(x_0, y_0).$$

Zadatak 116 *Izračunajte diferencijal drugog reda d^2z za funkciju $z = e^{xy}$. Odredite $d^2z(0,0)$. Izračunajte vrijednost drugog diferencijala funkcije $z = z(x, y)$ u $O(0,0)$ za $\Delta x = -0.2$, $\Delta y = 0.4$.*

Rješenje:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^{xy} \cdot y = ye^{xy}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = e^{xy} \cdot x = xe^{xy}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = y^2e^{xy}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = e^{xy} + xye^{xy}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x^2e^{xy}$$

$$\Rightarrow d^2z = y^2e^{xy}dx^2 + 2(e^{xy} + xye^{xy})dxdy + x^2e^{xy}dy^2.$$

Sada $d^2z(0,0) = 2dxdy$ pa za $\Delta x = -0.2$, $\Delta y = 0.4$ imamo $d^2z(0,0) = 2(-0.2)(0.4) = -0.16$. □

Zadatak 117 *Koristeći linearnu, kvadratnu i kubnu aproksimaciju odredite približne vrijednosti od* $\sin 1 \cdot \ln 1.2$.

Rješenje: Uzmimo $z(x,y) = \sin x \ln y$ pa je onda

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \cos x \ln y,\ \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\sin x}{y},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\sin x \ln y,\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\cos x}{y},\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{\sin x}{y^2},$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = -\cos x \ln y,\ \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = -\frac{\sin x}{y},\ \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = -\frac{\cos x}{y^2},\ \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} = \frac{2\sin x}{y^3}.$$

Kako je $x_0 = \frac{\pi}{3}$, $\Delta x = 1 - \frac{\pi}{3} \approx -0.05$, $y_0 = 1$, $\Delta y = 0.2$ imamo:
linearna aproksimacija:

$$\sin 1 \cdot \ln 1.2 \approx \sin\frac{\pi}{3}\ln 1 + \cos\frac{\pi}{3}\ln 1(-0.05) + \frac{\sin\frac{\pi}{3}}{1}\cdot 0.2 = 0.1732,$$

kvadratna aproksimacija:

$$\begin{aligned} & \sin 1 \cdot \ln 1.2 \approx 0.1732 \\ + & \ \frac{1}{2}\left(-\sin\frac{\pi}{3}\ln 1(-0.05)^2 + 2\frac{\cos\frac{\pi}{3}}{1}(-0.05)\cdot 0.2 - \frac{\sin\frac{\pi}{3}}{1^2}\cdot 0.2^2\right) \\ = & \ 0.1732 - 0.0223 = 0.1509, \end{aligned}$$

kubna aproksimacija:

$$\begin{aligned} & \sin 1 \cdot \ln 1.2 \approx 0.1509 \\ + & \ \frac{1}{6}\left(-\cos\frac{\pi}{3}\ln 1(-0.05)^3 - 3\frac{\sin\frac{\pi}{3}}{1}(-0.05)^2\cdot 0.2 - 3\frac{\cos\frac{\pi}{3}}{1^2}(-0.05)\cdot 0.2^2 + \frac{2\sin\frac{\pi}{3}}{1^3}\cdot 0.2^3\right) \\ = & \ 0.1509 + 0.0026 = 0.1535. \end{aligned}$$

□

5.3.4 Derivacija složene funkcije (”lančano pravilo”)

1. $z = f(x(t), y(t))$
$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}$$

2. $z = f(x(u,v), y(u,v))$
$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}, \qquad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}.$$

Zadatak 118 *Odredite* $\frac{dz}{dt}$ *za* $z = x^2 + 3xy + 5y^2, \quad x = \sin t, \quad y = \cos t.$

Rješenje: Iz $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + 3y,\ \frac{\partial z}{\partial y} = 3x + 10y,\ \frac{dx}{dt} = \sin t$ i $\frac{dy}{dt} = -\cos x$ imamo

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= (2x + 3y)\sin t + (3x + 10y)(-\sin t) \\ &= (2\sin t + 3\cos t)\cos t - (3\sin t + 10\cos t)\sin t \\ &= 3\cos 2t - 4\sin 2t. \end{aligned}$$

□

Zadatak 119 *Izračunajte* $\frac{\partial z}{\partial u}$ *i* $\frac{\partial z}{\partial v}$ *za* $z = x^2+xy+y^2$ *i* $x = 2u+v,\ y = u-2v.$

Rješenje:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = (2x+y)\cdot 2 + (x+2y)\cdot 1 = 5x+4y = 5(2u+v)+4(u-2v) = 14u-3v,$$

$$\frac{\partial z}{\partial u} = (2x+y)\cdot 1 + (x+2y)\cdot(-2) = -3y = -3(u-2v) = -3u+6v.$$

□

Zadatak 120 *Predmet se kreće po krivulji* $x = 2 + 3t,\ y = t^2 + 4.$ *Kojom brzinom se mijenja udaljenost predmeta od ishodišta kada je* $t = 1$*?*

Rješenje: U trenutku t predmet se nalazi u točki $T(x(t), y(t))$ i njena je udaljenost od ishodišta $z = \sqrt{x^2 + y^2}$. Brzinom s kojom se mijenja udaljenost predmeta od ishodišta je tada $\frac{\partial z}{\partial t}$, pa imamo

$$\frac{dz}{dt} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot 3 + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot 2t.$$

Za $t = 1$ je $x = 5$ i $y = 5$ pa slijedi

$$\left(\frac{dz}{dt}\right)_{t=1} = \frac{5}{\sqrt{50}}\cdot 3 + \frac{5}{\sqrt{50}}\cdot 2 = \frac{5\sqrt{2}}{2}.$$

□

Zadatak 121 *Transformirajte sljedeće PDJ u nove varijable* u *i* v *zadane sa* $u = x + y,\ v = xy$*:*

1. $x\frac{\partial z}{\partial x} - y\frac{\partial z}{\partial y} = 0.$
2. $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 0..$

Rješenje: Korištenjem lančanog pravila dobije se:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} + y\frac{\partial z}{\partial v},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} + x\frac{\partial z}{\partial v}.$$

1.) Uvrštavanjem dobivenih formula dobije se:

$$0 = x\frac{\partial z}{\partial x} - y\frac{\partial z}{\partial y} = x\left(\frac{\partial z}{\partial u} + y\frac{\partial z}{\partial v}\right) - y\left(\frac{\partial z}{\partial u} + x\frac{\partial z}{\partial v}\right) = (x-y)\frac{\partial z}{\partial u},$$

odakle se dobije

$$(x-y)\frac{\partial z}{\partial u} = 0,$$

pa zaključujemo da funkcija $z = z(x, y)$ (koja je rješenje razmatrane PDJ), osim na pravcu $y = x$, ima oblik $z = f(v) = f(xy)$. Provjerite to neposredno.
2.) Uvrštavanjem dobivenih formula dobije se:

$$0 = x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y} = x\left(\frac{\partial z}{\partial u} + y\frac{\partial z}{\partial v}\right)+y\left(\frac{\partial z}{\partial u} + x\frac{\partial z}{\partial v}\right) = (x+y)\frac{\partial z}{\partial u}+2xy\frac{\partial z}{\partial v} = u\frac{\partial z}{\partial u}+2v\frac{\partial z}{\partial v}.$$

Tražena transformirana PDJ sada glasi

$$u\frac{\partial z}{\partial u} + 2v\frac{\partial z}{\partial v} = 0.$$

□

Zadatak 122 *Transformirajte sljedeće PDJ u polarne koordinate:*

1. $x\frac{\partial z}{\partial y} - y\frac{\partial z}{\partial x} = 0$
2. $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 1$
3. $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = 1$
4. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$

Rješenje: Koristimo vezu $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$. Navedene parcijalne dif. jedn. moramo izraziti pomoću varijabli r i φ i funkcije $Z(r,\varphi) = z(x, y) = z(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$ (koja se često u "primjeni" označava istom oznakom z. Koristeći "lančano pravilo" dobije se:

$$\frac{\partial Z}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} = \cos\varphi\frac{\partial z}{\partial x} + \sin\varphi\frac{\partial z}{\partial y}$$

$$\frac{\partial Z}{\partial \varphi} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \varphi} = -r\sin\varphi\frac{\partial z}{\partial x} + r\cos\varphi\frac{\partial z}{\partial y}.$$

Kako u svim primjerima imamo izraze koji sadrže $\frac{\partial z}{\partial x}$ i $\frac{\partial z}{\partial y}$ riješimo gornji linearni sustav koristeći Cramerovo pravilo. Primjetimo prvo da je determinanta sustava jednaka

$$D = \begin{vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -r\sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r.$$

Odavde je

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial Z}{\partial r} & \sin\varphi \\ \frac{\partial Z}{\partial \varphi} & r\cos\varphi \end{vmatrix}}{r} = \cos\varphi\frac{\partial Z}{\partial r} - \frac{\sin\varphi}{r}\frac{\partial Z}{\partial \varphi}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\begin{vmatrix} \cos\varphi & \frac{\partial Z}{\partial r} \\ -r\sin\varphi & \frac{\partial Z}{\partial \varphi} \end{vmatrix}}{r} = \frac{\cos\varphi}{r}\frac{\partial Z}{\partial \varphi} + \sin\varphi\frac{\partial Z}{\partial r}.$$

1.) Korištenjem gornjih formula dobije se:

$$0 = x\frac{\partial z}{\partial y} - y\frac{\partial z}{\partial x} = r\cos\varphi\left(\frac{\cos\varphi}{r}\frac{\partial Z}{\partial \varphi} + \sin\varphi\frac{\partial Z}{\partial r}\right) - r\sin\varphi\left(\cos\varphi\frac{\partial Z}{\partial r} - \frac{\sin\varphi}{r}\frac{\partial Z}{\partial \varphi}\right)$$

$$= \frac{\partial Z}{\partial \varphi}$$

što znači da funkcija Z ovisi samo o radijalnoj komponenti r, tj. svaka funkcija z oblika $z(x,y) = f(\sqrt{x^2+y^2}) = g(x^2+y^2)$ je rješenje razmatrane PDJ. Provjerite to neposredno!

2.)Analogno:

$$1 = x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = r\cos\varphi\left(\cos\varphi\frac{\partial Z}{\partial r} - \frac{\sin\varphi}{r}\frac{\partial Z}{\partial \varphi}\right) + r\sin\varphi\left(\frac{\cos\varphi}{r}\frac{\partial Z}{\partial \varphi} + \sin\varphi\frac{\partial Z}{\partial r}\right) = r\frac{\partial Z}{\partial r},$$

odavde je

$$r\frac{\partial Z}{\partial r} = 1 \Leftrightarrow \frac{\partial Z}{\partial r} = \frac{1}{r} \Leftrightarrow Z(r,\varphi) = \ln r + F(\varphi),$$

pri čemu je F proizvoljna derivabilna funkcija. Kako je $r = \sqrt{x^2+y^2}$, $\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}$, to dobivamo da je svaka funkcija oblika

$$z(x,y) = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) + F(\operatorname{arctg}\frac{y}{x})$$

rješenje promatrane PDJ. Provjerite to neposredno!
3.) Uvrštavanjem i kvadriranjem se dobije

$$\left(\frac{\partial Z}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2 = 1.$$

4.) Čupavo. $\square$

5.3.5 Deriviranje implicite zadanih funkcija

Iz lančanog pravila slijede sljedeće formule za deriviranje implicite zadanih funkcija jedne ili više varijabla:

$$F(x,y) = 0 \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}.$$

Ako je funkcija $z = z(x,y)$ zadana implicite sa $F(x,y,z) = 0$, onda je

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}.$$

Zadatak 123 *Odredite $y'(x)$ za funkciju zadanu implicite s $yx^2 - e^y = 0$.*

Rješenje:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2xy, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = x^2 - e^y \Rightarrow y'(x) = -\frac{2xy}{x^2 - e^y}.$$

$\square$

Zadatak 124 *Odredite $\frac{\partial z}{\partial x}$ i $\frac{\partial z}{\partial y}$ za funkciju zadanu implicite s $x^2 - 2y^2 + z^2 - 4x + 2z - 5 = 0$. Izračunajte $\frac{\partial z}{\partial x}(1,0)$, $\frac{\partial z}{\partial y}(1,0)$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(1,0)$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(1,0)$*

Rješenje:

$$2x + 2z\frac{\partial z}{\partial x} - 4 + 2\frac{\partial z}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{4-2x}{2z+2} = \frac{2-x}{z+1},$$

$$-4y + 2z\frac{\partial z}{\partial y} + 2\frac{\partial z}{\partial y} = 0 \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{4y}{2z+2} = \frac{2y}{z+1}.$$

$\square$

5.3.6 Lokalni i globalni ekstremi funkcija dviju varijabli

Nužan uvjet: Ako funkcija f u $T_0(x_0, y_0)$ ima lokalni ekstrem, onda je $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$ (stacionarna ili kritična točka).
Dovoljni uvjeti: Neka je $T_0(x_0, y_0)$ stacionarna točka funkcije f tj. neka je $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$. Označimo sa

$$D(x_0, y_0) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) \end{vmatrix}$$

determinantu parcijalnih derivacija drugog reda u $T_0(x_0, y_0)$ (Hessian u $T_0(x_0, y_0)$). Razmatranjem predznaka drugog diferencijala (u ovisnosti o prirastima nezavisnih varijabli Δx i Δy) u $T_0(x_0, y_0)$ (primjetite da je prvi diferencijal u $T_(x_0, y_0)$ jednak 0) dobije se:

1. Ako je $D(x_0, y_0) > 0$, onda f u T_0 ima lokalni ekstrem. I to:
   (a) Ako je $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) > 0$, onda f u T_0 ima lokalni minimum.
   (b) Ako je $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) < 0$, onda f u T_0 ima lokalni maksimum
2. Ako je $D(x_0, y_0) < 0$, onda f u T_0 nema ekstrem (ima sedlastu točku)
3. Ako je $D(x_0, y_0) = 0$ treba ispitati predznak viših diferencijala.

Zadatak 125 *Odredite lokalne ekstreme funkcije* $z = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$.

Rješenje:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 - 4x + 4y = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 4y^3 + 4x - 4y = 0$$

$$\Rightarrow 4x^3 + 4y^3 = 0 \Rightarrow 4(x + y)(x^2 - xy + y^2) = 0 \Rightarrow x = -y$$
$$\Rightarrow T_1(0, 0, 0),\ T_2(\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 8),\ T_3(-\sqrt{2}, \sqrt{2}, 8).$$

Sada,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x^2 - 4,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 4,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 12y^2 - 4 \Rightarrow D = (12x^2 - 4)(12y^2 - 4) - 16,$$

pa za T_1, $D = 0$ što znači nema odluke, a za T_2 i T_3, $D = 384 > 0$ pa ekstrem postoji i kako je $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 20 > 0$ u tim je točkama minimum funkcije.
$\square$

Zadatak 126 *Odredite točku ravnine* $2x - y + 2z = 16$ *koja je najbliža ishodištu.*

Rješenje: Udaljenost neke točke $T(x, y, z)$ od ishodišta je $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, pa je dovoljno tražiti minimum od funkcije $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$. Kako je T točka u ravnini $2x - y + 2z = 16$ imamo

$$g(x, y, z) = f(x, z) = x^2+(2(x+z)-16)^2+z^2 = 5x^2+5z^2-64x-64z+8xz+256.$$

Sada,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 10x - 64 + 8z = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 10z - 64 + 8x = 0$$

$$\Rightarrow x = z = \frac{32}{9}, \Rightarrow T\left(\frac{32}{9}, -\frac{16}{9}, \frac{32}{9}\right).$$

Kako je

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 10, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = 8, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 10 \Rightarrow D = 100 - 64 = 36 > 0,$$

pa ekstrem postoji i zbog $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 10 > 0$ u točki T imamo minimum $d(OT) = \frac{16}{3}$. $\square$

Zadatak 127 *Zavod za pakiranje u nekoj tvornici dobio je zahtjev za proizvodnju pravokutnih (kvadarskih) kutija volumena 48dm*^{3}*, bez gornje strane, podijeljenih sa (uspravnom) pregradom na dva jednaka dijela. Odredite dimenzije kutije sa minimumom utroška materijala*

Rješenje: Neka su sa x, y, označene duljine bridova baze kutije pri čemu pregrada raspolavlja brid sa duljinom x. Neka je sa z označena duljina visine kutije. Sada je $V = xyz = 48$. Površina utrošenog materijala iznosi $O = xy + 2xz + 3yz$. Kako iz uvjeta za volumen dobijemo $z = \frac{48}{xy}$, uvrštavanjem u površinu dobijemo

$$O = xy + 2x\frac{48}{xy} + 3y\frac{48}{xy} = xy + \frac{96}{y} + \frac{144}{x}.$$

Funkcija čiju minimalnu vrijednost tražimo sada glasi

$$f(x, y) = xy + \frac{96}{y} + \frac{144}{x}.$$

Stacionarne točke: Parcijalnim deriviranjem se dobije:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y - \frac{144}{x^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x - \frac{96}{y^2}.$$

Izjednačavanjem sa 0 parcijalnih derivacija dobije se sustav

$$yx^2 = 144, \;\; xy^2 = 96,$$

što dijeljenjem daje

$$\frac{x}{y} = \frac{144}{96} = \frac{3}{2} \Rightarrow x = \frac{3}{2}y$$

što uvrštavanjem u prvu jednadžbu daje

$$y\left(\frac{3}{2}y\right)^2 = 144 \Rightarrow y^3 = 64 \Rightarrow y = 4.$$

Stacionarna točka: $T(6,4)$ tj. $x = 4dm$, $y = 6dm$.
Dovoljni uvjeti:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{288}{x^3} \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(6,4) = \frac{288}{6^3} = \frac{4}{3}.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 1 \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(6,4) = 1.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{192}{y^3} \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(6,4) = \frac{192}{64^3} = 3.$$

Odavde je vrijednost Hessiana u $T(6,4)$ jednaka $D(6,4) = \frac{4}{3} \cdot 3 - 1^2 = 3 > 0$. Zaključujemo da funkcija f u $T(6,4)$ ima lokalni ekstrem, a kako je $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(6,4) = \frac{4}{3} > 0$ zaključujemo da se radi o lokalnom minumumu. Kako je to jedini lokalni ekstrem radi se i o (globalnom) minumumu funkcije.
Zaključak: Optimalne dimenzije kutije su: $x = 6dm$, $y = 4dm$, $z = 2dm$. □

Zadatak 128 *Odredite lokalne ekstreme nenegativne funkcije $z = z(x,y)$ zadane implicite sa $x^2 - 2x + y^2 + 4y + z^2 + 2z = 0$.*

Zadatak 129 *Podijelite broj na tri pozitivna dijela tako da suma produkta po dva dijela bude najveća.*

Rješenje: Neka je $x + y + z = a$ pa tražimo maksimum funkcije $g(x,y,z) = xy + xz + yz$. Imamo

$$g(x,y,z) = f(x,y) = xy + x(a-x-y) + y(a-x-y) = -x^2 - y^2 - xy + xa + ay.$$

Sada,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -2x - y + a = 0, \;\; \frac{\partial f}{\partial y} = -2y - x + a = 0$$

$$\Rightarrow x = y = \frac{a}{3}, \Rightarrow T\left(\frac{a}{3}, \frac{a}{3}, \frac{a}{3}\right).$$

Kako je

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -1, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2 \Rightarrow D = 4 - 1 = 3 > 0,$$

pa ekstrem postoji i zbog $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -2 < 0$ u točki T imamo maksimum $\frac{a^2}{3}$. □

6 Obične diferencijalne jednadžbe

Obična diferencijalna $n-$tog reda dana je općenito izrazom

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0,$$

pri čemu se traži funkcija $y = y(x)$ koja uvrštavanjem u gornji izraz daje jednakost.

Ako se rješenje dade zapisati u obliku $f(x, y, C_1, C_2, \ldots, C_n) = 0$ (implicitni oblik) kažemo da je dobiveno opće rješenje. Ako se može opće rješenje je bolje zapisati u eksplicitnom obliku $y = f_1(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$.

Primjetite da se broj slobodnih konstanti u općem rješenju podudara sa redom dif. jednadžbe (red najviše derivacije koja se javlja u diferencijalnoj jednadžbi).

Zadatak 130 *Formirajte diferencijalnu jednadžbu čije opće rješenje je* $y = Cx^2 - x$.

Rješenje:

$$y' = 2Cx - 1 \Rightarrow C = \frac{y' + 1}{2x} \Rightarrow y = \frac{y' + 1}{2x} x^2 - x \Rightarrow xy' = 2y + x.$$

Dobivena dif. jednadžba je prvog reda, osim toga i linearna. □

Zadatak 131 *Formirajte diferencijalnu jednadžbu čije je opće rješenje* $y = C_1 x^3 + C_2 x + C_3$.

Rješenje: Kako dif. jedn. mora biti trećeg reda, derivirajmo tri puta dano rješenje. Dobije se:

$$y' = 3C_1 x^2 + C_2, \; y'' = 6C_1 x, \; y''' = 6C_1.$$

Eliminirajući C_1 iz zadnje dvije jednadžbe dobije se

$$y'' = xy'''.$$

I ova jednadžba je linerana. □

6.1 Obične difrencijalne jednadžbe prvog reda

6.1.1 Separacija varijabli

Ako se diferencijalna jednadžba prvog reda može zapisati u separiranom obliku

$$y' = f(x)g(y)$$

(u desnoj strani dif. jednadžbe smo separirali varijable) rješava se na sljedeći način:

$$y' = f(x)g(y) \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = f(x)g(y) \Leftrightarrow \frac{dy}{g(y)} = f(x)dx,$$

odakle se implicitni oblik rješenja dobije iz

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx$$

sa jednom slobodnom konstantom.

Zadatak 132 *Odredite opće rješenje diferencijalne jednadžbe* $(xy^2+y^2)dx+(x^2-x^2y)dy=0$.

Rješenje:

$$y^2(x+1)dx + x^2(1-y)dy = 0/ : x^2y^2 \Leftrightarrow \frac{x+1}{x^2}dx + \frac{1-y}{y^2}dy = 0$$

$$\Leftrightarrow \int \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right) dx + \int \left(\frac{1}{y^2} - \frac{1}{y}\right) dy = C \Leftrightarrow \ln x - \frac{1}{x} - \frac{1}{y} - \ln y = C$$

$$\Leftrightarrow \ln \frac{x}{y} - \frac{y+x}{xy} = C.$$

□

Zadatak 133 *Odredite opće rješenje diferencijalne jednadžbe* $2^{x+y}+3^{x-2y}y' = 0$.

Rješenje:

$$2^x2^ydx + 3^x3^{-2y}dy = 0/ : 2^y3^x \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x dx + \left(\frac{1}{18}\right)^y dy = 0$$

$$\Leftrightarrow \int \left(\frac{2}{3}\right)^x dx + \int \left(\frac{1}{18}\right)^y dy = C \Leftrightarrow \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^x}{\ln\frac{2}{3}} + \frac{\left(\frac{1}{18}\right)^y}{\ln\frac{1}{18}} = C$$

$$\Leftrightarrow \frac{2^x}{3^x(\ln 2 - \ln 3)} - \frac{1}{18^y \ln 18} = C.$$

□

Zadatak 134 *Pod izvjesnim uvjetima šećer se pretvara u dekstrozu brzinom koja je proporcionalna količini nepretvorene količine šećera. Ako, od 75 grama u momentu $t = 0$, 8 grama se pretvori za 30 minuta, odredite pretvorenu količinu šećera nakon 1.5 sati.*

Rješenje: Neka je x količina šećera pretvorena za t minuta. Tada je

$$\frac{dx}{dt} = k(75 - x) \Leftrightarrow \frac{dx}{75 - x} = kdt \Leftrightarrow \int \frac{dx}{75 - x} = k \int dt + C$$

$$\Leftrightarrow -\ln(75 - x) = kt + C.$$

U slučaju da ne znamo realne podatke (tj. da je $0 \leq x \leq 75$ opće rješenje bi morali zapisati u obliku $|x - 75| = C_1 e^{-kt}$, $C_1 > 0$. Za $t = 0$ imamo $x = 0$ pa je $-\ln 75 = C \Rightarrow -\ln(75 - x) = kt - \ln 75$.
Za $t = 30$ imamo $x = 8$ pa je $-\ln 67 = 30k - \ln 75 \Rightarrow 30k = \ln 75 - \ln 67 \Rightarrow k = 0.0038$. Dakle,

$$-\ln(75 - x) = 0.0038t - \ln 75 \Leftrightarrow \ln(75 - x) = \ln 75 - 0.0038t.$$

Sada, za $t = 90$ imamo

$$\ln(75 - x) = \ln 75 - 0.0038 \cdot 90 \Leftrightarrow \ln(75 - x) = \ln(75 \cdot e^{-0.342})$$

$$\Leftrightarrow 75 - x = 75 \cdot e^{-0.342} \Leftrightarrow x = 75(1 - e^{-0.342}) = 21.7 \text{ grama}.$$

□

6.1.2 Homogena diferencijalna jednadžba prvog reda

Ako se diferencijalna jednadžba dade zapisati u obliku

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

kažemo da je homogena. Svodi se na separaciju varijabli uvođenjem nove funkcije

$$z = \frac{y}{x} \Leftrightarrow y = xz$$

odakle slijedi $y' = z + xz'$ ili $dy = zdx + xdz$.

Zadatak 135 *Odredite opće rješenje diferencijalne jednadžbe* $y - xy' = y \ln \frac{x}{y}$.

Rješenje: Imamo

$$y' = \frac{y}{x}\left(1 - \ln\frac{x}{y}\right),$$

pa uvodimo

$$\frac{y}{x} = z \Rightarrow y = xz \Rightarrow y' = z + xz'$$

$$\Rightarrow z + xz' = z\left(1 - \ln\frac{1}{z}\right) \Leftrightarrow x\frac{dz}{dx} = z\ln z \Leftrightarrow \frac{dz}{z\ln z} = \frac{dx}{x}$$

$$\Leftrightarrow \int \frac{dz}{z\ln z} = \int \frac{dx}{x} + \ln C \Leftrightarrow \ln|\ln z| = \ln|x| + \ln C \Leftrightarrow \ln|\ln z| = \ln|Cx|$$

$$\Leftrightarrow \ln z = |Cx| \Leftrightarrow z = e^{|Cx|} \Rightarrow \frac{y}{x} = e^{|Cx|} \Leftrightarrow y = xe^{|Cx|}.$$

□

Zadatak 136 *Odredite opće rješenje diferencijalne jednadžbe* $xdy - ydx + xe^{-\frac{y}{x}}dx = 0$.

Rješenje:

$$xdy + (xe^{-\frac{y}{x}} - y)dx = 0/:x \Leftrightarrow dy + \left(e^{-\frac{y}{x}} - \frac{y}{x}\right)dx = 0.$$

Sada, uvodimo

$$\frac{y}{x} = z \Rightarrow y = xz \Rightarrow dy = zdx + xdz,$$

pa imamo

$$zdx + xdz + (e^{-z} - z)dx = 0 \Leftrightarrow xdz + e^{-z}dx = 0/:xe^{-z} \Leftrightarrow e^{z}dz + \frac{dx}{x} = 0$$

$$\Leftrightarrow e^{z} + \ln|x| = \ln C \Leftrightarrow e^{\frac{y}{x}} + \ln|x| = \ln C \Leftrightarrow e^{\frac{y}{x}} = \ln\frac{C}{|x|} \Leftrightarrow y = x\ln\ln\frac{C}{|x|},\ C > 0.$$

□

6.1.3 Linearna diferencijalna jednadžba prvog reda

Opći oblik linearne diferencijalne jednadžbe prvog reda je:

$$y' + f(x)y = g(x). \tag{4}$$

Ove diferencijalne jednadžbe se mogu rješiti Lagrangeovom metodom varijabilnih konstanti.

Prvi korak je da se rješi prikraćeni (homogeni, što nema nikakve veze sa homogenim dif. jednadžbama prethodno obrađenim) oblik tj. dif jednadžba

$$y' + f(x)y = 0$$

koji se dade separirati i lako se vidi da je opće rješenje prikraćenog oblika

$$y = Ce^{-\int f(x)dx}.$$

Opće rješenje dif. jedn. (4) se sada traži u obliku

$$y = C(x)e^{-\int f(x)dx}.$$

Zadatak 137 *Odredite opće rješenje diferencijalne jednadžbe* $y' + 2xy = 2x^2e^{-x^2}$.

Rješenje: Prvo rješavamo jednadžbu $y' + 2xy = 0$, pa imamo

$$\frac{dy}{x}+2xy = 0 \Leftrightarrow dy+2xydx = 0/:y \Leftrightarrow \frac{dy}{y}+2xdx = 0 \Leftrightarrow \ln|y|+x^2 = \ln|C(x)|$$

$$\Leftrightarrow \frac{y}{C(x)} = e^{-x^2} \Leftrightarrow y = C(x)e^{-x^2}.$$

Sada imamo $y' = C'(x)e^{-x^2} + C(x)e^{-x^2}(-2x)$ pa ako to vratimo u polaznu jednadžbu imamo:

$$C'(x)e^{-x^2} - 2xC(x)e^{-x^2} + 2xC(x)e^{-x^2} = 2x^2e^{-x^2} \Leftrightarrow C'(x) = 2x^2$$

$$\Leftrightarrow C(x) = \frac{2}{3}x^3 + K \Rightarrow y = \left(\frac{2}{3}x^3 + K\right)e^{-x^2}.$$

$\square$

Zadatak 138 *Osnovano je novo poduzeće. Analiza tržišta predviđa da će brzina rasta dohotka poduzeća, u bilo kojem trenutku vremena t, biti proporcionalna razlici između stvarnog dohotka u tom trenutku t i gornje granice 10 000 000 kn. Također se predviđa da dohodak nakon 3 godine bude 4 000 000 kn. U početku ($t = 0$) dohodak je 0 kn.*

Odredite izraz kojim se može odrediti dohodak u bilo kojem trenutku t i odredite koliko će vremena proći dok dohodak dostigne iznos od 8 000 000 kn.

Rješenje: Neka je $A(t)$ dohodak poduzeća u trenutku t. Prema anlizi tržišta mora biti:

$$\frac{dA}{dt} = k(10 - A),$$

gdje je k konstanta proporcionalnosti, te je A u milijunima kuna.

Jednadžba $\frac{dA}{dt}+kA = 10k$ je linearna diferencijalna jednadžba prvog reda, pa prvo rješavamo

$$\frac{dA}{dt} + kA = 0 \Leftrightarrow \frac{dA}{A} + kdt = 0 \Leftrightarrow \ln A + kt = \ln C(t) \Leftrightarrow A(t) = C(t)e^{-kt}.$$

Sada imamo $A'(t) = C'(t)e^{-kt} - kC(t)e^{-kt}$ i onda

$$C'(t)e^{-kt} - kC(t)e^{-kt} + kC(t)e^{-kt} = 10k \Leftrightarrow C'(t) = 10ke^{kt} \Rightarrow C(t) = 10e^{-kt} + M.$$

Za rježenje diferencijalne jednadžbe sada imamo

$$A(t) = 10 + M \cdot e^{-kt}.$$

Konstantu M odredimo iz početnog uvjeta $(A(0) = 0)$:

$$0 = 10 + M \cdot e^{-kt} \Rightarrow M = -10 \Rightarrow A(t) = 10 - 10 \cdot e^{-kt}.$$

Kako je $A(3) = 4$ to je

$$4 = 10 - 10 \cdot e^{-kt} \Rightarrow k = 0.17,$$

pa je traženi izraz

$$A(t) = 10 - 10 \cdot e^{-0.17t}.$$

Sada, za $A = 8$ imamo

$$8 = 10 - 10 \cdot e^{-0.17t} \Rightarrow t = 9.47.$$

Znači, nakon približno 9.5 godina poduzeće će imati dohodak 8 000 000 kn.□

6.1.4 Bernoullijeva diferencijalna jednadžba prvog reda

$$y' + f(x)y = g(x)y^{\alpha}, \ \alpha \neq 0; \ \alpha \neq 1.$$

Primjetimo da za $\alpha = 0$ dobijemo linearnu diferencijalnu jednadžbu, a za $\alpha = 1$ dif. jedn. u kojoj možemo separirati varijable.

Supstitucijom (u smislu uvođenja nove funkcije) $z = y^{1-\alpha}$ dobivamo linearnu diferencijalnu jednadžbu prvog reda.

Zadatak 139 *Odredite opće rješenje diferencijalne jednadžbe* $y' - \frac{4}{x}y = x\sqrt{y}$.

Rješenje:

$$\alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow z = y^{1/2} \Rightarrow y = z^2 \Rightarrow y' = 2zz'.$$

Sada

$$2zz' - \frac{4}{x}z^2 = xz \Leftrightarrow z' - \frac{2z}{x} = \frac{x}{2}.$$

Prvo rješavamo

$$z' - \frac{2z}{x} = 0 \Leftrightarrow \frac{dz}{z} - 2\frac{dx}{x} = 0 \Leftrightarrow \ln|z| - 2\ln|x| = \ln|C(x)| \Leftrightarrow z = C(x)x^2.$$

Kako je $z' = C'(x)x^2 + 2C(x)x$ imamo

$$C'(x)x^2 + 2C(x)x - \frac{2C(x)x^2}{x} = \frac{x}{2} \Leftrightarrow C'(x) = \frac{1}{2x} \Rightarrow C(x) = \frac{1}{2}\ln|x| + K$$

$$\Rightarrow z = \left(\frac{1}{2}\ln|x| + K\right)x^2 \Rightarrow y = x^4\left(\ln|x| + K\right)^2.$$

□

6.1.5 Egzaktne diferencijalne jednadžbe (integriranje totalnog diferencijala)

Neka je diferencijalna jednadžba dana u obliku

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0.$$

Ako postoji funkcija $z = z(x,y)$ tako da je

$$dz = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

kažemo da je diferencijalna jednadžba egzaktna. Kako je dz po definiciji dan sa

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$$

to slijedi

$$\frac{\partial z}{\partial x} = P(x,y),\ \frac{\partial z}{\partial y} = Q(x,y).$$

Primjetiomo da odavde slijedi

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial P}{\partial y},\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x},$$

pa iz Schwarzovog teorema dobijemo nužan uvjet za egzaktnost tj.

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

U tom slučaju možemo naći funkciju $z = z(x, y)$ tako da je

$$dz = P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$

pa opće rješenje dobijemo u implicitnom obliku

$$z(x, y) = C.$$

Zadatak 140 *Odredite integralne krivulje diferencijalne jednadžbe* $(y+3)dx+(x+1)dy = 0$. *Odredite onu integralnu krivulju koja prolazi točkom* $A(1, 0)$.

Rješenje: Kako je $P(x, y) = y + 3$, $Q(x, y) = x + 1$, to je

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 1, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 1.$$

Sada iz $dz = (y + 3)dx + (x + 1)dy$ dobijemo

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y + 3, \; \frac{\partial z}{\partial y} = x + 1.$$

Iz $\frac{\partial z}{\partial x} = y + 3$ dobijemo

$$z(x, y) = \int (y + 3)dx + \varphi(y) = (y + 3)x + \varphi(y),$$

što daje $\frac{\partial z}{\partial y} = x + \varphi'(y)$. Izjednačavanjem dvaju oblika za $\frac{\partial z}{\partial y}$ dobije se jednakost:

$$x + 1 = x + \varphi'(y)$$

odakle slijedi

$$\varphi'(y) = 1 \Rightarrow \varphi(y) = y.$$

Uvrštavanjem se dobije

$$z(x, y) = x(y + 3) + y.$$

Kako iz diferencijalne jednadžbe slijedi $dz = 0$ dobije se opće rješenje u obliku

$$z(x, y) = C \Leftrightarrow x(y + 3) + y = C \Rightarrow y = \frac{C - 3x}{x + 1}.$$

Integralne krivulje su hiperbole sa verikalnom asimptotom $x = -1$ i horizontalnom asimptotom $y = -3$. Ako integralna krivulja prolazi točkom $A(1, 0)$, onda je $y(1) = 0$ tj. $0 = \frac{C-3}{2} \Leftrightarrow C = 3$, pa tražena integralna krivulja glasi

$$y = \frac{3(1-x)}{1+x}.$$

□

Zadatak 141 *Odredite egzaktnu diferencijalnu jednadžbu čije su integralne krivulje parabole oblika $y^2 = Cx,\ C \neq 0$.*

Rješenje: Iz $y^2 = Cx$ dobije se $C = \frac{y^2}{x}$. Ako stavimo

$$z(x, y) = \frac{y^2}{x} = C$$

dobije se

$$dz = -\frac{y^2}{x^2}dx + \frac{2y}{x}dy = 0,$$

time je tražena diferencijalna jednadžba

$$-\frac{y^2}{x^2}dx + \frac{2y}{x}dy = 0.$$

Provjerite je li ona egzaktna? Je li dif. jedn. koja se dobije iz nje množenjem sa zajedničkim nazivnikom x^2 egzaktna? □

6.2 Obične diferencijalne jednadžbe drugog i viših redova

6.2.1 Neki specijalni tipovi običnih diferencijalnih jednadžbi drugog reda

1. $\mathbf{y^{(n)} = f(x)}$

Zadatak 142 *Odredite opće rješenje diferencijalne jednadžbe a) $y'' = x + 1$ b) $y''' = x + 1$.*

Rješenje:

$$y' = \int (x+1)dx \Leftrightarrow y' = \frac{x^2}{2} + x + C_1$$

$$\Leftrightarrow y = \int \left(\frac{x^2}{2} + x + C_1\right) dx \Leftrightarrow y = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + C_1x + C_2.$$

□

2. $\mathbf{F(x, y', y'') = 0}$ (nedostaje y) Uvodi se funkcija $p = p(x)$ sa

$$y' = p \Rightarrow y'' = p',$$

pa dobijemo diferencijalnu jednadžbu prvog reda (po novoj funkciji p).

Zadatak 143 *Riješite diferencijalnu jednadžbu* $(1 + x^2)y'' - 2xy' = 0, \quad y(0) = 3, \; y'(0) = 3.$

Rješenje:

$$(1 + x^2)p' - 2xp = 0 \Leftrightarrow \frac{dp}{p} = \frac{2xdx}{1 + x^2} \Leftrightarrow \ln p = \ln(1 + x^2) + \ln C_1$$

$$p = C_1(1 + x^2) \Rightarrow (y'(0) = 3)\ 3 = C_1 \Rightarrow y' = 3(1 + x^2)$$

$$\Leftrightarrow y = 3\left(x + \frac{x^3}{3}\right) + C_2 \Rightarrow (y(0) = 3)\ C_2 = 3 \Rightarrow y = 3x + x^3 + 3.$$

□

3. $\mathbf{F(y, y', y'') = 0}$

U svrhu snižavanja reda diferencijalne jednadžbe uvodi se nova funkcija $p = p(y)$ sa

$$y' = p \Rightarrow y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} \Rightarrow y'' = p\frac{dp}{dy}$$

Zadatak 144 *Nađite integralnu krivulju* $y(x)$ *koja zadovoljava diferencijalnu jednadžbu* $yy''(x) = 2(y'(x))^2$ *i u točki* $A(0, 1)$ *ima tangentu* $y = 2x + 1.$

Rješenje:

$$yp\frac{dp}{dy} = 2p^2 / : p \Leftrightarrow y\frac{dp}{dy} = 2p \Leftrightarrow \frac{dp}{p} = 2\frac{dy}{y} \Leftrightarrow \ln p = 2\ln y + \ln C_1$$

$$p = C_1 y^2 \Rightarrow (y(0) = 1, y'(0) = 2)\ C_1 = 2 \Rightarrow y' = 2y^2 \Leftrightarrow \frac{dy}{y^2} = 2dx$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{y} = 2x + C_2 \Rightarrow (y(0) = 1)\ C_2 = -1 \Rightarrow y = \frac{1}{1 - 2x}.$$

□

6.2.2 Linearne diferencijalne jednadžbe drugog reda sa konstantnim koeficijentima

Opći oblik linearnih diferencijalnih jednadžbi sa konstantnim koeficijentima glasi

$$\mathbf{y'' + ay' + by = f(x)},\ \mathbf{a, b} \in \mathbf{R}.$$

Prvo rješavamo homogenu (nepotpunu, prikraćenu) diferencijalnu jednadžbu:

$$\mathbf{y'' + ay' + by = 0}.$$

Rješavamo karakterističnu jednadžbu $r^2 + ar + b = 0$. Ako je $r_1 \neq r_2 \in \mathbf{R}$ imamo

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x},$$

a ako je $r = r_1 = r_2 \in \mathbf{R}$ tada je

$$y = C_1 e^{rx} + C_2 x e^{rx}.$$

Za $r_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ imamo

$$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x).$$

Zadatak 145 *Odredite opće rješenje diferencijalne jednadžbe* $y'' + 3y' - 4y = 0$.

Rješenje:

$$r^2 + 3r - 4 = 0 \Rightarrow r_1 = 1,\ r_2 = -4 \Rightarrow y = C_1 e^x + C_2 e^{-4x}.$$

□

Rješenje nehomogene (potpune) jednadžbe je oblika $y = y_0 + Y$, gdje je y_0 rješenje pripadne homogene jednadžbe, a Y je partikularno (bilo koje) rješenje. Partikularno rješenje se određuje metodom neodređenih koeficijenata u sljedećim slučajevima:

1. $f(x) = e^{kx} P_n(x)$

   Ako k nije nultočka karakteristične jednadžbe tada je $Y = e^{kx} Q_n(x)$, a ako je k nultočka karakteristične jednadžbe tada je $Y = x^r e^{kx} Q_n(x)$ (r je kratnost nultočke).

2. $f(x) = e^{ax}[P_n(x) \cos bx + Q_m \sin bx]$

   Ako $a \pm bi$ nije rješenje karakteristične jednadžbe imamo

   $$Y = e^{ax}[S_l(x) \cos bx + T_l(x) \sin bx]$$

gdje je $l = \max\{n, m\}$. Ako je pak $a \pm bi$ rješenje karakteristične jednadžbe imamo

$$Y = xe^{ax}[S_l(x)\cos bx + T_l(x)\sin bx].$$

Zadatak 146 *Odredite opće rješenje diferencijalne jednadžbe $y'' - 2y' + y = xe^x$. Odredite ono rješenje koje zadovoljava početne uvjete $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.*

Rješenje:

$$r^2 - 2r + 1 = 0 \Rightarrow r_1 = r_2 = 1 \Rightarrow y_0 = C_1e^x + C_2xe^x,$$

$$k = 1 = R_1 = r_2 \Rightarrow Y = x^2e^x(Ax+B) \Rightarrow Y' = e^x(3Ax^2+Bx^2+Ax^3+2Bx)$$

$$Y'' = e^x(6Ax^2+Bx^2+Ax^3+4Bx+6Ax+2B) \Rightarrow A = \frac{1}{6},\ B = 0 \Rightarrow Y = \frac{1}{6}x^3e^x$$

$$\Rightarrow y = C_1e^x + C_2xe^x + \frac{1}{6}x^3e^x.$$

Time je dobiveno opće rjeësenje. Odredimo sada C_1 i C_2 tako da je $y(0) = 0$ i $y'(0) = 1$. Uvrštavanjem $x = 0$ u opće4 rješenje dobije se:

$$0 = C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot 0 + 0 \Rightarrow C_1 = 0.$$

Deriviranjem općeg rješenja dobije se

$$y' = C_2e^x + C_2xe^x + \frac{1}{2}x^2e^x + \frac{1}{6}x^3e^x,$$

što uvrštavanjem $x = 0$ daje

$$1 = y'(0) = C_2 \cdot 1 + 0 \Rightarrow C_2 = 1.$$

Time je dobiveno partikularno rješenje koje zadovoljava nevedene početne uvjete:

$$y = xe^x + \frac{1}{6}x^3e^x.$$

$\square$

Zadatak 147 *Odredite opće rješenje diferencijalne jednadžbe $y''+y = x\sin x$.*

Rješenje:

$$r^2+1=0 \Rightarrow r_{1,2}=\pm i \Rightarrow \alpha=0,\ \beta=1 \Rightarrow y_0=C_1\cos x+C_2\sin x,$$

$$a=0,\ b=1 \Rightarrow Y=x[(Ax+B)\cos x+(Cx+D)\sin x]$$

$$\Rightarrow Y'=2Ax\cos x+B\cos x+2Cx\sin x+D\sin x-Ax^2\sin x-Bx\sin x+Cx^2\cos x+Dx\cos x$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow Y'' &= 2A\cos x-4Ax\sin x-2B\sin x+2C\sin x+4Cx\cos x\\ &+ 2D\cos x-Ax^2\cos x-Cx^2\sin x-Bx\cos x-Dx\sin x\end{aligned}$$

$$\Rightarrow A=-\frac{1}{4},\ D=\frac{1}{4},\ B=C=0 \Rightarrow Y=x\left(-\frac{1}{4}x\cos x+\frac{1}{4}\sin x\right)$$

$$\Rightarrow y=C_1\cos x+c_2\sin x-\frac{1}{4}x^2\cos x+\frac{1}{4}x\sin x.$$

□

Kako linearne diferencijalne jednadžbe najčešće opisuju vremenske procese (raspade materije, titranja, difuzije, širenje topline itd.) u primjeni se češće javlja nepoznata funkcija $x=x(t)$ od vremenskog parametra t.

Zadatak 148 *Odredite opće rješenje diferencijalne jednadžbe* $x''+x=t\sin t$.

Rješenje:

$$r^2+1=0 \Rightarrow r_{1,2}=\pm i \Rightarrow \alpha=0,\ \beta=1 \Rightarrow x_0=C_1\cos t+C_2\sin t,$$

$$a=0,\ b=1 \Rightarrow X=t[(At+B)\cos t+(Ct+D)\sin t]$$

$$\Rightarrow X'=2At\cos t+B\cos t+2Ct\sin t+D\sin t-At^2\sin t-Bt\sin t+Ct^2\cos t+Dt\cos t$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow X'' &= 2A\cos t-4At\sin t-2B\sin t+2C\sin t+4Ct\cos t\\ &+ 2D\cos t-At^2\cos t-Ct^2\sin t-Bt\cos t-Dt\sin t\end{aligned}$$

$$\Rightarrow A=-\frac{1}{4},\ D=\frac{1}{4},\ B=C=0 \Rightarrow X=t\left(-\frac{1}{4}t\cos t+\frac{1}{4}\sin t\right)$$

$$\Rightarrow x=C_1\cos t+C_2\sin t-\frac{1}{4}t^2\cos t+\frac{1}{4}t\sin t.$$

□

Napomena: U traženju partikularnog rješenja postupak se ponekad može skratiti ako desna strana jednadžbe ima svojstvo parnosti i neparnosti a lijeva strana ne sadrži y'. U gornjem primjeru desna strana jednadžbe je parna funkcija, pa i partikularno rješenje tražimo mu obliku parne funkcije (lako se vidi da je derivacija parne funkcije parna funkcija, a derivacija neparne funkcije parna funkcija)

$$X=At^2\cos t+Ct\sin t.$$

Zadatak 149 *Odredite opće rješenje diferencijalne jednadžbe* $y'' + 3y' + 2y = 2e^{-x} + 4e^{-x}\cos x$.

Rješenje:

$$r^2 + 3r + 2 = 0 \Rightarrow r_1 = -2,\ r_2 = -1 \Rightarrow y_0 = C_1e^{-2x} + C_2e^{-x},$$

$$Y = Axe^{-x} + Be^{-x}\cos x + Ce^{-x}\sin x$$

$$\Rightarrow Y' = Ae^{-x} - Axe^{-x} - Be^{-x}\cos x - Be^{-x}\sin x - Ce^{-x}\sin x + Ce^{-x}\cos x$$

$$\Rightarrow Y'' = -2Ae^{-x} + Axe^{-x} + 2Be^{-x}\sin x - 2Ce^{-x}\cos x$$

$$\Rightarrow A = 2,\ B = -2,\ C = 2 \Rightarrow Y = 2xe^{-x} - 2e^{-x}\cos x + 2e^{-x}\sin x$$

$$\Rightarrow y = C_1e^{-2x} + C_2e^{-x} + 2xe^{-x} - 2e^{-x}\cos x + 2e^{-x}\sin x.$$

□