Zadatak 1 *U tablici se nalaze podaci dobiveni određivanjem bilirubina u 24 uzoraka seruma ($\mu mol/L$):*

12.8	13.8	15.9	14.7	13.7	14.7	13.5	12.4	13	14.4	15	13.1
13.2	15.1	13.3	14.4	12.4	15.3	13.4	15.7	15.1	14.5	12.7	14.3

(a) Nacrtajte stem-and-leaf dijagram za te podataka.

(b) Odredite karakterističnu petorku tih podataka, izračunajte raspon i interkvartil uzorka.

(c) Izračunajte aritmetičku sredinu, uzoračku varijancu i standardnu devijaciju.

(d) Grupirajte podatke u razrede i nacrtajte histogram uzorka.

Rješenje.

(a)

steam	leaf
12	4478
13	01234578
14	344577
15	011379

(b)

$$x_{(1)} = 12.4,\ x_{(24)} = 15.9,\ d = 3.5,\ m = \frac{x_{(12)} + x_{(13)}}{2} = \frac{13.8 + 14.3}{2} = 14.05,$$

$$q_L = x_{(\frac{25}{4})} = x_{(6)} + \frac{1}{4}(x_{(7)} - x_{(6)}) = 13.125,$$

$$q_U = x_{(\frac{75}{4})} = x_{(18)} + \frac{3}{4}(x_{(19)} - x_{(18)}) = 14.925,\ d_q = 14.925 - 13.125 = 1.8,$$

Karakteristična petorka: $(12.4, 13.125, 14.05, 14.925, 15.9)$.

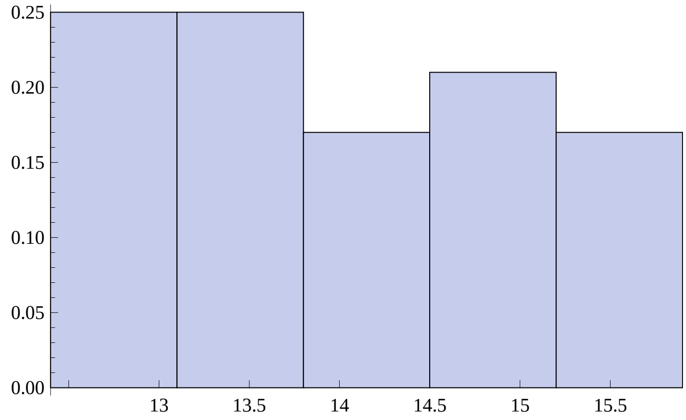
(c)

$$\bar{x} = 14.017,$$

$$s^2 = \frac{1}{23}(4740.38 - 24 \cdot 14.017^2) = 1.085, \quad s = 1.04$$

(d) $k = 5,\ c = \frac{3.5}{5} = 0.7$

razredi	f_i	relativna frekvencija razreda
$[12.4, 13.1]$	6	0.25
$[13.1, 13.8]$	6	0.25
$[13.8, 14.5]$	4	0.17
$[14.5, 15.2]$	5	0.21
$[15.2, 15.9]$	3	0.12



Slika 1:

Zadatak 2 *Rezultati ispitivanja pjene koja sadrži 25% lauril-sulfata dani su u tablici. y je tok tekućine koja prolazi kroz pjenasti sloj (ml/min), a x je zapremina tekućine koju sadrži pjena (ml).*

x	2.20	3.80	7.00	7.70	11.50	15.20	18.00
y	3.60	5.00	7.00	7.70	9.30	11.30	12.20

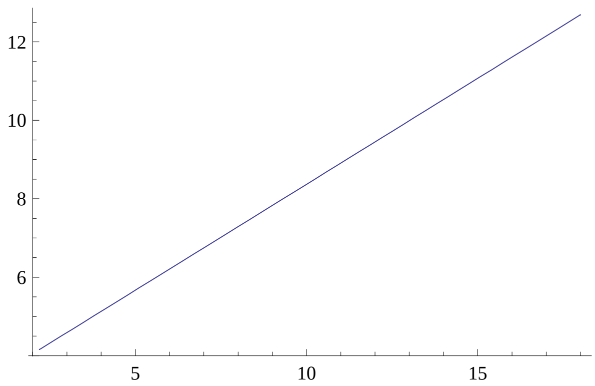
(a) *Procijenite pravac regresije za dane podatke. Nacrtajte procijenjeni pravac. Koliki je protok tekućine ako je zapremina 8 ml?*

(b) *Izračunajte Pearsonov koefcijent korelacije od X i Y . Prokomentirajte njegovu vrijednost.*

Rješenje.

(a)

$$\bar{x} = 9.34, \ \bar{y} = 8.01,$$
$$s_x^2 = \frac{1}{6}(814.86 - 7 \cdot 9.34^2) = 34.03, \ s_y^2 = \frac{1}{6}(509.24 - 7 \cdot 8.01^2) = 10.02,$$
$$s_{xy} = \frac{1}{6}(633.52 - 7 \cdot 9.34 \cdot 8.01) = 18.3,$$
$$\beta = \frac{18.3}{34.03} = 0.54, \ \alpha = 8.01 - 0.54 \cdot 9.34 = 2.97 \Rightarrow y = 0.54x + 2.97.$$



Slika 2:

(b)

$$r = \frac{18.3}{5.83 \cdot 3.16} = 0.99 > 0$$

$\Rightarrow$ pozitivna korelacija (kad x raste, y raste)

Zadatak 3 *Slučajan pokus sastoji se od bacanja homogenog numeriranog tetraedra dva puta za redom, pri čemu su svi mogući ishodi jednako vjerojatni. S X označimo rezultat prvog, a sa Y rezultat drugog bacanja. Odredite vjerojatnost događaja* $\max\{X, Y\} = 4$ *ako je* $\min\{X, Y\} = 3$.

Rješenje.

A : $\max\{X, Y\} = 4 : \{(1, 4), (2, 4), (3, 4), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4)\}$,

B : $\min\{X, Y\} = 3 : \{(3, 3), (3, 4), (4, 3)\}$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{k(A\cap B)}{k(\Omega)}}{\frac{k(B)}{k(\Omega)}} = \frac{\frac{2}{16}}{\frac{3}{16}} = \frac{2}{3}.$$

Zadatak 4 *U uzorku, čiji dio čini* 55% *muškaraca,* 70% *muškaraca i* 60% *žena puši. Kolika je vjerojatnost da slučajno odabrana osoba ne puši?*

Rješenje. $H_1 =$ odabran je mušakarac, $H_2 =$ odabrana je žena $\Rightarrow P(H_1) = 0.55,\ P(H_2) = 0.45$
A = odabrana osoba ne puši $\Rightarrow P(A|H_1) = 0.3,\ P(A|H_2) = 0.4$

$$\Rightarrow P(A) = 0.3 \cdot 0.55 + 0.4 \cdot 0.45 = 0.345.$$

Zadatak 5 *Bacamo kocku 2 puta. Slučajna varijabla X zbraja dobivene rezultate. Opišite X. Odredite očekivanje.*

Rješenje.

$$P(X=2) = \frac{1}{36},\ P(X=3) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18},\ P(X=4) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12},$$
$$P(X=5) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9},\ P(X=6) = \frac{5}{36},\ P(X=7) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6},$$
$$P(X=8) = \frac{5}{36},\ P(X=9) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9},\ P(X=10) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12},$$
$$P(X=11) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18},\ P(X=12) = \frac{1}{36} \Rightarrow E[X] = \frac{252}{36} = 7.$$

Zadatak 6 *Pri svakom gađanju cilja iz oružja, vjerojatnost promašaja je* 0.9. *Naći vjerojatnost da od* 20 *gađanja broj pogodaka ne bude manji od* 7 *niti veći od* 10.

Rješenje. $X \sim B(20, 0.1)$

$$P(X=7) = \binom{20}{7} \cdot 0.1^7 \cdot 0.9^{13} = 0.00197$$
$$P(X=8) = \binom{20}{8} \cdot 0.1^8 \cdot 0.9^{12} = 0.00036$$
$$P(X=9) = \binom{20}{9} \cdot 0.1^9 \cdot 0.9^{11} = 0.00005$$
$$P(X=10) = \binom{20}{10} \cdot 0.1^{10} \cdot 0.9^{10} = 0.00001$$

$P(7 \le X \le 10) = P(X=7) + P(X=8) + P(X=9) + P(X=10) = 0.00239.$

Zadatak 7 *Istraživanjem je utvrđeno da broj izlazaka na ispit iz Biostatistike možemo opisati slučajnom varijablom X sa očekivanjem* 3 *i varijancom* 0.09. *Procijenite vjerojatnost da će student na ispit izaći između* 1 *i* 5 *puta.*

Rješenje. $X =$broj izlazaka na ispit iz Biostatistike,

$$\Rightarrow X \sim N(3, 0.09)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow P(1 \le X \le 5) &= P\left(\frac{1-3}{0.3} \le X^* \le \frac{5-3}{0.3}\right) \\ &= P(-6.67 \le X^* \le 6.67) = 2\Phi_0(6.67) = 0.998 \end{aligned}$$

Zadatak 8 *Za koje $a \in \mathbf{R}$ je funkcija $f(x) = \begin{cases} a\cos 2x, & -\pi/4 \le x \le \pi/4 \\ 0, & \textit{inače} \end{cases}$ funkcija gustoće vjerojatnosti neke slučajne varijable? Izračunajte $P(0 < X \le \pi/8)$.*

Rješenje.

$$\int_{-\infty}^{-\pi/4} 0dx + \int_{-\pi/4}^{\pi/4} a\cos 2x dx + \int_{\pi/4}^{+\infty} 0dx = 1$$

$$\Rightarrow \left.\frac{a\sin 2x}{2}\right|_{-\pi/4}^{\pi/4} = 1 \Rightarrow a = 1$$

$$\begin{aligned} x \leq -\pi/4, \qquad & F(x) = \int_{-\pi/4}^{x} 0dt = 0 \\ -\pi/4 \leq x \leq \pi/4, \qquad & F(x) = 0 + \int_{-\pi/4}^{x} \cos 2t dt = \left.\left(\frac{\sin 2t}{2}\right)\right|_{-\pi/4}^{x} = \frac{\sin 2x}{2} + \frac{1}{2} \\ x \geq \pi/4, \qquad & F(x) = 1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow P(0 < X \leq \pi/8) = F(\pi/8) - F(0) = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Zadatak 9 *Promjer cijevi tipa "ML" mora biti u prosjeku* 100 *mm. Pomoću šlucajno izabranog uzorka želi se kontrolirati proizvedena serija veličine* 400 *komada. Prosječni promjer proizvoda izabranih u uzorak iznose* 104 *mm, a standardno odstupanje je* 1.2 *mm. Uz razinu značajnosti* 3% *testirajte hipotezu da je prosječni promjer cijevi u kontroliranoj seriji veći od* 100 *mm?*

Rješenje.

$$H_0 : \mu = 100$$
$$H_1 : \mu > 100$$

$$\bar{x}_{400} = 104 \Rightarrow Z = \frac{104 - 100}{1.2} = 66.67$$
$$z_{0.03} = 1.885 \Rightarrow Z > z_{0.03}$$

$\Rightarrow H_0$ odbacujemo, tj. prosječni promjer cijevi je veći od 100.

Zadatak 10 *Pretpostavlja se kako* $\frac{3}{4}$ *kućanstava jednoga grada posjeduje TV. U slučajnom uzorku izabranih kućanstava njih* 70.5% *odnosno* 730 *posjeduje TV. Može li se na temelju rezultata uzorka prihvatiti navedena pretpostavka uz razinu značajnosto* 0.05*?*

Rješenje.

$$H_0 : p = 0.75$$
$$H_1 : p \neq 0.75$$

$$0.0705 \cdot n = 730 \Rightarrow n \approx 1035$$
$$Z = \frac{0.705 - 0.75}{\sqrt{0.75(1 - 0.75)}}\sqrt{1035} = -3.34$$
$$z_{0.025} = 1.96 \Rightarrow Z < -z_{0.025}$$

$\Rightarrow H_0$ odbacujemo, tj. postotak kučanstava koji posjeduju TV nije 75%.

Zadatak 11 *Dani su podaci o broju uspostavljenih veza u minuti sa satelitom unutar telekomunikacijskog sustava.*

Br. veza u minuti	0	1	2	3	4
Br. mjerenja	26	36	30	16	7

Testirajte hipotezu o Poissonovoj razdiobi uz nivo značajnosti $\alpha = 0.1$.

Rješenje.

$$\lambda = \frac{0 \cdot 26 + 1 \cdot 36 + 2 \cdot 30 + 3 \cdot 16 + 4 \cdot 17}{115} = 1.84$$

$$f_1' = 115 \cdot \frac{1.84^0}{0!}e^{-1.84} = 18.2, \ f_2' = 115 \cdot \frac{1.84^1}{1!}e^{-1.84} = 33.86, \ f_3' = 115 \cdot \frac{1.84^2}{2!}e^{-1.84} = 31.15,$$
$$f_4' = 115 \cdot \frac{1.84^3}{3!}e^{-1.84} = 19.1, \ f_5' = 115 \cdot \frac{1.84^4}{4!}e^{-1.84} = 8.79.$$

$$H=\frac{(26-18.2)^2}{18.2}+\frac{(36-33.86)^2}{33.86}+\frac{(30-31.15)^2}{31.15}+\frac{(16-19.1)^2}{19.1}+\frac{(17-8.79)^2}{8.79}=11.68$$

$$\chi^2_{0.1}(5-1-1)=6.3,\ H>\chi^2_{0.1}(3)$$

$\Rightarrow$ podaci ne odgovaraju Poissonovoj razdiobi.

Zadatak 12 *Kod procesa kemijskog pročišćavanja korištena su* 3 *različita razgrađivača, a dobivene su vrijednosti izražene kao postotak čiste supstance. Uz razinu značajnosti* $\alpha = 0.05$ *provjerite da li neki od razgrađivača daju veći postotak čiste supstance.*

razgrađivač 1	88.9	88.5	88.3	87.2
razgrađivač 2	91.2	91.8	90.3	−
razgrađivač 3	86.2	84.6	84.9	86.9

Rješenje.

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$$

$$\bar{x}_1 = 88.225,\ \bar{x}_2 = 91.1,\ \bar{x}_3 = 85.65,\ \bar{x} = 88.073$$

$$SST = 50.536,\ SSE = 6.2575,\ MST = 25.268,\ MSE = 0.782 \Rightarrow F = 32.31$$

$f_{0.05}(2,8) = 4.46 \Rightarrow F > f_{0.05}(2,8) \Rightarrow H_0$ odbacujemo, tj. neki od razgrađivača daju veći postotak čiste supstance.

Zadatak 13 *Promatrano je* 5 *automobila u jednom prodajno izložbenom salonu rabljenih automobila te je zabilježena njihova starost i njihova vrijednost. Postoji li, uz razinu značajnosti* 0.05*, linearna veza između tog dvoje? Odredite* 95% *pouzdan interval za koeficijent smjera pravca.*

Starost automobila (u godinama)	0.8	1	2.5	3	3.2
Vrijednost automobila	70000	68000	65000	55000	52000

Rješenje.

$$H_0 : \alpha = 0$$
$$H_1 : \alpha \neq 0$$

$$\bar{x} = 2.1,\ \bar{y} = 62000,\ s_x^2 = 1.27,\ s_{xy} = -8275$$

$$\Rightarrow \hat{\alpha} = \frac{-8275}{1.27} = -6515,\ \hat{\beta} = 62000 + 6515 \cdot 2.1 = 75683$$

$$y = -6515x + 75683$$

$$\hat{\sigma} = 3756,\ t_{0.025}(3) = 3.18$$

$$\Rightarrow T = \frac{-6515}{3756} \cdot \sqrt{4 \cdot 1.27} = -3.91 < -t_{0.025}(3)$$

$\Rightarrow H_0$ odbacujemo, tj. postoji linearna veza.

$$-6515 - 3.18\frac{3756}{\sqrt{4 \cdot 1 - 27}} \leq \alpha \leq -6515 + 3.18\frac{3756}{\sqrt{4 \cdot 1 - 27}}$$

$$\Rightarrow -11814.33 \leq \alpha \leq -1215.67.$$