

Zadatak 1 Testirana je zamka za insekte tako da je bila postavljena na tlu 20 puta po jedan sat pod jednakim uvjetima. Nakon svakog sata prebrojani su ulovljeni insekti, taj broj je zabilježen, a zamka je ispražnjena. Podaci su prikazani u tablici.

10	20	14	13	9	19	10	10	22	10
12	16	12	12	10	6	11	6	9	10

- (a) Nacrtajte stem-and-leaf dijagram za te podatke.
 (b) Odredite karakterističnu petorku tih podataka, izračunajte raspon i interkvartil uzorka.
 (c) Izračunajte aritmetičku sredinu, uzoračku varijancu i standardnu devijaciju.
 (d) Grupirajte podatke u razrede i nacrtajte histogram uzorka.

Rješenje.

	stem	leaf
(a)	0	6699
	1	00000012223469
	2	02

(b)

$$x_{(1)} = 6, x_{(20)} = 22, d = 16, m = \frac{x_{(10)} + x_{(11)}}{2} = \frac{10 + 11}{2} = 10.5,$$

$$q_L = x_{(\frac{21}{4})} = x_{(5)} + \frac{1}{4}(x_{(6)} - x_{(5)}) = 10 + \frac{1}{4}(10 - 10) = 10,$$

$$q_U = x_{(\frac{63}{4})} = x_{(15)} + \frac{3}{4}(x_{(16)} - x_{(15)}) = 13 + \frac{3}{4}(14 - 13) = 13.75, d_q = 3.75,$$

Karakteristična petorka: (6, 10, 10.5, 13.75, 22).

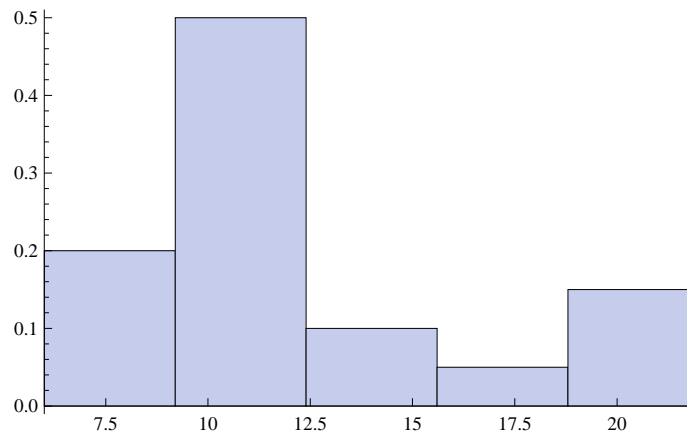
(c)

$$\bar{x} = \frac{1}{20}(2 \cdot 6 + 2 \cdot 9 + 6 \cdot 10 + 11 + 3 \cdot 12 + 13 + 14 + 16 + 19 + 20 + 22) = 12.05,$$

$$s^2 = \frac{1}{19}(2 \cdot 6^2 + 2 \cdot 9^2 + 6 \cdot 10^2 + 11^2 + 3 \cdot 12^2 + 13^2 + 14^2 + 16^2 + 19^2 + 20^2 + 22^2) = 18.3658, s = 4.2855$$

(d) $k = 5, c = \frac{22-6}{5} = 3.2$

razredi	f_i	relativna frekvencija razreda
[6, 9.2]	4	0.2
[9.2, 12.4]	10	0.5
[12.4, 15.6]	2	0.1
[15.6, 18.8]	1	0.05
[18.8, 22]	3	0.15



Slika 1:

Zadatak 2 Kao dio istraživanja razlika u smrtnosti između različitih grupa kategoriziranih po zanimanjima dobiveni su rezultati prikazani u tablici. Konkretno, za svaku od 9 profesionalnih grupa prikazana je stopa pušenja, tj. mjera broja cigareta što ga u prosjeku član te grupe popuši, te standardizirana stopa smrtnosti (SMR) od raka pluća, tj. mjera stope smrtnosti od raka pluća članova te grupe.

grupa	1	2	3	4	5	6	7	8	9
stopa pušenja (X)	77	117	116	111	88	91	107	113	125
SMR od raka pluća (%) (Y)	84	123	155	118	104	86	144	113	128

(a) Procijenite pravac regresije za dane podatke. Nacrtajte procijenjeni pravac. Kolika je stopa pušenja ako je smrtnost od raka pluća 100?

(b) Izračunajte Pearsonov koeficijent korelacije od X i Y . Prokomentirajte njegovu vrijednost.

Rješenje.

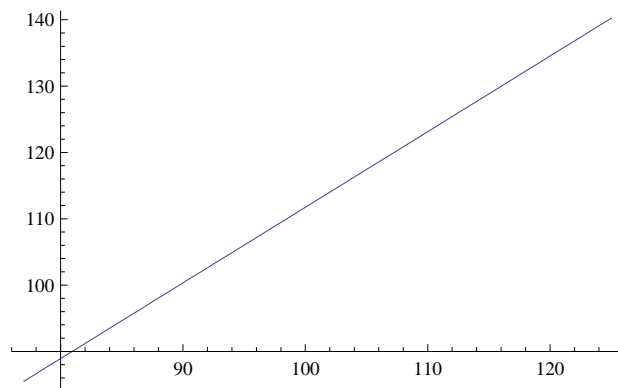
(a)

$$\bar{x} = 105, \bar{y} = 117.22,$$

$$s_x^2 = \frac{1}{8} = (101263 - 9 \cdot 105^2) = 254.75, s_y^2 = \frac{1}{8} = (128235 - 9 \cdot 117.22^2) = 571.28,$$

$$s_{xy} = \frac{1}{8}(113092 - 9 \cdot 105 \cdot 117.22) = 289.89,$$

$$\beta = \frac{289.89}{254.75} = 1.138, \alpha = 117.22 - 1.138 \cdot 105 = -2.27 \Rightarrow y = 1.14x - 2.27$$



Slika 2:

$$y = 100 \Rightarrow x = \frac{100 + 2.27}{1.14} = 89.87$$

(b)

$$r = \frac{289.89}{15.96 \cdot 23.9} = 0.76 > 0$$

\Rightarrow pozitivna korelacija (kad x raste, y raste)

Zadatak 3 Iz skupa $S = \{1, 2, \dots, 20\}$ slučajno se izabire jedan broj. Ako znamo da je izabrani broj djeljiv s 3 odredite vjerojatnost da je izabrani broj paran.

Rješenje.

A = izabrani broj je djeljiv s 3 = {3, 6, 9, 12, 15, 18},

B = izabrani broj je paran = {2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20},

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{k(A \cap B)}{k(\Omega)}}{\frac{k(A)}{k(\Omega)}} = \frac{\frac{3}{20}}{\frac{6}{20}} = \frac{1}{2}.$$

Zadatak 4 Marin ide autobusom na posao u 30% slučajeva, a tramvajem u 70% slučajeva. Vjerojatnost da zakasni kad ide autobusom je 0.4, a kada ide tramvajem ona je 0.2. Kolika je vjerojatnost da će Marin zakasniti na posao?

Rješenje. $H_1 =$ išao je autobusom, $H_2 =$ išao je tramvajem $\Rightarrow P(H_1) = 0.3, P(H_2) = 0.7$

$A =$ zakasnit će na posao $\Rightarrow P(A|H_1) = 0.4, P(A|H_2) = 0.2$

$$\Rightarrow P(A) = 0.3 \cdot 0.4 + 0.7 \cdot 0.2 = 0.26$$

Zadatak 5 U pokusu bacanja kocke dva puta, označimo s X slučajnu varijablu koja registrira manji broj. Odredite zakon razdiobe od X , te matematičko očekivanje.

Rješenje.

$$P(X = 1) = \frac{1 + 2 \cdot 5}{36} = \frac{11}{36}, P(X = 2) = \frac{1 + 2 \cdot 4}{36} = \frac{1}{4}, P(X = 3) = \frac{1 + 2 \cdot 3}{36} = \frac{7}{36},$$

$$P(X = 4) = \frac{1 + 2 \cdot 2}{36} = \frac{5}{36}, P(X = 5) = \frac{1 + 2 \cdot 1}{36} = \frac{1}{12}, P(X = 6) = \frac{1}{36} \Rightarrow E[X] = \frac{91}{36} = 2.53$$

Zadatak 6 Ako se telefonira u vrijeme kada je svaki četvrti telefonski broj zauzet, koliko iznosi vjerojatnost da će se od 12 poziva uspostaviti veza

(a) točno 3 puta, (b) barem 4 puta, (c) ne više od 10 puta.

Odredite očekivanje, varijancu i standardnu devijaciju.

Rješenje. $X \sim B(12, 0.75)$

(a)

$$P(X = 3) = \binom{12}{3} \cdot 0.75^3 \cdot 0.25^9 = 0.00035$$

(b)

$$P(X \geq 4) = 1 - P(x \leq 3) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) - P(X = 2) - P(X = 3) =$$

$$1 - \binom{12}{0} \cdot 0.25^{12} - \binom{12}{1} \cdot 0.75 \cdot 0.25^{11} - \binom{12}{2} \cdot 0.75^2 \cdot 0.25^{10} - \binom{12}{3} \cdot 0.75^3 \cdot 0.25^9 = 0.99961$$

(c)

$$P(X \leq 10) = 1 - P(X \geq 11) = 1 - P(X = 11) - P(X = 12) = 1 - 0.1267 - 0.03168 = 0.84162$$

$$E[X] = 12 \cdot 0.75 = 9, \text{Var}[X] = 12 \cdot 0.75 \cdot 0.25 = 2.25, \sigma(X) = \sqrt{\text{Var}[X]} = 1.5$$