Zadatak 1 *Poznata zagrebačka pizzeria primi u prosjeku 240 narudžbi tijekom jednog sata. Odredite vjerojatnost da u vremenskom periodu od jedne minute:*

a) nije primljena niti jedna narudžba;

b) primljene su barem dvije narudžbe.

Rješenje.

$$\lambda = \frac{240}{60} = 4$$

a)

$$P(X=0) = \frac{4^0}{0!}e^{-4} = 0.01832$$

b)

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X=0) - P(X=1) = 1 - 0.01832 - \frac{4^1}{1!}e^{-4} = 0.90842$$

Zadatak 2 *Za koje $a \in \mathbf{R}$ je funkcija* $f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -2 \\ 1/5, & -2 < x \leq 1 \\ ax, & 1 < x \leq 2 \\ 0, & x > 2 \end{cases}$ *funkcija gustoće vjerojatnosti neke slučajne varijable? Izračunajte $P(-1 < X \leq 1.5)$.*

Rješenje.

$$\int_{-\infty}^{-2} 0dx + \int_{-2}^{1} \frac{1}{5}dx + \int_{1}^{2} axdx + \int_{2}^{\infty} 0dx = 1$$

$$\Rightarrow \frac{x}{5}\Big|_{-2}^{1} + \frac{ax^2}{2}\Big|_{1}^{2} = 1 \Rightarrow a = \frac{4}{15}$$

$$\begin{aligned} x \leq -2, \qquad & F(x) = \int_{-\infty}^{x} 0dt = 0 \\ -2 \leq x \leq 1, \qquad & F(x) = 0 + \int_{-2}^{x} \frac{1}{5}dt = \frac{t}{5}\Big|_{-2}^{x} = \frac{x}{5} + \frac{2}{5} \\ 1 \leq x \leq 2, \qquad & F(x) = \frac{3}{5} + \int_{1}^{x} \frac{4t}{15}dt = \frac{7}{15} + \frac{2x^2}{15} \\ x \geq 1, \qquad & F(x) = 1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow P(-1 < X \leq 1.5) = F(1.5) - F(-1) = \frac{2 \cdot (1.5)^2}{15} + \frac{7}{15} - \frac{1 \cdot (-1)}{5} - \frac{2}{5} = 0.57$$

Zadatak 3 *Iz jednog gradskog i jednog seoskog područja uzeti su uzorci od po 20-oro djece. Kod djece s gradskog područja srednja vrijednost tjelesne mase je $36.5kg$ sa standardnom devijacijom $4kg$, a kod djece sa seoskog područja je $33kg$ sa standardnom devijacijom $3kg$. Provjerite da li postoji razlika u srednjim vrijednostima tjelesne mase kod ove dvije skupine djece, uzimajući u obzir da su podaci normalno distribuirani, a razina značajnosti je 0.1*

Rješenje.

$$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$$
$$H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$$

$$s_1 = 4, s_2 = 3 \Rightarrow F = \frac{16}{9} = 1.78$$

$$f_{0.05}(19,19) = 2.18 > F \Rightarrow f_{0.95}(19,19) = \frac{1}{2.18} = 0.45 < F$$

$\Rightarrow H_0$ ne odbacujemo, tj. varijance se ne razlikuju pa možemo primjeniti T-test:

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2$$
$$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$$

$$\bar{x}_1 = 36.5,\ \bar{x}_2 = 33,\ S^2 = \frac{1}{20+20-2}(19\cdot 16 + 19\cdot 9) = 12.5 \Rightarrow T = \frac{36.5-33}{3.53}\cdot\sqrt{10} = 3.13$$

$$t_{0.05}(38) = 1.64 \Rightarrow t_{0.05}(38) < T$$

$\Rightarrow H_0$ odbacujemo, tj. kod ove se dvije skupine djece tjelesne mase razlikuju.

Zadatak 4 *Odabran je slučajni uzorak od* 103 *učenika koji jesu članovi planinarske sekcije, kao i slučajni uzorak od* 140 *učenika koji nisu članovi kluba. Pred svakog od njih je postavljen identičan zadatak snalaženja na terenu pomoću zemljopisne karte. Iz prve grupe uspješno je riješilo zadatak* 75 *učenika, a iz druge* 77 *učenika. Uz razinu značajnosti* $\alpha = 0.01$ *testirajte hipotezu da su članovi planinarske sekcije bili uspješniji.*

Rješenje.

$$H_0 : p_1 = p_2$$
$$H_1 : p_1 > p_2$$

$$\hat{p}_1 = 0.73,\ \hat{p}_2 = 0.55,\ \hat{p} = \frac{75+77}{243} = 0.63,\ Z = \frac{0.73-0.55}{\sqrt{0.63\cdot(1-0.63)}}\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{103}+\frac{1}{140}}} = 2.84$$

$$\Phi_0(z_{0.01}) = \frac{1-0.02}{2} = 0.49 \Rightarrow z_{0.01} = 2.33 \Rightarrow z_{0.01} < Z$$

$\Rightarrow H_0$ odbacujemo, tj. članovi planinarske sekcije su bili uspješniji.

Zadatak 5 *Za postavljanje pacemakera koriste se tri kirurške procedure (označene slovima A, B i C). Ako se pacijenti nakon postavljanja pacemakera ne podvrgavaju naknadnoj intervenciji, operacija se označava kao "čista". Centar za liječenje kardioloških pacijenata želio je provjeriti da li kod ove tri kirurške procedure postoje razlike u broju "čistih" operacija i dobiveni su sljedeći podaci: kod procedure A bilo je* 27 *"čistih" operacija od ukupno* 38 *(ostali su imali naknadnu intervenciju), kod procedure B je* 41 *"čista" od ukupno* 56 *operacija i kod procedure C je* 21 *"čista" od ukupno 30 operacija. Provjerite da li su ove tri kirurške operacije homogene u odnosu na broj "čistih" operacija uzimajući u obzir da su podaci normalno distribuirani, a razina značajnosti je* 0.05.

Rješenje.

	"čista"	naknadna intervencija	$\sum$
A	27	11	$n_1 = 38$
B	41	15	$n_2 = 56$
C	21	9	$n_3 = 30$
$\sum$	$f_1 = 89$	$f_2 = 35$	124

$$f'_{11} = \frac{38\cdot 89}{124} = 27.27,\ f'_{12} = \frac{38\cdot 35}{124} = 10.73,\ f'_{21} = \frac{56\cdot 89}{124} = 40.19,$$
$$f'_{22} = \frac{56\cdot 35}{124} = 15.81,\ f'_{31} = \frac{30\cdot 89}{124} = 21.53,\ f'_{32} = \frac{30\cdot 35}{124} = 8.47.$$

$$H = \frac{(27-27.27)^2}{27.27}+\frac{(11-10.73)^2}{10.73}+\frac{(41-40.19)^2}{40.19}+\frac{(15-15.81)^2}{15.81}+\frac{(21-21.53)^2}{21.53}+\frac{(9-8.47)^2}{8.47} = 0.11$$
$$\chi^2_{0.05}(2\cdot 1) = 6,\ H < \chi^2_{0.05}(2)$$

$\Rightarrow H_0$ ne možemo odbaciti, tj. ove su tri kirurške operacije homogene.

Zadatak 6 *Tri skupine eksperimentalnih životinja hranjeno je različitim smjesama hrane: A, B i C. Uz razinu značajnosti* 0.05 *provjerite da li postoji statistički značajna razlika u prosječnoj težini životinja.*

skupina	*težina*		
A	133	144	135
B	163	148	
C	210	233	

Rješenje.

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$$

$$\bar{x}_1 = 137.33,\ \bar{x}_2 = 155.5,\ \bar{x}_3 = 221.5,\ \bar{x} = 166.57$$

$$SST = 8844.63,\ SSE = 448.41,\ MST = 4422.315,\ MSE = 112.1025 \Rightarrow F = 39.45$$

$f_{0.05}(2,4) = 6.94 \Rightarrow F > f_{0.05}(2,4) \Rightarrow H_0$ odbacujemo, tj. postoji razlika u prosječnoj težini životinja.

Zadatak 7 *Kod 4 pacijenata oboljelih od epilepsije koji su dobivali fenobarbiton (PB) najmanje tri godine određena je koncentracija IgG nefelometrijskom metodom (vrijednosti su dane u g/L). Istovremeno je određena i koncentracija lijeka EMIT metodom (koncentracije dane u mol/L). Procjenite pravac regresije te odredite* 95% *pouzdan interval za koeficijent smjera tog pravca.*

$PB(x_i)$	1.0	2.8	25.2	28.1
$IgG(Y_i)$	19.5	12.4	14.0	14.4

.

Rješenje.

$$\bar{x} = 14.275,\ \bar{y} = 15.075,\ s_x^2 = 206.13,\ s_{xy} = -16.37 \Rightarrow \hat{\alpha} = \frac{-16.37}{206.13} = -0.079, \hat{\beta} = 15.075 + 0.079 \cdot 14.275 = 16.21$$

$$y = -0.079x + 16.21$$

$$SSE = (19.5 - 16.13)^2 + (12.4 - 15.99)^2 + (14 - 14.22)^2 + (14.4 - 13.99)^2 = 24.47$$

$$\sigma = 3.5,\ t_{0.025}(2) = 4.3$$

$$-0.08 - 4.3 \cdot \frac{3.5}{\sqrt{3 \cdot 206.13}} \leq \alpha \leq -0.08 + 4.3 \cdot \frac{3.5}{\sqrt{3 \cdot 206.13}} \Rightarrow -0.68 \leq \alpha \leq 0.53.$$